Leçon 221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

1. Notation. On considère le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes. Soient $n, p \geqslant 1$ deux entiers non nuls.

1. La théorie des équations différentielles linéaires

1.1. Les équations différentielles linéaires

2. Définition. Une *équation différentielle linéaire* sur $\mathbf{K}^n$ d'ordre p est une équation différentielle de la forme

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \cdots + A_0(t)Y + B(t) \tag{1}$$

pour un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et des fonctions continues $A_i \colon I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \colon I \longrightarrow \mathbf{K}^n$. Elle est *homogène* si $B = 0$. Une *solution* sur l'intervalle I de l'équation (1) est une fonction p fois dérivables $Y \colon I \longrightarrow \mathbf{K}^n$ vérifiant

$$\forall t \in I, \qquad Y^{(p)}(t) = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)}(t) + \cdots + A_0(t)Y(t) + B(t).$$

3. Exemple. L'équation $y'' + 2ty = 0$ est une équation différentielle sur $\mathbf{K}$ d'ordre 2.

4. Remarque. Une équation différentielle linéaire sur $\mathbf{K}^n$ d'ordre p peut être ramenée à une équation différentielle linéaire sur $\mathbf{K}^{np}$ d'ordre 1 en écrivant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & \cdots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

On peut donc se limiter à étudier les systèmes linéaires d'ordre 1.

5. Exemple. L'équation de dernier exemple se reformule matriciellement par l'écriture

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

1.2. Théorème d'existence et d'unicité et structure des solutions

6. Théorème *(Cauchy-Lipschitz)*. Soient $A_i \colon I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \colon I \longrightarrow \mathbf{K}^n$ deux fonctions continues définies sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. Soient $t_0 \in I$ un réel et $Y_0 \in \mathbf{K}^n$ un vecteur. Alors le système différentiel

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{2}$$

associée à la condition initiale $Y(t_0) = Y_0$ admet une unique solution définie sur l'intervalle I.

7. Exemple. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y, \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbf{R}$ qui s'écrit $y(t) = 4e^{2(t-1)}$.

8. Théorème. L'ensemble S_{H} des solutions de l'équation homogène

$$Y' = A(t)Y \tag{3}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{C}^1(I, \mathbf{K}^n)$. De plus, pour tout réel $t_0 \in I$, l'application

$$\left|\begin{aligned} S_{\mathrm{H}} &\longrightarrow \mathbf{K}^n, \\ Y &\longmapsto Y(t_0) \end{aligned}\right.$$

est un isomorphisme. En particulier, l'espace S_{H} est de dimension n.

9. Corollaire. L'ensemble des solutions du système (2) est un sous-espace affine de dimension n.

10. Théorème. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors les translatés de la fonction f engendrent un espace vectoriel de dimension finie si et seulement si la fonction f est solution d'une équation linéaire homogène à coefficients constants. — D1 —

1.3. Matrice fondamentale et wronskien

11. Définition. La *matrice fondamentale* associée à une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de l'espace des solutions de l'équation (3) est la matrice

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} Y_1(t) & \cdots & Y_n(t) \end{pmatrix}$$

et le *wronskien* associé est le réel

$$w(t) := \det \Phi(t).$$

12. Remarque. Pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p

$$y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \cdots + a_0(t)y,$$

la matrice fondamentale d'une base $(y_1, \dots, y_p)$ de solutions est la matrice

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_p(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(p-1)}(t) & \cdots & y_p^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

13. Exemple. Une matrice fondamentale de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 0$$

est la matrice

$$\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix}$$

et le wronskien associé est e^{2t}.

14. Proposition *(identité d'Abel)*. Soit $w(t)$ le wronskien d'une base de solutions du système (3). Soit $t_0 \in I$. Alors

$$w'(t) = \operatorname{Tr}(A(t))w(t), \qquad t \in I$$

et, en particulier, on a

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right), \qquad t \in I.$$

15. Proposition. Soit $(Y_1, \dots, Y_n)$ une base de solutions de l'équation (3). Alors le rang des vecteurs $Y_i(t)$ est indépendant du réel $t \in I$.

16. Corollaire. Soient $Y_1, \dots, Y_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{K}^n)$ des fonctions solutions de l'équa-

tion (3) et formant un wronskien $w(t)$. Alors les points suivants sont équivalents :
- la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est une base des solutions de l'équation (3) ;
- il existe un réel $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.

Dans ce cas, la fonction w ne s'annule pas sur l'intervalle I.

17. Application *(théorème d'entrelacement de Sturm)*. Soient $a, b \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle
$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$
Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes sur I. Alors les zéros de la fonctions y_1 sont isolés et, entre deux de ses zéros consécutifs, la fonction y_2 admet un unique zéro.

2. Résolutions des systèmes différentielles linéaires

2.1. Les systèmes homogènes à coefficients constants

18. Hypothèse. On considère un système différentiel de la forme
$$Y' = AY \tag{4}$$
pour une matrice constante $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

19. Définition. L'*exponentielle* d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice
$$\exp M \coloneqq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

20. Lemme. La fonction
$$\Phi \colon \left| \begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \\ t &\longmapsto \exp(tA) \end{aligned} \right.$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée vérifie
$$\Phi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

21. Théorème. Soient $t_0 \in \mathbf{R}$ un réel et $Y_0 \in \mathbf{K}^n$ un vecteur. Alors la solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$
s'écrit
$$Y(t) = \exp([t - t_0]A)Y_0, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

22. Corollaire. On considère l'équation
$$y^{(p)} = a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y$$
avec $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbf{C}$. On factorise le polynôme
$$X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_0 = \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$
Alors les solutions sont de la forme
$$y(t) = \sum_{i=1}^{d} e^{\lambda_i t} P_i(t), \qquad t \in \mathbf{R}$$
pour des polynômes $P_i \in \mathbf{C}[X]_{<m_i}$.

23. Corollaire. On considère l'équation
$$y^{(p)} = a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y$$
avec $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbf{R}$. On regarde le polynôme
$$X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_0.$$
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses racines réelles de multiplicités $m_1, \dots, m_p$ et $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n, \overline{\lambda_{p+1}}, \dots, \overline{\lambda_n}$ ses racines complexes de multiplicités $m_{p+1}, \dots, m_n$. On note $\lambda_k = \rho_k + i\sigma_k$ avec $\rho_k, \sigma_k \in \mathbf{R}$. Alors une base des solutions est constituée des fonctions
$$\begin{aligned} t &\longmapsto t^\ell e^{\lambda_k t}, && k \in [\![1, p]\!],\ \ell \in [\![0, m_k - 1]\!], \\ t &\longmapsto t^\ell e^{\rho_k t} \cos \sigma_k t, && k \in [\![p+1, n]\!],\ \ell \in [\![0, m_k - 1]\!], \\ t &\longmapsto t^\ell e^{\rho_k t} \sin \sigma_k t, && k \in [\![p+1, n]\!],\ \ell \in [\![0, m_k - 1]\!]. \end{aligned}$$

24. Corollaire. On considère l'équation
$$y'' + ay' + by = 0$$
avec $a, b \in \mathbf{C}$. On pose $P \coloneqq X^2 + aX + b \in \mathbf{C}[X]$.
- Si le polynômes P admet deux racines distinctes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, alors les solutions sont de la forme $y(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.
- Si le polynômes P admet une racine double $\lambda \in \mathbf{C}$, alors les solutions sont de la forme $y(t) = (\alpha t + \beta)e^{\lambda t}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

2.2. Les systèmes homogènes généraux

25. Hypothèse. On considère un système différentiel de la forme
$$Y' = A(t)Y \tag{5}$$
pour une fonction continue $A \colon I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

26. Proposition. Soit $\Phi \colon I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une fonction continue. Alors elle est une matrice fondamentale du système (5) si et seulement si elle est dérivable et vérifie
$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \qquad t \in I.$$

27. Proposition. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale du système (5). Alors les solutions du système (5) sont de la forme
$$Y(t) = \Phi(t)C, \qquad t \in I$$
pour un vecteur $C \in \mathbf{K}^n$

28. Corollaire. On reprend les mêmes notations. Soient $t_0 \in I$ un réel et $Y_0 \in \mathbf{K}^n$ un vecteur. Alors la solution du système (5) vérifiant la condition initiale $Y(t_0) = Y_0$ s'écrit
$$Y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}Y_0, \qquad t \in I.$$

29. Exemple. La solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$
vérifie
$$y(t) = (1 + t)e^t, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

D2

30. Proposition *(équation de Bessel)*. L'équation différentielle
$$xy'' + y' + xy = 0$$
admet une unique solution dérivable en série entière vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

2.3. Recherche de solutions particulières

31. Hypothèse. On considère un système différentiel de la forme
$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{6}$$
pour deux fonctions continues $A\colon I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B\colon I \longrightarrow \mathbf{K}^n$.

32. Théorème *(méthode de variation de la constante)*. Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale du système homogène associé à l'équation (6). Soient $t_0 \in I$ un réel et $Y_0 \in \mathbf{K}^n$ un vecteur. Alors l'unique solution du système (6) vérifiant la condition initiale $Y(t_0) = Y_0$ s'écrit
$$Y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}Y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}B(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I.$$

33. Corollaire. Dans le cas où la fonction $A = A(t)$ est constante, l'unique solution de ce dernier problème s'écrit
$$Y(t) = \exp([t-t_0]A)Y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp([t-s]A)B(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I.$$

34. Exemple. La solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t, \\ y(-1) = 0, \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$$
vérifie
$$y(t) = (t^2/2 + t(e+1) + e + 1/2)e^t, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

35. Remarque. On peut également utiliser des séries entières pour trouver une solution particulière.

36. Exemple. L'équation
$$(t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$$
admet comme solution la série entière
$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \frac{a_0}{1+t}, \qquad t \in \left]-1, 1\right[$$
qui se prolonge à l'intervalle $\left]-1, +\infty\right[$.

3. Étude qualitative

3.1. Stabilité des solutions

37. Hypothèse. Soit $f\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Soient $t_0 \in I$ un réel et $z_0 \in \Omega$. On considère l'unique solution y_{t_0,z_0} du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = z_0. \end{cases} \tag{7}$$

38. Définition. La solution y_{t_0,z_0} est *stable* s'il existe une boule $B \coloneqq \overline{\mathrm{B}}(z_0, r) \subset \Omega$ et une constante $C \geqslant 0$ telles que
- pour tout $z \in B$, la fonction $y_{t_0,z}$ est définie sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$;
- pour tous $s \in B$ et $t \geqslant t_0$, on a
$$\|y_{t_0,z_0}(t) - y_{t_0,z}(t)\| \leqslant C\,\|z - z_0\|\,.$$

39. Définition. La solution y_{t_0,z_0} est *asymptotiquement stable* si elle est stable et s'il existe $B \coloneqq \overline{\mathrm{B}}(z_0, r) \subset \Omega$ et une fonction continue $\gamma\colon [t_0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}_+$ tendant vers 0 telles que
$$\forall z \in B,\ \forall t \geqslant t_0, \qquad \|y_{t_0,z_0}(t) - y_{t_0,z}(t)\| \leqslant \gamma(t)\,\|z - z_0\|\,.$$

40. Théorème. On considère le système (4). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{C}$ les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions du système sont
- asymptotiquement stable si et seulement si $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$;
- stable si et seulement si, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on a
  - ou bien $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$,
  - ou bien $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

3.2. Le cas de la dimension deux

41. Remarque. On souhaite connaître l'allure des trajectoires d'un système $Y' = AX$ avec $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$.

42. Proposition. Notons $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ les valeurs propres de la matrice A comptées avec multiplicité.
- Si les valeurs propres λ et μ sont réelles et distinctes, alors
  - si elles sont de même signe, alors les lignes de niveau sortent de l'origine si elles sont positives et rentrent vers l'origine si elles sot négatives ;
  - si elles sont de signes opposés.
- Si les valeurs propres λ et μ sont réelles et égales, alors
  - si la matrice A est diagonalisable, alors les lignes de niveau sortent de l'origine en droites si $\lambda > 0$ et rentre si $\lambda < 0$;
  - si la matrice A n'est pas diagonalisables, alors les lignes de niveau sortent de l'origine en « tournant » si $\lambda > 0$ et rentrent si $\lambda < 0$;
- Si les valeurs propres ne sont pas réelles, alors les lignes de niveau sortent de l'origine en spirale si $\alpha \coloneqq \operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu > 0$, rentrent si $\alpha < 0$ et décrivent des cercles sinon.

[1] Florent Berthelin. *Équations différentielles*. Cassini, 2017.
[2] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.
[3] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Algèbre 1*. Cassini, 2001.
[4] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Analyse 4*. Cassini, 2012.
[5] Xavier Gourdon. *Analyse*. 2e édition. Ellipses, 2008.