Leçon 222. Exemples d'étude d'équations différentielles linéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires.

1. Études de quelques équations différentielles linéaires

1.1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses applications

1. Théorème. Soient $\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{K}^n$ un ouvert et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}^n$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$ une condition initiale. Alors il existe une unique solution maximale au problème

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

2. Exemple. Pour $y_0 \in \mathbf{R}$, l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y' &= t^2 e^y, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

admet une unique solution maximale.

3. Exemple. L'équation différentielle

$$\begin{aligned} ty' - y^2 &= 0, \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

admet l'unique solution maximale

$$y\colon t \in \,]0, e[\, \longmapsto 1/(1 - \ln t).$$

4. Remarque. En procédant par analyse-synthèse et lorsque la fonction f est un polynôme en la variable t et en les dérivées de la fonction y, on peut trouver une solution d'une équation différentielle en la développant en série entière.

5. Exemple. On cherche les solutions de l'équation différentielle

$$(t^2 + t)y'' + (3t+1)y' + y = 0.$$

On obtient les solutions

$$y(y) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)t^n = \frac{\lambda}{1+t}, \qquad t \in \,]-1, 1[$$

pour des constantes $\lambda \in \mathbf{R}$. Cette solution est aussi valable sur l'intervalle $]-1, +\infty]$.

6. Proposition. On considère l'*équation de Bessel*

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{1}$$

Alors la fonction

$$g\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \cos(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

est une solution de l'équation (1).

7. Proposition. Il existe une unique solution f_0 de l'équation (1) qui est développable en série entière telle que $f_0(0) = 1$. De plus, elle est définit sur toute la droite $\mathbf{R}$.

8. Proposition. Soit $f\colon]0, a[\longrightarrow \mathbf{R}$ une solution de l'équation (1). La famille (f, f_0) est libre si et seulement si la fonction f n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

D1

9. Corollaire. Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^n.$$

1.2. Les équations linéaires classiques et la méthode de la variation de la constante

10. Proposition. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $a\colon I \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{K}$. Alors la solution maximale du problème

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

est la fonction définie par l'égalité

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s \right).$$

11. Exemple. Soit $a \in \mathbf{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont toutes de la forme $y(t) = \lambda e^{at}$ pour un réel $\lambda \in \mathbf{R}$.

12. Remarque. Lorsque l'équation possède une second membre, c'est-à-dire qu'on a affaire à une équation de la forme $y' = a(t)y + b$, on utilise la méthode de la variation de la constante : on suppose que la solution s'écrive

$$y(t) = \lambda(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s \right)$$

pour une fonction dérivable λ.

13. Exemple. La solution du problème

$$\begin{aligned} y' + y &= e^t, \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

s'écrit

$$y(t) = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{2-t}).$$

14. Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. Alors les solutions maximales de l'équation différentielle $Y' = AY$ sont de la forme

$$Y(t) = \exp(tA) Y_0$$

avec $Y_0 \in \mathbf{K}^n$.

15. Corollaire. Soient $a, b \in \mathbf{C}$ deux réels. Considérons le polynôme $P \coloneqq X^2 + aX + b$ et l'équation différentielle $y'' + ay' + b = 0$.

- Si le polynôme P admet deux racines complexes r et s, alors les solutions sont de la forme $y(t) = \lambda e^{rt} + \mu e^{st}$ pour deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.
- Si le polynôme P admet une racine complexe double r, alors elles sont de la forme $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}$ pour deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.

2. Outils pour l'étude des équations aux dérivées partielles

2.1. La méthode des caractéristiques et l'équation de transport

16. Exemple. Soient $a \in \mathbf{R}$ un réel et u_0 une fonction dérivable. Considérons l'équation de transport unidimensionnelle

$$\begin{aligned} \partial_t u + a\partial_x u &= 0 && \text{sur } \mathbf{R} \times [0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Soit u une solution. Alors la fonction v définie par l'égalité $v(y,s) \coloneqq u(y+as,s)$ vérifie la relation $\partial_s v(y,s) = 0$. Ainsi on peut écrire

$$u(x,t) = u_0(x-at).$$

17. Définition. Soient $a_1,\dots,a_n \colon \mathbf{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ des fonctions et $u_0 \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On note $a \coloneqq (a_1,\dots,a_n)$. On considère le problème

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} u &= 0 && \text{sur } \mathbf{R}^n \times [0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}^n$, l'*équation caractéristique* associée à ce dernier problème est le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} X' &= a(X,s), \\ X(t) &= x. \end{aligned} \tag{3}$$

18. Proposition. Le problème (3) admet une unique solution $s \longmapsto X(s\,;x,t)$. Alors la fonction u définie par la relation

$$u(x,t) = u_0(X(0\,;x,t))$$

est l'unique solution de l'équation (2).

19. Exemple. Considérons l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t u + 2t\partial_x u &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Pour $t,x \in \mathbf{R}$, son équation caractéristique est

$$\begin{aligned} X' &= 2s, \\ X(t) &= x \end{aligned}$$

et sa solution s'écrit

$$X(s\,;x,t) = s^2 + x - t^2.$$

Finalement, la solution de l'équation (4) s'écrit

$$u(x,t) = u_0(x-t^2).$$

2.2. Les séries et la transformée de Fourier

20. Théorème. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n e_n$ converge normalement vers la fonction f avec

$$c_n(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad e_n(t) \coloneqq e^{int}.$$

21. Définition. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'*équation de la chaleur* est le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x) & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{5}$$

22. Proposition. On suppose que la fonction f est 1-périodique et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe une unique solution $u \colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ au problème (5) qui est 1-périodique par rapport à la variable d'espace.

23. Proposition. La transformée de Fourier $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \longrightarrow \hat{f}$ définie par la relation

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x$$

vérifie les points suivants :

- si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ est dérivable et sa dérivée est intégrable, alors $\mathscr{F}(f') = 2i\pi\xi\hat{f}$;
- si $f,g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, alors $\mathscr{F}(f \star g) = \hat{f} \times \hat{g}$;
- si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ et $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, alors
$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}\xi$$
pour presque tout $x \in \mathbf{R}$.

24. Proposition. On suppose que la fonction f est bornée de classe $\mathscr{C}^2$. Alors la fonction u définie par l'égalité

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f(y)\,\mathrm{d}y$$

est une solution de l'équation (5).

25. Remarque. La solution n'est pas unique : la fonction définie par l'égalité

$$v(x,t) = \frac{x}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

est une solution bien qu'elle ne soit pas identiquement nulle.

3. Des outils d'analyse fonctionnelle

3.1. Les espaces de Sobolev

26. Définition. L'*espace de Sobolev* est l'ensemble

$$\mathrm{H}^1(]0,1[) \coloneqq \{u \in \mathrm{L}^2(]0,1[) \mid u' \in \mathrm{L}^2(]0,1[) \text{ dans } \mathscr{D}'(]0,1[)\}$$

munit du produit scalaire $\langle u,v\rangle_{\mathrm{H}^1} \coloneqq \langle u,v\rangle_{\mathrm{L}^2} + \langle u',v'\rangle_{\mathrm{L}^2}$. On définit également

$$\mathrm{H}^2(]0,1[) \coloneqq \{u \in \mathrm{L}^2(]0,1[) \mid u' \in \mathrm{H}^1(]0,1[) \text{ dans } \mathscr{D}'(]0,1[)\}.$$

27. Proposition. Soit $u \in \mathrm{H}^1(]0,1[)$. Alors il existe une unique fonction $\overline{u} \in \mathscr{C}^0([0,1])$ égale presque partout à la fonction u et vérifiant

$$\forall x,y \in [0,1], \quad \overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

28. Proposition *(inégalité de Poincaré)*. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in \mathrm{H}_0^1(]0,1[), \qquad \|u\|_2 \leqslant C\|u'\|_2.$$

29. Proposition. L'adhérence de $\mathscr{D}(]0,1[)$ dans $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ s'écrit

$$\mathrm{H}^1_0(]0,1[) \coloneqq \mathrm{H}^1(]0,1[) \cap \{f \in \mathscr{C}^0(]0,1[) \mid f(0)=f(1)=0\}.$$

3.2. Le théorème de Lax-Milgram

30. Théorème *(Lax-Milgram)*. Soient H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur H. Soit $\varphi \in H'$ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique élément $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \qquad a(x,y) = \varphi(y).$$

De plus, cet élément x est caractérisé par l'égalité

$$\frac{1}{2}a(x,x) - \varphi(x) = \min_{y \in H}\left(\frac{1}{2}a(y,y) - \varphi(y)\right).$$

31. Définition. Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$. On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad \text{sur }]0,1[, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Une *solution faible* de ce problème est une fonction $u \in \mathrm{H}^1(]0,1[)$ telle que

$$\forall v \in \mathrm{H}^1_0(]0,1[), \qquad \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv.$$

32. Théorème. Le problème (6) admet une unique solution faible dans $\mathrm{H}^1_0(]0,1[)$ et c'est la fonction minimisant la fonction

$$v \in \mathrm{H}^1_0(]0,1[) \longmapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (v'^2 + v^2) - \int_0^1 fv \in \mathbf{R}.$$