Leçon 226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

1. Les suites récurrentes : définition et étude

1. Définition. Soient E un espace métrique et $p \geqslant 1$ un entier. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de E est *récurrence d'ordre* p si on peut l'écrire sous la forme

$$\forall n \geqslant p, \qquad u_{n+p} = f(u_n, \dots, u_{n+p-1})$$

pour une application $f \colon E^p \longrightarrow E$.

1.1. Définition et premiers exemples dans le cas réel

2. Définition. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle fermé. L'*orbite* d'un réel $x \in I$ suivant une fonction $f \colon I \longrightarrow I$ est la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

3. Proposition. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, alors sa limite $\alpha \in \mathbf{R}$ appartient à l'intervalle I. Si, de plus, la fonction f est continue sur I, alors $f(\alpha) = \alpha$.

4. Contre-exemple. L'hypothèse de continuité ne suffit pas à assurer la convergence de l'orbite. En effet, en prenant la fonction $f \coloneqq -\mathrm{Id}_{[-1,1]}$, on a $u_n = (-1)^n u_0$ et, dès que $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas.

5. Remarque. Il n'est pas nécessaire d'avoir la continuité pour avoir $f(\alpha) = \alpha$: il suffit de considérer la fonction $f \coloneqq \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$.

6. Exemple. Soit $a \in \mathbf{R}$ un réel. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = u_n + a$ (resp. $u_{n+1} = a u_n$) pour tout entier $n \in \mathbf{N}$. Alors $u_n = na$ (resp. $u_n = a^n u_0$) pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

7. Définition. Une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie une *récurrence homographique* si elle vérifie une relation du type

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n - d} \tag{1}$$

pour quatre réels $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

8. Proposition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite complexe vérifiant la relation (1). Considérons l'équation

$$cx^2 - (a-d)x - b = 0. \tag{2}$$

– Si l'équation (2) admet deux racines distincts $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{avec} \quad k \coloneqq \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$

– Si l'équation (2) admet une racine double $\alpha \in \mathbf{C}$, alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \quad \text{avec} \quad k \coloneqq \frac{c}{a - \alpha c}.$$

1.2. Monotonie dans le cas réel

9. Théorème. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle fermé et $f \colon I \longrightarrow I$ une fonction. Si cette dernière est croissante, alors elle admet un point fixe.

10. Contre-exemple. Le théorème est faux dans le cas décroissant. En effet, la fonction décroissante $\mathbf{1}_{[0,1/2]} \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ n'admet pas de point fixe.

11. Théorème. On suppose que la fonction f est croissante. Toute orbite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ suivant cette dernière est

– croissante si $f(x_0) \geqslant x_0$;
– décroissante si $f(x_0) \leqslant x_0$.

Si l'intervalle I est borné, alors toute orbite converge et, lorsque la fonction f est continue, leurs limites sont des points fixes de la fonction f.

12. Contre-exemple. Le théorème ne fonctionne pas lorsque la fonction f est décroissante. On pensera à la fonction $f \coloneqq -\mathrm{Id}_{[-1,1]}$. Le résultat suivant y remédie.

13. Théorème. On suppose que la fonction f est décroissante. Alors elle admet au plus un point fixe.

De plus, on suppose que l'intervalle I est borné et que la fonction f est continue. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une orbite. Alors les suites $(x_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ convergent resp. vers des points fixes des fonctions f et $f \circ f$. Enfin, si la composée $f \circ f$ admet un unique point fixe, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ce point fixe.

1.3. Le cas vectoriel

14. Définition. Une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'un espace $\mathbf{C}^p$ est *récurrente linéaire* s'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{C})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad X_{n+1} = A X_n.$$

15. Définition. Soit $p \geqslant 1$ un entier. Un *polygone à p côtés* est un p-uplet du plan complexe, c'est-à-dire un élément de l'ensemble $\mathbf{C}^p$.

16. Proposition. Soit $P \coloneqq (z^1, \dots, z^p) \in \mathbf{C}^p$ un polygone. On définit la suite de polygones $(z_n^1, \dots, z_n^p)_{n \in \mathbf{N}}$ par les relations

$$(z_0^1, \dots, z_0^p) = P \qquad \text{et} \qquad z_{n+1}^k = \frac{z_n^k + z_n^{k+1}}{2}, \qquad k \in [\![1, p]\!], \ n \in \mathbf{N}.$$

D1

Alors la suite $(z_n^1, \dots, z_n^p)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers l'isobarycentre du polygone P, c'est-à-dire vers le polygone $(g, \dots, g)$ avec

$$g \coloneqq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} z^k \in \mathbf{C}.$$

17. Remarque. Lorsqu'on a une certaine suite récurrente linéaire complexe $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'ordre p, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme

$$\forall n \geqslant p, \qquad u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_p u_{n-p} \tag{3}$$

pour des complexes $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{C}$, on peut reformuler cette dernière relation matriciellement en écrivant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad X_{n+1} = A X_n$$

où l'on a définit

$$X_n := \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_p & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

18. Théorème. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe vérifiant la relation (3). On considère les racines $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{C}$ du polynôme

$$P := X^p - a_1 X^{p-1} - \cdots - a_p \in \mathbf{C}[X]$$

associées aux multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{N}^*$. Alors il existe des polynômes $P_i \in \mathbf{C}[X]$ avec $\deg P_i < \alpha_i$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = P_1(n) r_1^n + \cdots + P_k(n) r_k^n.$$

19. Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

pour deux complexes $a, b \in \mathbf{C}$. Notons $r, q \in \mathbf{C}$ les deux racines, comptées avec multiplicité, du polynôme $X^2 - aX - b \in \mathbf{C}[X]$.

- Si $r \neq q$, alors il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ telles que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \lambda r^n + \mu q^n \ ;$$
- Si $r = q$, alors il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ telles que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

20. Exemple. La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par les relations

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n \in \mathbf{N}$$

s'écrit sous la forme

$$F_n = \frac{\varphi^n + \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

avec $\varphi := (1+\sqrt{5})/2$ et $\tilde{\varphi} := (1-\sqrt{5})/2$.

2. Autour des points fixes

2.1. Le théorème du point fixe de Banach et ses conséquences

21. Théorème. Soient E un espace métrique complet, $k \in [0,1[$ un réel et $\varphi \colon E \longrightarrow E$ une application k-contractante. Alors cette dernière admet un unique point fixe $a \in E$ et toute orbite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivant l'application φ converge vers ce point a et, plus précisément, elle vérifie

$$d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

22. Application. Soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ admettant un zéro. En prenant une constante $C > 0$ assez petite, l'application $x \in [a,b] \longmapsto x - Cf(x)$ est contractante et on peut utiliser une orbite qui va permettre d'approcher un solution de l'équation $f(x) = 0$.

23. Remarque. Lorsque l'espace E est vectoriel normé et que la fonction φ est différentiable, pour montrer qu'elle est k-contractante, on peut montrer que $\|d\varphi\| \leqslant k$.

2.2. Points fixes attractifs et répulsifs dans le cas réel

24. Définition. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle fermé. Une point fixe $a \in I$ d'une certaine application $\varphi \colon I \longrightarrow I$ de classe $\mathscr{C}^1$ est

- *attractif* si $|\varphi'(a)| < 1$;
- *répulsif* si $|\varphi'(a)| > 1$.

25. Proposition. Soient $\varphi \colon I \longrightarrow I$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in I$ un point fixe attractif. Alors il existe une constante $k \in]0,1[$ telle que toute $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$|x_n - a| \leqslant k^n |x_0 - a|, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

26. Proposition. Soient $\varphi \colon I \longrightarrow I$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in I$ un point fixe répulsif. Alors il existe une constante $h > 0$ telle que

$$\forall x \in I \cap [a-h, a+h] \setminus \{a\}, \qquad |\varphi(x) - a| > |x - a|.$$

27. Remarque. Lorsque $|\varphi'(a)| = 1$, on ne peut rien dire : avec $a = 0$,

- avec $\varphi(x) = \sin x$ et $x_0 \in]0, \pi/2]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ;
- avec $\varphi(x) = \operatorname{sh} x$ et $x_0 > 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

28. Remarque. On suppose que le point fixe a est attractif. Graphiquement,

- si $\varphi'(a) > 0$, alors la fonction $x \longmapsto x - \varphi(x)$ est strictement croissante sur un voisinage du point a, donc toute orbite va être soit strictement croissante soit strictement décroissante : on obtient un graphe « en escalier » qui diverge ;
- si $\varphi'(a) < 0$, alors la fonction φ est strictement décroissante et le cas précédent assure que, pour toute orbite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes : on obtient un graphe « en escargot ».

2.3. Le méthode de Newton

29. Définition. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $f \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. La *méthode de Newton* consiste en l'itération, lorsqu'elle est bien définie, d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par l'égalité

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

30. Théorème. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f' \neq 0$ sur I. On suppose qu'elle admet un zéro $a \in I$. Alors il existe trois constantes $C, M, h > 0$ tel que toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de la méthode Newton avec $|x_0 - a| < h$ vérifie

$$|x_n - a| \leqslant C(M[x_0 - a])^{2^n}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

31. Remarque. La méthode de Newton se généralise à la dimension d : c'est la méthode de Newton-Raphson. Soit $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ admettant un zéro $a \in \Omega$ tel que la différentielle $df(a)$ soit inversible. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation

$$x_{n+1} = x_n - df(x_n)^{-1} \cdot f(x_n), \qquad n \in \mathbf{N}$$

converge vers le point a pourvu que son terme initial x_0 en soit assez proche.

32. Exemple. Grâce à la méthode, on peut approcher la solution d'un système comme

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 4, \\ xe^x + ye^y = 0. \end{cases}$$

3. Application à l'algèbre linéaire

3.1. Pour l'approximation spectrale

33. Définition. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ admet une *décomposition LU* si elle peut s'écrire sous la forme $A = LU$ pour une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U.

34. Remarque. Une fois une décomposition LU obtenu, on peut facilement résoudre le système $Ax = b$ en résolvant successivement les systèmes $Ly = b$ puis $Ux = y$.

35. Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Alors on peut l'écrire sous la forme $A = QR$ pour une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure Q. Un tel couple (Q, R) est unique et on l'appelle la *décomposition QR* de la matrice A.

36. Théorème *(méthode QR)*. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de modules deux à deux distincts. On peut alors trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ triés par modules décroissants tels que

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{avec} \quad \Lambda \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

De plus, on suppose que la matrice P admet une décomposition LU. Définissons la suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de matrice de la manière suivante :

- on pose $A_0 = A$;
- pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on pose $A_{k+1} \coloneqq R_k Q_k$ où le couple (Q_k, R_k) est la décomposition QR de la matrice A_k.

Alors la suite $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge coefficient par coefficient vers la matrice Λ.

3.2. Pour la décomposition de Dunford

37. Théorème *(décomposition de Dunford)*. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que

- l'endomorphisme d soit diagonalisable ;
- l'endomorphisme n soit nilpotent ;
- on ait $f = d + n$.

38. Remarque. La décomposition de Dunford est utile pour calculer des exponentiels de matrice : on peut alors résoudre plus facilement des systèmes différentiels linéaires.

D2

39. Théorème. Soient $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique $\chi \in \mathbf{K}[X]$ est scindé. Considérons le polynôme

$$P \coloneqq \frac{\chi}{\chi \wedge \chi'}.$$

On note (D, N) la décomposition de Dunford de A. Alors la suite $(A_r)_{r\in\mathbf{N}}$ telle que

$$A_0 = A \qquad \text{et} \qquad A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}, \qquad r \in \mathbf{N}$$

est stationnaire et elle tend vers la matrice D.

40. Remarque. Le corps $\mathbf{K}$ n'a pas besoin d'être de caractéristique nulle, mais le calcul du polynôme P est plus facile car il ne nécessite pas de connaître les valeurs propres de la matrice A. Dans le cas général où le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique quelconque, si $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors il faudrait prendre $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

[1] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.* T. Tome premier. Calvage & Mounet, 2017.
[2] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* 3e tirage. Masson, 1982.
[3] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2006.
[4] Xavier Gourdon. *Algèbre.* 2e édition. Ellipses, 2009.
[5] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[6] Jean-Étienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* EDP Sciences, 2004.