# **Leçon 228.** Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

## I. Les débuts de la régularité : la continuité

### I.1. Fonctions continues

1. Définition. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. Une fonction $f \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est *continue* en un point $a \in I$ si

$$f(x) \xrightarrow[I \ni x \longrightarrow a]{} f(a).$$

Elle est continue (sur $I$) si elle est continue en tout point de $I$.

2. Exemple. La fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto \sin x$ est continue sur $\mathbf{R}$. Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}$.

3. Théorème. Une fonction $f \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue en un point $a \in I$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $I$ telle que $x_n \longrightarrow a$, on a $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

4. Contre-exemple. La fonction $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ ou encore la fonction

$$x \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue.

5. Application. Toute fonction continue $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant la relation

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathbf{R}$$

est linéaire.

6. Proposition. Soit $f \colon I \longrightarrow I$ une fonction continue sur $I$. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $I$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si elle converge vers un point, alors ce dernier est un point fixe de la fonction $f$.

7. Théorème *(de prolongement)*. Soit $a \in \partial I$ un point et $f \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Si elle admet une limite $\ell \in \mathbf{R}$ au point $a$, alors elle admet un unique prolongement continu $\tilde{f} \colon I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbf{R}$ en posant $\tilde{f}(a) = \ell$.

8. Exemple. La fonction $x \in \mathbf{R}^* \longmapsto x \sin(1/x)$ se prolonge par continuité au point 0 en posant $f(0) = 0$.

9. Contre-exemple. La fonction $x \in \mathbf{R}^* \longmapsto \sin(1/x)$ ne peut se prolonger au point 0.

10. Théorème. La somme, le produit et la composée de fonctions continues sont continues. L'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas est continue.

11. Théorème. Une fonction continue sur un intervalle compact est bornée et elle y atteint ses bornes.

12. Théorème. Une fonction convexe sur $I$ est continue sur $\mathring{I}$.

13. Contre-exemple. Une fonction convexe sur $I$ n'est pas nécessairement continue sur $I$ comme le montre la fonction $\mathbf{1}_{\{0,1\}} \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$.

### I.2. Le théorème des valeurs intermédiaires

14. Théorème. Soit $f \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors l'image $f(I)$ est un intervalle.

15. Contre-exemple. La réciproque est fausse. La deuxième fonction du point 4 n'est pas continue et pourtant son image est l'intervalle $[-1,1]$.

16. Corollaire. Soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]a,b[$.

17. Application. On obtient un algorithme de recherche dichotomique de zéro d'une telle fonction $f$.

18. Application. Toute fonction continue $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ admet un point fixe.

19. Corollaire. Une fonction strictement monotone $I \longrightarrow \mathbf{R}$ est injective.

### I.3. Uniforme continuité

20. Définition. Une fonction $f \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est *uniformément continue* si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, \qquad |x - y| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

21. Exemple. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

22. Théorème. Une fonction uniformément continue est continue.

23. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2$ est continue et elle n'est pas uniformément continue.

24. Théorème *(Heine)*. Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

25. Application. Un chemin dans $\mathbf{C}$ est uniformément continue. Cela sert à montrer le théorème de Cauchy homotopique qui énonce le résultat suivant. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ deux chemins de mêmes extrémités et homotopes dans $\Omega$. Pour toute fonction holomorphe $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, on a

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

26. Proposition. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle compact et $f \colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors son *module de continuité*

$$h \in I \longmapsto \sup_{|x-y| \leqslant h} |f(x) - f(y)|$$

est une fonction continue.

### I.4. Continuité pour les suites, les séries et les intégrales à paramètre

27. Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que

- il existe un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbf{N}}$ converge ;
- la suite $(f_n')_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction $g$ sur $[a,b]$.

Dans ce cas, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f$ sur $[a,b]$ vérifiant $f' = g$.

28. Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui converge unifor-

mément vers une fonction $f$ sur $[a,b]$. Alors cette dernière est continue et

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

29. Théorème. Soient $f\colon I \times ]a,b[ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction vérifiant les points suivants :

– pour tout réel $x \in I$, la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $]a,b[$ ;
– pour tout réel $t \in ]a,b[$, la fonction $f(\cdot,t)$ est continue sur $I$ ;
– il existe une fonction intégrable $\varphi\colon ]a,b[ \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in I,\ \forall t \in ]a,b[, \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction

$$x \in I \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $I$.

30. Exemple. La *fonction gamma d'Euler*

$$\Gamma\colon x > 0 \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

## II. Un peu plus de régularité : la dérivabilité

### II.1. Fonctions dérivables et lien avec la monotonie

31. Définition. Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est *dérivable* en un point $a \in I$ si la quantité

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite lorsque $x \longrightarrow a$. Dans ce cas, cette limite sera notée $f'(a)$. Elle est dérivable sur $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$ et alors la fonction $f'\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est la *fonction dérivée* de $f$.

32. Exemple. Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbf{R}$. En posant $f(x) = x^2$, la fonction $f$ est dérivable et $f'(x) = 2x$.

33. Théorème. Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable en un point $a \in I$ si et seulement s'il existe deux réels $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que

$$f(x) = \alpha + \beta(x-a) + o(x-a).$$

Dans ce cas, on a $\alpha = f(a)$ et $\beta = f'(a)$.

34. Corollaire. Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

35. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$ et elle n'est pas dérivable en $0$.

- D1 -

36. Théorème. L'ensemble des fonctions continues $[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui ne sont nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues $[0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$.

37. Théorème. Soient $f, g\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables et $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel. Alors $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Si la fonction $g$ ne s'annule jamais, alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - f'g}{g^2}.$$

Si la fonction $g\colon J \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifie $f(I) \subset J$, alors $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

38. Théorème. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors elle est croissante (respectivement décroissante) sur $I$ si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$.

39. Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, la fonction $f$ est constante si et seulement si $f' = 0$ sur $I$. Par ailleurs, elle est strictement croissante si et seulement si $f' > 0$ sur $\mathring{I}$.

### II.2. Régularité supérieure et équations différentielles

40. Définition. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ un entier. Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ si elle est $n$ fois dérivable sur $I$ dont la $n$-ième dérivée $f^{(n)}$ est continue sur $I$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

41. Proposition. Une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.

42. Contre-exemple. La réciproque est fausse. En effet, la fonction

$$x \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable et sa dérivée n'est pas continue en $0$.

43. Remarque. Le théorème (29) se généralise pour le caractère $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$.

44. Exemple. La fonction $\Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

45. Définition. Une *équation différentielle linéaire* en dimension 1 est la donnée de fonctions $a_0, \dots, a_n, b\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ pour laquelle on cherche une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f' + a_0 f = b. \tag{1}$$

46. Théorème *(Cauchy-Lipschitz spécifié)*. L'équation (1) admet une solution et cette dernière est unique.

47. Théorème *(Lotka-Volterra)*. Soient $a, b, c, d, x_0, y_0 > 0$. Le système différentielle

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = dxy - cy \end{cases}$$

possède une unique solution maximale $t \in I \longmapsto (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$ qui vérifie la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Par ailleurs, elle est définie sur $I = \mathbf{R}$ et les fonctions $x$ et $y$ sont périodiques de même période. D2

### II.3. Théorèmes généraux sur les fonctions dérivables

48. Théorème *(Rolle)*. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors la dérivée $f'$ s'annule sur $]a,b[$

49. Théorème *(Darboux)*. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Alors l'image $f'(I)$ est un intervalle.

50. Corollaire. Une fonction convexe et dérivable sur $I$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

51. Théorème *(des accroissements finis)*. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un réel $c \in ]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

52. Corollaire *(inégalité des accroissements finis)*. Sous les mêmes hypothèses, si

la fonction $f'$ est bornée par une constante $M \geqslant 0$ sur $]a,b[$, alors
$$|f(a) - f(b)| \leqslant M\,|b-a|\,.$$
En particulier, la fonction $f$ est lipschitzienne.

53. Théorème *(fondamental de l'analyse).* Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que sa dérivée $f'$ soit Riemann-intégrable. Alors
$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

54. Exemple. Pour un entier $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

55. Théorème *(formule de Taylor-Lagrange).* Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un réel $c \in\, ]a,b[$ tel que
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

56. Théorème *(inégalité de Taylor-Lagrange).* Sous les mêmes hypothèses, si la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée par une constante $M \geqslant 0$ sur $]a,b[$, alors
$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

57. Théorème *(formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral).* Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

### II.4. Application à la recherche d'extrema

58. Théorème. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction admettant un extremum local en un point $a \in I$. Si elle est dérivable en $a$, alors $f'(a) = 0$.

59. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la fonction $x \longmapsto x^3$ voit sa dérivée s'annuler en $0$ et elle n'admet pas d'extremum en $0$.

60. Théorème. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction admettant un minimum local en un point $a \in I$. Si elle est deux fois dérivable en $a$, alors $f''(a) \geqslant 0$.

61. Théorème. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in I$. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors le point $a$ est un minimum local strict de la fonction $f$.


[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Analyse 4*. Cassini, 2012.
[2] Xavier Gourdon. *Analyse*. 2e édition. Ellipses, 2008.
[3] Jean-Étienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle*. EDP Sciences, 2004.
[4] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel*. Quatrième édition. Cassini, 2015.