Leçon 228. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

1. Notation. Dans cette leçon, on travaille sur le corps $\mathbf{K}$ des réels ou des complexes.

1. Convergence des séries numériques

1.1. Convergence, somme, sommes partielles et restes d'une série

2. Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle ou complexe. La *série* de terme général u_n avec $n \in \mathbf{N}$ est la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par l'égalité
$$S_n = u_0 + \cdots + u_n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$
Elle est désigné par la notation $\sum u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$. Pour un entier $n \in \mathbf{N}$, la quantité S_n est sa *somme partielle* d'ordre n. La série $\sum u_n$ *converge* si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. De ce cas, la limite de cette dernière est la *somme* de la série $\sum u_n$, qui sera noté sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Sinon elle *diverge*.

3. Exemple. La série $\sum n$ diverge. Soit $x \in \mathbf{R}$ un réel. Alors la série $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et, dans ce cas, sa somme vaut $1/(1-x)$.

4. Définition. Le *reste* d'ordre $n \in \mathbf{N}$ d'une série convergente $\sum u_n$ est la quantité
$$R_n \coloneqq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

5. Proposition. Avec les mêmes notations, la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire $S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

6. Proposition. Muni des opérations naturelles, l'ensemble des séries est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et, si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
pour tout scalaire $\alpha \in \mathbf{K}$.

7. Remarque. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. Mais on ne peut rien dire lorsque les deux séries sont divergentes.

8. Théorème. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \longrightarrow 0$.

9. Contre-exemple. *So long* la réciproque : il suffit de considérer la série de terme général $\ln(1 + 1/n)$ avec $n \in \mathbf{N}$.

10. Remarque. Lorsque $u_n \not\longrightarrow 0$, la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

11. Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle ou complexe. Alors elle converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Dans ce cas, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

1.2. La complétude s'en mêle : la convergence absolue et ses conséquences

12. Rappel. Le corps $\mathbf{K}$ est complet.

13. Théorème *(critère de Cauchy)*. Soit $\sum u_n$ une série. Alors elle converge si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbf{N}^*, \qquad \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\Big| \leqslant \varepsilon.$$

14. Exemple. La *série harmonique* $\sum_{n\geqslant 1} 1/n$ diverge puisqu'elle ne vérifie pas le critère de Cauchy.

15. Définition. Une série $\sum u_n$ *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

16. Théorème. Toute série absolument convergente est convergente.

17. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la série $\sum u_n$ définie par l'égalité
$$u_{2p} = -1/p \qquad \text{et} \qquad u_{2p-1} = 1/p, \qquad p \geqslant 1$$
converge, mais elle ne converge pas absolument

18. Théorème *(règle de Cauchy)*. Soit $\sum u_n$ une série. On pose
$$L \coloneqq \limsup_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n}.$$
– Si $L < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
– Si $L > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

19. Exemple. La série $\sum(1 - 1/n)^{n^2}$ converge.

20. Théorème *(règle de Cauchy)*. Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose
$$L \coloneqq \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \qquad \text{et} \qquad \ell \coloneqq \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$
– Si $L < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
– Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

21. Exemple. Soit $a > 0$ un réel. Alors la série $\sum a^n/n$ converge si $a < 1$ et elle diverge si $a > 1$.

1.3. Le produit de Cauchy

22. Définition. Le *produit de Cauchy* de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ de terme général
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}.$$

23. Théorème. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes de sommes respectives S et T. On suppose que l'une des deux converge absolument. Alors leur produit de Cauchy converge et sa somme vaut ST. De plus, si les deux séries convergent absolument, alors leur produit de Cauchy converge absolument.

24. Remarque. Sans la convergence absolue de l'une des séries, la convergence du produit n'est pas assurer : par exemple, on peut prendre
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{et} \qquad v_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$$

où on se référera plus loin pour montrer les convergences ou divergences.

25. Application. Pour $z \in \mathbf{C}$, la série $\sum z^n/n!$ converge absolument, donc elle converge et sa somme $\exp z$ vérifie
$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \qquad z, w \in \mathbf{C}.$$

2. Le cas des séries à termes positifs

26. Hypothèse. On suppose ici que le corps $\mathbf{K}$ est celui des réels.

2.1. Comparaisons grossières

27. Lemme. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si la série diverge, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

28. Notation. Si une série $\sum u_n$ à termes positifs diverge ou converge, on écrira respectivement
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty.$$

29. Théorème *(règle de comparaison)*. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n \leqslant v_n.$$
Alors
- si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge aussi et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \;;$$
- si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge aussi.

30. Exemple. La série $\sum 1/n^2$ converge puisque
$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
La série $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge puisque
$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

31. Corollaire. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs vérifiant
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Alors
- si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge aussi ;
- si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge aussi.

2.2. Comparaisons asymptotiques de séries, des sommes partielles et des restes

32. Théorème *(règle d'équivalence)*. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant $u_n \sim v_n$. Alors
- les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature ;
- si elles convergent, alors les suites de leurs restes respectifs sont équivalentes ;
- si elles divergent, alors les suites de leurs sommes partielles respectifs sont équivalentes ;

33. Application. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un réel. Alors la *série de Riemann* $\sum 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

34. Corollaire. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors
- s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$, alors la série $\sum u_n$ converge ;
- s'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

35. Théorème *(règle de domination)*. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge aussi. Dans ce cas, on a
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\Big).$$
Le résultat reste vrai si on remplace les grands O par des petits o.

36. Exemple. Comme $e^{-n} = o(1/n^2)$, la série $\sum u^{-n}$ converge.

37. Application *(théorème de Stirling)*. Il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que
$$n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

38. Lemme. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère l'*intégrale de Wallis*
$$W_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x.$$
Alors pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on a
$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$
En particulier, lorsque $p \longrightarrow +\infty$, on a
$$\frac{1}{p}\left(\frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \longrightarrow \pi \qquad \text{et} \qquad C = \sqrt{2\pi}.$$

2.3. La comparaison série-intégrale

39. Théorème. Soient $a \in \mathbf{R}$ un réel et $f \colon [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n \geqslant a} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Dans ce cas, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire
$$\int_{n+1}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

40. Exemple. Grâce à la fonction $x \longmapsto 1/(1+x)$, la suite $(1 + \cdots + 1/n - \ln n)_{n \geqslant 1}$ converge vers une constante $\gamma > 0$, dite *d'Euler*, de telle sorte que
$$1 + \cdots + 1/n = \ln n + \gamma + o(1).$$

41. Proposition. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ deux réels. Alors la *série de Bertrand*
$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$
converge si et seulement si

– soit $\alpha > 1$;
– soit $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

42. Théorème. Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction positive et localement intégrable. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle positive tendant vers l'infini. Alors la série

$$\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

3. Le cas général

3.1. Les séries semi-convergentes et les séries alternées

43. Définition. Une série est *semi-convergente* si elle converge et elle ne converge pas absolument. Une série est *alternée* si elle est de la forme $\sum(-1)^n u_n$ pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de signe constant.

44. Théorème *(critère de Leibniz).* Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite positive, décroissante et tendant vers zéro. Alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge. De plus, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, son reste vérifie

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\Big| \leqslant u_{n+1}.$$

45. Exemple. Pour tout réel $\alpha > 0$, la série $\sum(-1)^{n-1}/n^\alpha$ converge et

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\Big| \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}, \qquad n \geqslant 1.$$

En particulier, la série $\sum(-1)^n/n$ est semi-convergente.

46. Définition. Une série $\sum u_n$ est *commutativement convergente* si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge.

47. Théorème. Une série absolument convergente est commutativement convergente et sa somme est inchangée quelque soit l'ordre des termes choisi.

48. Théorème *(Riemann).* Soient $\sum u_n$ une série semi-convergente et $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel. Alors il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers le réel λ.

3.2. La transformation d'Abel

49. Proposition *(transformation d'Abel).* Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général s'écrit sous la forme $u_n = \alpha_n v_n$ pour $n \in \mathbf{N}$. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n.$$

50. Théorème. En reprenant les mêmes notations, on suppose que
– la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive, décroissante et tend vers zéro ;
– la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$ est bornée.

Alors la série $\sum u_n$ converge.

51. Exemple. Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite positive, décroissante et tendant vers zéro et $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ un réel. Alors la série $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ converge.

3.3. Applications aux séries entières

52. Définition. Une *série entière* est une série $\sum f_n$ de fonctions de la forme

$$f_n(z) = a_n z^n, \qquad z \in \mathbf{C}$$

avec $a_n \in \mathbf{C}$.

53. Lemme *(Abel).* Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe et $z_0 \in \mathbf{C}$ un nombre complexe tels que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Pour tout nombre $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge.

54. Théorème. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors il existe un unique nombre réel ou l'infini $R \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que
– si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
– si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.

Le nombre R est le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$.

55. Remarque. En général, on ne peut rien dire sur le cercle. Par exemple

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

56. Théorème *(Abel angulaire).* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur le disque unité ouvert. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ un réel. On considère l'ensemble

$$\Delta := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \quad \text{et} \quad \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Alors lorsque $z \longrightarrow 1$ avec $z \in \Delta$, on a

$$f(z) \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

D2

57. Théorème *(taubérien faible).* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f sa somme sur le disque unité ouvert. On suppose que
– la fonction f admet une limite $S \in \mathbf{C}$ lorsque $x \in \mathbf{R}$ et $x \longrightarrow 1^-$;
– $a_n = o(1/n)$.

Alors la série $\sum a_n$ converge et sa somme est la limite S.

[1] Mohammed El Amrani. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions.* Ellipses, 2011.
[2] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.