Leçon 234. Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

1. Notation. Le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ sera noté $\mathbf{K}$. L'ensemble $\mathbf{R}^d$ pour un entier $d \geqslant 1$ est toujours muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$.

I. Intégration des fonctions mesurables

I.1. Fonctions mesurables et étagées

2. Définition. Une fonction $f\colon X \longrightarrow Y$ entre deux espaces mesurables $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ est *mesurable* si

$$\forall B \in \mathscr{B}, \qquad f^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

3. Exemple. Pour tout ensemble $A \in \mathscr{A}$, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A\colon X \longrightarrow \{0,1\}$ où l'ensemble d'arrivée $\{0,1\}$ est muni de la tribu discrète $\mathscr{P}(\{0,1\})$ est mesurable.

4. Théorème. Lorsque les espaces X et Y sont deux espaces métriques munis de leurs tribus boréliennes respectives, toute fonction continue $X \longrightarrow Y$ est mesurable.

5. Remarque. La somme et le produit de deux fonctions mesurables $X \longrightarrow \mathbf{K}$ est encore mesurable. Une limite simple de fonctions mesurables $X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ l'est encore.

6. Définition. Une fonction $f\colon X \longrightarrow \mathbf{K}$ est *étagée* si elle est mesurable et ne prend qu'une nombre fini de valeurs.

7. Remarque. Toute fonction étagée $f\colon X \longrightarrow \mathbf{K}$ est de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$$

pour des scalaires $\alpha_i \in \mathbf{K}$ et une partition $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathscr{A}$ de l'ensemble X. Cette écriture est unique lorsqu'on impose que les nombres α_i soient deux à deux distincts : on obtient l'écriture canonique

$$f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbf{1}_{\{f=\alpha\}}.$$

8. Exemple. Soit X un ensemble muni de sa tribu discrète. Une fonction $X \longrightarrow \mathbf{K}$ est étagée si et seulement si son image est finie.

9. Théorème. Soient $f\colon X \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers la fonction f, c'est-à-dire telle que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout élément $x \in X$. Si la fonction f est positive, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ peut être choisie croissante et les fonctions f_n positives.

I.2. Intégrale d'une fonction mesurable ou intégrable

10. Définition. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'*intégrale* d'une fonction étagée positive $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}_+$ par rapport à la mesure μ est la quantité

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

11. Exemple. Pour un ensemble $A \in A$, on peut écrire

$$\int_X \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

12. Définition. L'intégrale d'une fonction mesurable positive $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par rapport à la mesure μ est la quantité

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \sup \left\{ \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; \varphi\colon X \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\} \text{ mesurable, } \varphi \leqslant f \right\}.$$

13. Théorème *(Beppo Levi)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissantes de fonctions mesurables positives sur X. Alors sa limite simple f est mesurable positive et

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

14. Exemple. Pour tout réel $\alpha < 1$, on a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \,\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}.$$

15. Proposition. Soient $f, g\colon X \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ deux fonctions mesurables positives et $\lambda \geqslant 0$ un réel.

- Si $f \leqslant g$, alors $0 \leqslant \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;
- On a $\int_X (\lambda f + g) \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

16. Proposition. Soit $f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction mesurable positive. Alors

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

17. Corollaire. Soient $f, g\colon X \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ deux fonctions mesurables positives. Si $f = g$ presque partout, alors $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

18. Définition. Une fonction $f\colon X \longrightarrow \mathbf{K}$ est *intégrable* si

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Dans ce cas, lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on pose

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu$$

et, lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on pose

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_X \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + i \int_X \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu.$$

19. Exemple. Dans l'espace $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}))$ muni de la mesure de comptage m, une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}$ est intégrable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a

$$\int_{\mathbf{N}} u_n \,\mathrm{d}m(n) = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n.$$

20. Proposition. Soit $f\colon X \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction intégrable. Alors

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

I.3. Lien avec l'intégrale de Riemann

21. Théorème. Il existe une unique mesure $\lambda_d \colon \mathscr{B}(\mathbf{R}^d) \longrightarrow \mathbf{R}_+$ qui est invariante par translation et qui vérifie $\lambda_d([0,1]^d) = 1$.

22. Exemple. Pour un intervalle $[a,b] \subset \mathbf{R}$, sa mesure vaut $\lambda_1([a,b]) = b - a$.

23. Proposition. Soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction borélienne Riemann-intégrable. Alors elle est λ_1-intégrable et

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda_1.$$

II. Théorèmes généraux de la théorie de l'intégration

II.1. Lemme de Fatou et théorèmes de convergence dominée

24. Théorème *(lemme de Fatou)*. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

25. Application. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers une fonction f et vérifiant

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Alors la fonction f est intégrable.

26. Théorème *(de convergence dominée)*. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant les points suivants :

- pour presque tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f(x) \in \mathbf{K}$;
- il existe une fonction intégrable g telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour presque tout $x \in X$.

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

27. Application. Soit $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction dérivable de dérivée bornée. Alors

$$\int_0^1 f'(x) \, \mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$

II.2. Changements de variables

28. Théorème *(changement de variables)*. Soit $\varphi \colon U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbf{R}^d$. Soit $f \colon V \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction borélienne. Alors cette dernière est intégrable sur V si et seulement si la fonction $f \circ \varphi \times |\det \mathrm{J}_\varphi|$ est intégrable sur U. Dans ce cas, on a

$$\int_V f(y) \, \mathrm{d}y = \int_U f(\varphi(x)) \, |\det \mathrm{J}_\varphi(x)| \, \mathrm{d}x.$$

29. Exemple *(coordonnées polaires)*. On considère le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

$$\varphi \colon \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right[& \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_- \times \{0\}), \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r \cos\theta, r \sin\theta). \end{array} \right.$$

Pour toute fonction intégrable $f \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{K}$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \times r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

30. Application. L'intégrale de Gauss vaut

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

II.3. Applications aux séries et aux intégrales à paramètre

31. Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables.

- Si elles sont positives, alors

$$\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu. \qquad (*)$$

- Si la série $\sum \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu$ converge, alors on a aussi $(*)$.

32. Application *(lemme de Borel-Cantelli)*. Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'ensembles mesurables. Si la série $\sum \mu(A_n)$ converge, alors

$$\mu(\limsup_{n \to +\infty} A_n) = 0.$$

33. Corollaire. Soient $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{N}^2}$ une suite scalaire. Alors

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}| < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}.$$

34. Théorème. Soient X un espace métrique et $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesurable. Soit $f \colon X \times E \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction vérifiant les points suivants :

- pour tout $x \in X$, la fonction $f(x, \cdot)$ est mesurable ;
- pour presque tout $t \in E$, la fonction $f(\cdot, t)$ est continue sur X ;
- il existe une fonction intégrable $g \colon E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $t \in E$, on ait

$$|f(x,t)| \leqslant g(t) \qquad \text{pour presque tout } x \in X.$$

Alors la fonction

$$x \in X \longmapsto \int_E f(x,t) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

est continue sur X.

35. Remarque. Il existe une version analogue pour les régularités $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^\infty$.

36. Exemple. La *fonction gamma d'Euler*

$$\Gamma \colon x > 0 \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

37. Application. Soient $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction intégrable telle que la fonc-

tion $x \longmapsto xf(x)$ le soit aussi. Alors la *transformée de Fourier* de la fonction f
$$\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{2i\pi\xi x}\, \mathrm{d}x$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

III. Les espaces de Lebesgue

III.1. Définitions et premières propriétés

38. Définition. Soient $p > 0$ un réel et $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que
$$\|f\|_p := \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$
Le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \longrightarrow \mathbf{K}$ qui sont bornées presque partout. Pour une fonction $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$, on notera
$$\|f\|_\infty := \inf\{M \geqslant 0 \mid |f| \leqslant M \text{ presque partout}\}.$$
39. Exemple. Lorsque l'espace $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}))$ est muni de la mesure de comptage m, on retrouve l'espace
$$\mathscr{L}^p(m) = \ell^p(\mathbf{N}) := \Big\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \;\Big|\; \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty\Big\}.$$
40. Proposition. Soient $p, q > 0$ deux réels vérifiant $p \leqslant q$.
 – Si la mesure X est finie, alors $\mathscr{L}^q(\mu) \subset \mathscr{L}^p(\mu)$.
 – On a $\ell^p(\mathbf{N}) \subset \ell^q(\mathbf{N})$.

41. Remarque. Dans le cas d'une mesure μ qui n'est pas nécessairement finie, on ne peut déduire aucune inclusion puisque
$$1/\sqrt{\cdot} \in \mathscr{L}^1(]0,1[) \setminus \mathscr{L}^2(]0,1[) \qquad \text{et} \qquad 1/\sqrt{\cdot^2 + 1} \in \mathscr{L}^2(]0,1[) \setminus \mathscr{L}^1(]0,1[).$$
42. Définition. Soit $p \geqslant 1$ un réel ou l'infini. Pour deux fonctions $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, on écrit $f \sim g$ lorsqu'elles sont égales μ-presque partout. L'espace vectoriel quotient $\mathrm{L}^p(\mu) := \mathscr{L}^p(\mu)/\!\sim$ est l'*espace de Lebesgue* d'ordre p.
43. Notation. On notera simplement $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d) := \mathrm{L}^p(\lambda_d)$.

III.2. Des espaces complets

44. Théorème *(inégalité de Hölder)*. Soient $p, q > 1$ deux réels vérifiant $1/p + 1/q = 1$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mu)$ deux fonctions. Alors la fonction fg est intégrable et
$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$
De plus, il y a égalité si et seulement s'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha f^p = \beta g^q$ presque partout.
45. Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, on trouve
$$\left|\int_X fg \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$
46. Théorème *(inégalité de Minkowski)*. Soient $p \geqslant 1$ un réel et $f, g \in \mathrm{L}^p(\mu)$. Alors
$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$
En particulier, l'espace $(\mathrm{L}^p(\mu), \|\ \|_p)$ est un espace vectoriel normé.
47. Théorème. Soit $p \geqslant 1$ un réel.
 – L'espace vectoriel normé $\mathrm{L}^p(\mu)$ est complet.
 – De toute suite convergente dans $\mathrm{L}^p(\mu)$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.

III.3. Des résultats de densité

48. Proposition. Pour tout réel $p \geqslant 1$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $\mathrm{L}^p(\mu)$.
49. Définition. Une fonction $f : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ est *en escalier* si elle est de la forme
$$f = \sum_{i=1}^k \alpha_k \mathbf{1}_{P_k}$$
pour des scalaires $\alpha_k \in \mathbf{K}$ et des pavés $P_k \subset \mathbf{R}^d$.
50. Théorème. Soit $p \geqslant 1$ un réel. L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$. L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.
51. Définition. Le *produit de convolution* de fonctions boréliennes $f, g : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ est, lorsqu'elle est bien définie, la fonction $f \star g : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que
$$f \star g(x) := \int_{\mathbf{R}^d} f(x - y) g(y)\, \mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbf{R}^d.$$
52. Proposition. Soient $f, g : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{K}$ deux fonctions. Alors
 – si $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, alors $f \star g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ et $\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$;
 – Si $f \in \mathscr{C}^k(\mathbf{R}^d)$ et la fonction $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ est à support compact, alors la fonction $f \star g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et
$$\partial^\alpha(f \star g) = (\partial^\alpha f) \star g, \qquad a \in \mathbf{N}^n,\ |\alpha| \leqslant k.$$
53. Définition. Une *approximation de l'unité* est une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ vérifiant les points suivants :
 – les fonctions α_n sont positives et de masse 1 ;
 – pour tout réel $\varepsilon > 1$, on a
$$\int_{\|x\| \geqslant \varepsilon} \alpha_n(x)\, \mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$
54. Théorème. Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une approximation de l'unité et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$. Alors la suite $(f * \alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constituée d'éléments de $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ et elle converge dans L^p vers la fonction f.
55. Proposition. Pour tout $p \geqslant 1$, l'espace $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.
56. Lemme *(Riemann-Lebesgue)*. Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1([a, b])$, on a
$$\int_a^b f(t) e^{int}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0.$$

III.4. Le cas des fonctions de carré intégrable

57. Définition. Le produit scalaire
$$(f, g) \in \mathrm{L}^2(\mu)^2 \longrightarrow \int_X f\overline{g}\, \mathrm{d}\mu$$

fait de l'ensemble $\mathrm{L}^2(\mu)$ un espace de Hilbert.

58. DÉFINITION. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une *fonction poids* sur I est une fonction mesurable $\rho\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

L'ensemble $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\rho\,\mathrm{d}x$ est muni du produit scalaire définit par l'égalité $\langle f, g\rangle = \int_I f\overline{g}\rho$.

59. REMARQUE. Grâce au procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe une unique famille étagée orthogonale de polynômes unitaires, les *polynômes orthogonaux*.

D2

60. THÉORÈME. Soient $\rho\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction poids et $\alpha > 0$ un réel vérifiant

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.

[1] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.

[2] Marc BRIANE et Gilles PAGÈS. *Théorie de l'intégration.* Vuibert, 2012.