Leçon 235. Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

1. Limites, suites et intégrales : premières interversions

1.1. Convergence uniforme et interversions

1. Définition. Soient X un ensemble et E un espace vectoriel normé. On dit d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions $X \longrightarrow E$ qu'elle converge vers une fonction $f\colon X \longrightarrow E$ sur l'ensemble X de manière

- *simple* si $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout élément $x \in X$;
- *uniformément* si $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| \longrightarrow 0$.

2. Remarque. La convergence uniforme implique la convergence simple.

3. Contre-exemple. La réciproque est très fausse : la suite donnée par les fonctions $x \longmapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $\mathbf{1}_{\{1\}}$, mais elle n'y converge uniformément sur $[0,1]$.

4. Théorème. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues $E \longrightarrow F$ qui converge uniformément sur E. Alors la limite uniforme est continue sur E.

5. Contre-exemple. La convergence simple ne suffit pas : le contre-exemple précédent convient.

6. Théorème. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continue $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f. Alors

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. Contre-exemple. La convergence simple ne suffit pas : la suite formée des fonctions $f_n\colon x \in [0,1] \longmapsto n^2 x e^{-nx}$ converge simplement vers la fonction nulle et

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = n^2\left(\left[-\frac{xe^{-nx}}{n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n}\,\mathrm{d}x\right) = -ne^{-n} - e^{-n} + 1 \longrightarrow 1.$$

8. Corollaire. On suppose que les fonctions f_n sont dérivables sur $[a,b]$ et qu'on dispose les convergences uniformes $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ sur $[a,b]$. Alors la fonction f est dérivable et $f' = g$.

9. Remarque. Ce résultat se généralise pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ ou $\mathscr{C}^\infty$.

1.2. Problèmes sur les séries de fonctions

10. Définition. Une série $\sum f_n$ de fonctions $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ converge

- simplement si la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout réel $x \in [a,b]$;
- uniformément si la suite $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$;
- *normalement* si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

11. Remarque. La convergence normalement implique la converge uniforme.

12. Exemple. La réciproque est fausse : la série $\sum(-1)^n x e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0,1]$, mais elle ne converge pas normalement.

13. Théorème. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continue $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui converge uniformément. Alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

14. Exemple. Le théorème permet de montrer l'égalité

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

15. Théorème. Soit $\sum f_n$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$ qui converge normalement sur $[a,b]$. On suppose que les séries $\sum f_n^{(j)}$ avec $j \leqslant k$ convergent normalement sur $[a,b]$. Alors la somme $f \coloneqq \sum_{k=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$ pour tout entier $j \leqslant k$.

16. Application. La fonction exponentielle

$$\exp\colon x \in \mathbf{R} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1.3. Le cas des séries entières

17. Définition. Une *série entière* est une série $\sum f_n$ de fonctions $f_n\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ de la forme $f_n(z) = a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ et un complexe $a_n \in \mathbf{C}$. On la note $\sum a_n z^n$.

18. Proposition *(lemme d'Abel)*. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe. On suppose que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée pour un réel $r > 0$. Alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\overline{\mathbf{D}}(0,s) \subset \mathbf{C}$ avec $s < r$.

19. Définition. Le *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le réel

$$R \coloneqq \sup\{r \geqslant 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

20. Corollaire. Sous les mêmes notations, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque $\mathbf{D}(0,R)$

21. Exemple. La fonction $z \in \mathbf{C} \longmapsto e^z \in \mathbf{C}$ est la somme de la série entière $\sum z^n/n!$ qui est de rayon de convergence infini. De même, la fonction $z \in \mathbf{D}(0,1) \longmapsto 1/(1-z)$ est la somme de la série entière $\sum z^n$ qui est de rayon de converge 1.

22. Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme f est infiniment $\mathbf{C}$-dérivable sur le disque ouvert $\mathbf{D}(0,R)$.

23. Exemple. L'exponentielle prolongée sur le plan complexe $\mathbf{C}$ est holomorphe.

2. Théorème de la théorie de la mesure : limites et intégrales

24. Notation. On considère un espace mesure $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

2.1. Suites de fonctions et intégration

25. Théorème *(lemme de Fatou)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors
$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

26. Application. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers une fonction f et vérifiant
$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$
Alors la fonction f est intégrable.

27. Théorème *(de convergence dominée)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant les points suivants :

- pour presque tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x) \in \mathbf{K}$;
- il existe une fonction intégrable g telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour presque tout $x \in X$.

Alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

28. Contre-exemple. L'hypothèse de domination est nécessaire comme le montre le contre-exemple 7.

29. Application. Soit $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction dérivable de dérivée bornée. Alors
$$\int_0^1 f'(x) \,\mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$

2.2. Les intégrales à paramètres

30. Théorème. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables.

- Si elles sont positives, alors
$$\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu. \qquad (*)$$
- Si la série $\sum \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu$ converge, alors on a aussi $(*)$.

31. Application *(lemme de Borel-Cantelli)*. Soit $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'ensembles mesurables. Si la série $\sum \mu(A_n)$ converge, alors
$$\mu(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0.$$

32. Théorème. Soient X un espace métrique et $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesurable. Soit $f \colon X \times E \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction vérifiant les points suivants :

- pour tout $x \in X$, la fonction $f(x, \cdot)$ est mesurable ;
- pour presque tout $t \in E$, la fonction $f(\cdot, t)$ est continue sur X ;
- il existe une fonction intégrable $g \colon E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $t \in E$, on ait
$$|f(x,t)| \leqslant g(t) \qquad \text{pour presque tout } x \in X.$$

Alors la fonction
$$x \in X \longmapsto \int_E f(x,t) \,\mathrm{d}\mu(t)$$
est continue sur X.

33. Corollaire. Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle ouvert et $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesurable. Soit $f \colon I \times E \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction vérifiant les points suivants :

- pour tout $x \in I$, la fonction $f(x, \cdot)$ est mesurable ;
- pour presque tout $t \in E$, la fonction $f(\cdot, t)$ est dérivable sur I ;
- il existe une fonction intégrable $g \colon E \longrightarrow \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $t \in E$, on ait
$$|\partial_x f(x,t)| \leqslant g(t) \qquad \text{pour presque tout } x \in I.$$

Alors la fonction
$$F \colon x \in I \longmapsto \int_E f(x,t) \,\mathrm{d}\mu(t)$$
est dérivable sur I et
$$F'(x) = \int_E \partial_x f(x,t) \,\mathrm{d}\mu(t), \qquad x \in I.$$

34. Exemple. La *fonction gamma d'Euler*
$$\Gamma \colon x > 0 \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$$
est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

35. Remarque. Un énoncé analogue existe pour les régularités $\mathscr{C}^k$ et l'holomorphie.

36. Exemple. La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{\mathrm{Re} > 0\}$.

37. Théorème. La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$ qui n'admet que des pôles simples en les entiers négatifs. Par ailleurs, son inverse $1/\Gamma$ soit entière.

— D1 —

2.3. Interversion d'intégrales

38. Théorème *(Fubini-Tonelli)*. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. Soit $f \colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction mesurable. Alors

- les fonction $x \in X \longmapsto \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \in Y \longmapsto \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables ;
- on a
$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\nu(y).$$

39. Corollaire *(Fubini-Lebesgue)*. La même conclusion est vérifiée si les fonctions partielles sont presque partout intégrables.

40. Application. On calcul
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

41. Théorème. Soit $(u_{n,m})_{n,m\in\mathbf{N}}$ une famille réelles ou complexe telle que la quan-

tité $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}|u_{n,m}|$ soit finie. Alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}.$$

3. Application à l'analyse de Fourier

3.1. Transformée de Fourier

42. Définition. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ est la fonction
$$\hat{f}=\mathscr{F}(f)\colon \left|\begin{array}{l}\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \xi \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{array}\right.$$
43. Exemple. Soit $a>0$. La transformée de la fonction $g\colon x \in \mathbf{R} \longmapsto e^{-a|x|^2}$ s'écrit
$$\hat{g}(\xi)=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\xi|/4a}.$$
44. Proposition. Soient $f,g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ et $\xi \in \mathbf{R}^n$. Alors
$$\widehat{f\star g}(\xi)=\hat{f}(xi)\hat{g}(\xi).$$
45. Théorème. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Alors la fonction $\hat{f}$ est continue, tend vers 0 en l'infini et vérifie $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.
46. Exemple. Pour $a>1$, la transformée de la fonction triangle $\mathbf{1}_{[-a,a]}\star\mathbf{1}_{[-a,a]}$ est la fonction
$$\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \left(\frac{2\sin a\xi}{\xi}\right)^2.$$
47. Théorème. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{N}$. Si la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^k f(x)$ est intégrable, alors la fonction $\hat{f}$ est k-fois dérivable. Réciproquement, si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ et sa dérivée k-ième est intégrable, alors
$$\mathscr{F}(f^{(k)})(\xi)=(i\xi)^k\hat{f}(\xi) \quad \text{et} \quad \xi^k\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0.$$
48. Théorème *(formule d'inversion de Fourier)*. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Pour presque tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a
$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathscr{F}}\hat{f}(x) \quad \text{avec} \quad \overline{\mathscr{F}}\hat{f}(x):=\int_{\mathbf{R}^n} e^{\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

3.2. Série de Fourier

49. Définition. Les *coefficients de Fourier* d'une fonction continue 2π-périodique $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ sont les quantités $c_n(f)$ avec $n \in \mathbf{N}$ définies par les relations
$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$
50. Théorème *(lemme de Riemann-Lebesgue)*. Pour toute fonction continue 2π-périodique f, on a $c_n(f)\longrightarrow 0$.
51. Proposition. Soient $f,g\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions continues 2π-périodiques et $\lambda \in \mathbf{C}$ un complexe. Alors
$$c_n(f+\lambda g)=c_n(f)+\lambda c_n(g) \qquad \text{et} \qquad c_n(f\star g)=c_n(f)c_n(g).$$
52. Théorème *(Fejér)*. Les deux points suivants constituent le théorème.
- Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \|\sigma_N(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$
et
$$\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \longrightarrow 0.$$
- Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{T})$, alors on la même conclusion avec la norme p.

53. Corollaire *(égalité de Parseval)*. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Alors
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n(f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|.$$
54. Application. En utilisant la fonction f définie par l'égalité $f(x)=1-x^2/\pi^2$ sur $[-\pi,\pi]$, on trouve $\zeta(2)=\pi^2/6$ et $\zeta(4)=\pi^4/90$.
55. Proposition. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série $(S_N(f))_{N\in\mathbf{N}}$ converge normalement vers la fonction f.
56. Théorème. Soient $F \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})\cap\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ une fonction intégrable et continue. On suppose qu'il existe deux constantes $M>0$ et $\alpha>1$ telles que
$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |F(x)| \leqslant M(1+|x|)^{-\alpha} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{F}(n)|<+\infty.$$
Alors
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{F}(n).$$
57. Application. Pour tout $t>0$, on a
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}e^{-\pi n^2/t}=\sqrt{t}\sum_{n\in\mathbf{Z}}e^{-\pi n^2 t}.$$
58. Définition. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'*équation de la chaleur* est le problème de Cauchy
$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=\partial_{xx}u(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t>0, \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t)=f(x) & x \in \mathbf{R}.\end{cases} \tag{1}$$
59. Proposition. On suppose que la fonction f est 1-périodique et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe une unique solution $u\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ au problème (1) qui est 1-périodique par rapport à la variable d'espace. — D2 —

[1] Marc Briane et Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuibert, 2012.
[2] Bernard Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini, 2009.
[3] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.