Leçon 239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

1. Notation. Soient X un espace métrique et $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On prend une fonction $f\colon X \times E \longrightarrow \mathbf{C}$. Pour un élément $x \in X$, on considérera la quantité
$$F(x) \coloneqq \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$
lorsqu'elle est bien définie, c'est une *intégrale à paramètre.*

1. Régularité des intégrales à paramètre

1.1. Continuité

2. Théorème. On suppose que
(i) pour tout $x \in X$, la fonction $f(x,\cdot)$ est mesurable ;
(ii) pour presque tout $t \in E$, la fonction $f(\cdot,t)$ est continue en un point $x_0 \in E$;
(iii) il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{L}^1(E)$ telle que, pour presque tout $t \in E$, on ait
$$\forall x \in X, \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$
Alors la fonction $F\colon E \longrightarrow \mathbf{C}$ est continue au point x_0.

3. Remarque. On peut remplacer le troisième point, appelée *hypothèse de domination* par l'assertion suivante :
(iii′) pour tout compact $K \subset X$, il existe une fonction $\varphi_K \in \mathrm{L}^1(E)$ telle que, pour presque tout $t \in E$, on ait
$$\forall x \in K, \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t).$$
En particulier, lorsque $E = \mathbf{R}$, on peut se limiter aux compacts de la forme $K = [a,b]$. Cette remarque s'appliquera aux « théorèmes de convergence dominée » qui vont suivre.

4. Application. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. Pour tout réel $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, la fonction
$$x \in \mathbf{R} \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
est continue sur $\mathbf{R}$.

5. Exemple. La fonction
$$t \in \mathbf{R} \longmapsto \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$
est continue sur $\mathbf{R}$. La *fonction gamma d'Euler*
$$\Gamma\colon \left|\begin{array}{l} \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \quad x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$
est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

6. Contre-exemple. L'hypothèse de domination est essentielle : la fonction
$$x \in \mathbf{R} \longmapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
n'est pas continue en 0.

1.2. Encore plus de régularité

7. Théorème. On suppose que l'ensemble X est un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$ et que
(i) pour tout $x \in I$, la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable ;
(ii) pour presque tout $t \in E$, la fonction $f(\cdot,t)$ est dérivable sur l'intervalle I de dérivée $\partial_x f(\cdot,t)$;
(iii) il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{L}^1(E)$ telle que, pour presque tout $t \in E$, on ait
$$\forall x \in X, \qquad |\partial_x f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$
Alors
– pour tout $x \in I$, la fonction $\partial_x f(\cdot,t)$ est intégrable ;
– la fonction F est dérivable sur I et elle vérifie
$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = \int_E \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

8. Contre-exemple. L'hypothèse (iii) est encore indispensable : la fonction
$$x \in \mathbf{R} \longmapsto \int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|t}\,\mathrm{d}t$$
n'est pas dérivable en 0.

9. Corollaire. Soit $k \in \mathbf{N}$. On suppose que
(i) pour tout $x \in I$, la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable ;
(ii) pour presque tout $t \in E$, la fonction $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle I de dérivée $\partial_x^k f(\cdot,t)$;
(iii) pour tout entier $j \in [\![1,k]\!]$, il existe une fonction $\varphi_j \in \mathrm{L}^1(E)$ telle que, pour presque tout $t \in E$, on ait
$$\forall x \in X, \qquad |\partial_x^i f(x,t)| \leqslant \varphi_j(t).$$
Alors
– pour tout $x \in I$ et tout $i \in [\![1,k]\!]$, la fonction $\partial_x^i f(\cdot,t)$ est intégrable ;
– la fonction F est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et elle vérifie
$$\forall x \in I,\ \forall i \in [\![0,k]\!] \qquad F^{(i)}(x) = \int_E \partial_x^i f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

10. Exemple. La fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et elle vérifie
$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^n\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbf{N},\ t > 0.$$

1.3. Holomorphie

11. Théorème. On suppose que l'ensemble X est un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ et que
(i) pour tout $z \in \Omega$, la fonction $f(z,\cdot)$ est intégrable ;
(ii) pour presque tout $t \in E$, la fonction $f(\cdot,t)$ est holomorphe sur Ω ;
(iii) il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{L}^1(E)$ telle que, pour presque tout $t \in E$, on ait
$$\forall z \in \Omega, \qquad |f(z,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $F \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe sur Ω et

$$\forall z \in \Omega, \qquad F'(z) = \int_E \partial_z f(z,t)\,\mathrm{d}t.$$

12. Exemple. La *fonction zêta de Riemann*

$$\zeta \colon \left| \begin{array}{l} \{\mathrm{Re} > 1\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \displaystyle s \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \end{array} \right.$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{\mathrm{Re} > 0\} \setminus \{1\}$ en posant

$$\zeta(s) = \lim_{N \to +\infty} \Big(\sum_{n=1}^{N} n^{-s} + \frac{N^{1-s}}{1-s} \Big).$$

D1 13. Théorème. La fonction $\Gamma \colon \{\mathrm{Re} > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$ et elle vérifie

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Par ailleurs, elle ne possède pas de zéro et la fonction $1/\Gamma$ est holomorphe sur tout le plan $\mathbf{C}$.

2. Produit de convolution et régularisation

2.1. Le produit de convolution

14. Définition. Pour deux fonctions $f, g \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$, lorsqu'elle est bien définie, la quantité

$$f \star g(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

fournit une fonction $f \star g \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$, appelée le *produit de convolution* ou la *fonction convolée* des fonctions f et g.

15. Remarque. Cette définition a un sens lorsqu'on est dans un des cas suivants :
- si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$, alors $f \star g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$;
- si $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$, alors $f \star g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)$;
- si f est bornée sur tout compact et g est à support compact, alors $f \star g$ existe.

16. Exemple. La convolée $\mathbf{1}_{[-1,1]} \star \mathbf{1}_{[-1,1]}$ est une fonction triangle.

17. Théorème. Soient $p \geqslant 1$ un réel ou l'infini, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$. Alors la convolée $f \star g$ est bien définie, elle appartient à $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ et

$$\|f \star g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p.$$

18. Proposition. Lorsqu'il est bien défini, le produit de convolution est commutatif.

19. Théorème. Soient $f \in \mathscr{C}^k(\mathbf{R}^n)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ une fonction à support compact. Alors la convolée $f \star g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et

$$\partial^\alpha (f \star g) = (\partial^\alpha f) \star g, \qquad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n,\ |\alpha| \leqslant k.$$

20. Définition. Soit $f \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Notons $\mathscr{O} \subset \mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des ouverts $\omega \subset \mathbf{R}^n$ sur lesquelles la fonction f est nulle presque partout. La fonction f est nulle presque partout sur l'ouvert

$$\Omega := \bigcup_{\omega \in \mathscr{O}} \omega.$$

Son *support* est l'ensemble $\operatorname{supp} f := \mathbf{R}^n \setminus \Omega$.

21. Proposition. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$.
- Alors $\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.
- Si les fonctions f et g sont à support compact, alors la convolée $f \star g$ l'est aussi.

22. Théorème. Soient $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^n)$ et $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Alors la convolée $f \star g$ est continue.

2.2. Identité approchée

23. Définition. Une *identité approchée* est une suite $(\rho_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ vérifiant les points suivants :
- les fonction ρ_k sont presque partout positives ;
- elles sont de masse une ;
- pour tout réel $\eta > 0$, on a

$$\int_{\|x\| > \eta} \rho_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

24. Exemple. On considère la fonction $\rho \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp[(\|x\|^2 - 1)^{-1}] & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\rho_k(x) = C k^n \rho(kx) \quad \text{avec} \quad C := \Big(\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\,\mathrm{d}x \Big)^{-1}$$

est une identité approchée.

25. Proposition. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}^n)$. Alors la suite $(\rho_k \star f)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^n$.

26. Proposition. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$. Alors

$$\|\rho_k \star f - f\|_p \longrightarrow 0.$$

27. Corollaire. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. Alors l'espace $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

3. Transformation de Fourier et application

3.1. La transformée de Fourier

28. Définition. La *transformée de Fourier* d'une fonction intégrable $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ est la fonction $\hat{f} \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle \xi, x \rangle} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

29. Exemple. Soit $a > 0$. La transformée de Fourier de l'indicatrice $\mathbf{1}_{[-a,a]}$ est

$$\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

La transformée de Fourier de la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto e^{-a|x|^2}$ est

$$\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\xi|/4a}.$$

30. Théorème. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Alors la fonction $\hat{f}$ est continue et elle tend vers zéro en l'infini.
31. Proposition. Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Alors $\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.
32. Définition. Une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ est de Schwartz si toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, c'est-à-dire que leur produit par tout polynôme est borné. On note $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de Schwartz sur $\mathbf{R}^n$.
33. Théorème. La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ est à valeurs dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.
34. Théorème *(Plancherel)*. Il existe une application $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ satisfaisant les points suivants :
- lorsque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, la fonction $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de la fonction f ;
- pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, on a $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$;
- l'application $\hat{\cdot}$ est un isomorphisme ;
- pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, en notant

$$\phi_A(\xi) := \int_{|x| \leqslant A} f(x) e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \psi_A(\xi) := \int_{|x| \leqslant A} \hat{f}(x) e^{-ix\xi} \,\mathrm{d}x$$

avec $A > 0$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\|\phi_A - f\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \|\psi_A - \hat{f}\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0.$$

3.2. Formule d'inversion de Fourier et une application

35. Théorème. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Alors pour presque tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \,\mathrm{d}\xi.$$

36. Exemple. La fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ est la fonction $\xi \in \mathbf{R} \longmapsto e^{-a|\xi|}$.
37. Corollaire. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\hat{f} = 0$ sur $\mathbf{R}^n$. Alors $f = 0$ presque partout.
38. Définition. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une *fonction poids* sur I est une fonction mesurable $\rho\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_I |x|^n \rho(x) \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

L'ensemble $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\rho \,\mathrm{d}x$ est muni du produit scalaire définit par l'égalité $\langle f, g \rangle = \int_I f\overline{g}\rho$.
39. Remarque. Grâce au procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$, il existe une unique famille étagée orthogonale de polynômes unitaires, les *polynômes orthogonaux*.
40. Théorème. Soient $\rho\colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction poids et $\alpha > 0$ un réel vérifiant

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.

3.3. Deux applications : la formule sommatoire de Poisson et la résolution de l'équation de la chaleur

41. Théorème. Soient $F \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ une fonction intégrable et continue. On suppose qu'il existe deux constantes $M > 0$ et $\alpha > 1$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |F(x)| \leqslant M(1 + |x|)^{-\alpha}$$

et que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty.$$

Alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n).$$

42. Application. Pour tout $t > 0$, on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

43. Remarque. La fonction $t \longmapsto \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t}$ joue un rôle dans la résolution de l'équation de la chaleur (1) et elle est reliée à la fonction thêta de Jacobi.
44. Définition. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'*équation de la chaleur* est le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x) & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

45. Proposition. On suppose que la fonction f est bornée et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe une solution $u\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ au problème (1).
46. Remarque. Il n'y pas unicité de la solution car la fonction v définie par l'égalité

$$v(x,t) = \begin{cases} xt^{-3/2} e^{-x^2/4t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est solution de l'équation (1) avec $f = 0$ et n'est pas nulle.