Leçon 241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

I. Modes de convergence d'une suite de fonctions

I.1. Les différents modes de convergence

1. Définition. Soient X un ensemble et E un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de suite de fonctions $f_n \colon X \longrightarrow E$. Soit $f \colon X \longrightarrow E$ une fonction.
   – La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement* sur X vers la fonction f si
   $$\forall x \in X, \qquad f_n(x) \longrightarrow f(x).$$
   – La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge uniformément* sur X vers la fonction f si
   $$\|f - f_n\|_\infty \longrightarrow 0.$$

2. Exemple. La suite formée des fonctions $f_n \colon x \in [0,1[\longmapsto x^n \in \mathbf{R}$ avec $n \in \mathbf{N}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$.

3. Théorème. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

4. Contre-exemple. La réciproque est malheureusement fausse. Dans l'exemple précédent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

5. Proposition *(critère de Cauchy)*. On suppose que l'espace E est complet. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur X si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que
$$\forall p, q \geqslant N, \qquad \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon.$$

6. Théorème *(Dini)*. Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f
   – ou bien si la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante ;
   – ou bien si les fonctions f_n sont croissantes.

D1

7. Théorème *(Bernstein)*. Soit $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. On introduit son module de continuité
$$\omega \colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \quad h \longmapsto \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in [0,1],\ |u - v| \leqslant h\}. \end{array} \right.$$
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le polynôme
$$B_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(k/n) \in \mathbf{C}[x].$$
Alors
   (i) la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$;
   (ii) plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\forall n \geqslant 1, \qquad \|f - B_n\|_\infty \leqslant C\omega(1/\sqrt{n}).$$

I.2. Régularité des limites

8. Théorème. Soit F un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues $E \longrightarrow F$ qui converge uniformément vers une fonction $f \colon E \longrightarrow F$. Alors cette dernière est continue.

9. Exemple. La fonction $\zeta \colon s \in \{\mathrm{Re} > 1\} \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \in \mathbf{C}$ est continue.

10. Théorème *(Cauchy-Lipschitz)*. Soient $a, b > 0$ et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Posons
$$Q \coloneqq \{(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \mid |t - t_0| \leqslant a,\ \|x - x_0\| \leqslant b\}.$$
Soit $F \colon Q \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction continue et lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Posons $T \coloneqq \min(a, b/M)$ avec $M \coloneqq \sup_Q \|F\|$. Alors les fonctions
$$x_k \colon t \in [t_0 - T, t_0 + T] \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s))\,\mathrm{d}s, \qquad k \geqslant 1$$
converge uniformément vers une fonction $x \colon [t_0 - T, t_0 + T] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ qui est solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} x' = F(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
et qui vérifie
$$\forall s \in J, \quad (s, x(s)) \in Q.$$
De plus, une telle fonction x est unique.

11. Théorème. Soient E un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues $[a,b] \longrightarrow E$ qui converge uniformément vers une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow E$. Alors
$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

12. Théorème *(dérivabilité de la limite)*. Soient E un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $[a,b] \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que
   – il existe un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbf{N}}$ converge ;
   – la suite $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction $g \colon [a,b] \longrightarrow E$.

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément et sa limite $f \colon [a,b] \longrightarrow E$ vérifie $f' = g$.

13. Contre-exemple. La suite constituée des fonctions $x \in [-1,1] \longrightarrow \sqrt{x^2 + 1/n}$ converge uniformément vers la fonction $x \longmapsto |x|$ qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

14. Remarque. Un énoncé équivalent se montre lorsque les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^p$.

I.3. Intégrabilité des limites et interversion des signes limite et intégrale

15. Théorème *(Beppo Levi)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissantes de fonctions mesurables positives d'un espace mesure $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction mesurable $f \colon X \longrightarrow \mathbf{K}$ et cette dernière vérifie
$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

16. Théorème *(de convergence dominée)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de l'espace $\mathrm{L}^1(X, \mathbf{K})$ vérifiant les points suivants :
   – pour μ-presque tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge ;
   – il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^1(X, \overline{\mathbf{R}}_+)$ telle que, pour μ-presque tout $x \in X$, on a
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |f_n(x)| \leqslant g(x).$$

Alors pour μ-presque tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$ et

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

17. Application. Pour tout réel $\alpha > 1$, on a

$$\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{1}{\alpha-1}.$$

I.4. Convergence dans les espaces de Lebesgue

18. Définition. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesurable et $p \in \mathbf{R}_+^* \cup \{\infty\}$ un réel ou l'infini. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathrm{L}^p(X)$ converge dans L^p vers une fonction $f \in \mathrm{L}^p(X)$ si

$$\|f - f_n\|_p \longrightarrow 0.$$

19. Théorème *(loi forte des grands nombres)*. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable et indépendantes. Alors la suite $((X_1+\cdots+X_n)_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la constante $\mathbf{E}[X_1]$ dans L^2.

20. Définition. Pour une fonction 2π-périodique $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ et un entier $n \in \mathbf{N}$, on définit son n-ième coefficient de Fourier

$$c_n(f) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

Pour un entier $N \in \mathbf{N}^*$, on définit

$$S_N(f) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\cdot} \qquad \text{et} \qquad \sigma_N(f) \coloneqq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f).$$

21. Théorème *(Fejér)*. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors la suite $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la fonction f dans L^∞. Lorsque $f \in \mathrm{L}^p([0,2\pi])$, la convergence est dans L^p

II. Séries de fonctions

II.1. Modes de convergence

22. Définition. Soient E un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions bornées $X \longrightarrow E$. La série $\sum f_n$ converge

- *absolument* si, pour tout élément $x \in X$, la série $\sum \|f_n(x)\|$ converge ;
- *normalement* si la série $\sum \|f_n\|_\infty$.

23. Exemple. La série $\sum f_n$ constituées des fonctions $f_n\colon x \in [0,1] \longmapsto x^n/n^2 \in \mathbf{R}$ converge normalement.

24. Proposition. La convergence normale implique la converge absolue.

25. Théorème. Lorsque l'espace E est de Banach, la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

26. Contre-exemple. La réciproque est fausse puisque la série $\sum u_n$ avec

$$u_n\colon x \in \mathbf{R}_+ \longmapsto (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$$

converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$ mais pas normalement.

II.2. Théorème de régularité

27. Théorème. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ qui converge normalement. Alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

28. Théorème *(dérivabilité de la limite)*. Soient E un espace de Banach et $\sum f_n$ une suite de fonctions $[a,b] \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que

- il existe un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge ;
- la suite $\sum f_n'$ converge normalement.

Alors la fonction $g \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable de dérivée $g' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

29. Exemple. Soient A un algèbre normée complète et $u \in A$ un élément. Alors la fonction $t \in \mathbf{R} \longmapsto \exp(tu)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

II.3. Les séries entières

30. Définition. Une *série entière* est une série de fonctions $f_n\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ de la forme

$$f_n(z) = a_n z^n, \qquad z \in \mathbf{C}$$

pour un complexe $a_n \in \mathbf{C}$. On la note simplement $\sum a_n z^n$.

31. Théorème *(lemme d'Abel)*. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z \in \mathbf{C}$ un complexe. On suppose que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors

- pour tout complexe $z \in \mathbf{C}$ avec $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- pour tout réel $r \in \,]0, |z_0|[$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant r\}$.

32. Définition. Le *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le réel

$$\sup\{r \geqslant 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

33. Exemple. Les séries entières $\sum z^n/n!$ et $\sum n! z^n$ sont respectivement de rayon de converge infini et nul.

34. Proposition. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$ et $z \in \mathbf{C}$ un complexe. Alors

- si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge ;
- si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge ;

35. Remarque. Sur le cercle de rayon R, on ne peut rien dire. En effet, les séries entières $\sum z^n$ et $\sum z^n/n^2$ ont un rayon de convergence égal à 1 et, pour $z = 1$, la première diverge tandis que la seconde converge.

36. Définition. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est *développable en série entière* en un point $a \in \Omega$ s'il existe un rayon $r > 0$ et une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tels que

$$\forall z \in \Omega, \qquad |z-a| < r \implies f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

III. Application en analyse complexe

III.1. Analyticité des fonctions holomorphes et conséquences

37. Théorème. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. Alors elle est développable en série entière en tout point de l'ouvert Ω. Autrement dit, la fonction f est analytique sur l'ouvert Ω.

38. Exemple. La fonction $f\colon z \in \mathbf{D} \longmapsto 1/(1-z)$ est holomorphe sur le disque unité ouvert $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ et s'écrit sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \qquad z \in \mathbf{D}.$$

39. Théorème. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe un point $z \in \Omega$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad f^{(n)}(z_0) = 0.$$

Alors la fonction f est identiquement nulle.

40. Corollaire *(principe du prolongement analytique)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes coïncidant sur un ouvert de Ω. Alors elles sont égales sur Ω.

III.2. Suites et produits de fonctions holomorphes

41. Théorème *(Weierstrass)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose qu'elle converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Alors cette dernière est holomorphe et la suite $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers la fonction f.

42. Exemple. La fonction $\zeta\colon \{\operatorname{Re} > 1\} \longrightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe.

43. Théorème *(Hurwitz)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions injectives holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Alors cette dernière est injective ou constante.

44. Application *(théorème de Riemann)*. Tout ouvert simplement connexe $\Omega \neq \mathbf{C}$ est conformément équivalent au disque $\mathbf{D}$: il existe un biholomorphisme $\Omega \longrightarrow \mathbf{D}$.

45. Théorème. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω tel que la série $\sum(1-f_n)$ soit normalement convergente sur tout compact de Ω. Alors la fonction $\prod_{n=0}^{+\infty} f_n$ est holomorphe sur Ω.

D2

46. Application *(prolongement de la fonction Γ)*. Pour tout complexe $z \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, on a

$$\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \longrightarrow \Gamma(z) \coloneqq \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi la fonction $1/\Gamma$ se prolonge en une fonction entière.

[1] Marc Briane et Gilles Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuibert, 2012.
[2] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.
[3] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.