Leçon 243. Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

1. Convergence des séries entières

1.1. Séries entières et rayon de convergence

1. DÉFINITION. Un *série entière de la variable complexe* ou simplement *série entière* est une série $\sum f_n$ constituée de fonctions $f_n \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ telle qu'il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in \mathbf{C}, \qquad f_n(z) = a_n z^n.$$

Elle sera notée sous la forme $\sum a_n z^n$. On définit également les *séries entières de la variable réelle*. Lorsque la série numérique $\sum a_n z^n$ converge pour un complexe $z \in \mathbf{C}$, sa *somme* au point z est la quantité $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2. LEMME *(Abel)*. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbf{C}$ un complexe. On suppose que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Alors pour tout nombre $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

3. DÉFINITION. Le *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le nombre réel ou l'infini

$$\sup\{r \geqslant 0 \mid \text{la suite } (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \in \overline{\mathbf{R}}_+.$$

4. THÉORÈME. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$. Alors
  – pour tout complexe $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
  – pour tout complexe $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge.
  – pour tout réel $r \in [0, R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque $\overline{\mathrm{D}}(0, r) \coloneqq \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant r\}$.

5. EXEMPLE. La série entière $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1 et, pour tout complexe $z \in \mathrm{D}(0,1)$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1/(1-z)$. En revanche, la série entière $\sum n! z^n$ est de rayon de convergence nul.

6. PROPOSITION *(somme et produit de deux séries entières)*. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R, R' > 0$. Alors leur somme $\sum (a_n + c_n) z^n$ et leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ avec

$$c_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

sont des séries entières de rayons de convergence $\geqslant \min(R, R')$. Si $R \neq R'$, alors la somme est de rayon de convergence $\min(R, R')$.

7. REMARQUE. En général, l'égalité n'est pas vérifiée. Par exemple, la somme des séries entières $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ est la série entière nulle, de rayon de convergence infini.

8. PROPOSITION. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors sa *série entière dérivée* $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ admet le même rayon de convergence R. En particulier, il en va de même pour sa *série entière primitive* $\sum \frac{a_n}{n+1} z^n$

1.2. Calcul et comparaison des rayons de convergence

9. PROPOSITION *(règle de d'Alembert)*. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On suppose que la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel $L \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Alors $R = 1/L$.

10. EXEMPLE. La série entière $\sum z^n/n!$ est de rayon de convergence infini puisque

$$\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Sa somme est la fonction exponentielle, notée $\exp \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$.

11. THÉORÈME *(formule de Hadamard)*. Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donnée par la formule

$$1/R = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

12. EXEMPLE. Le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^n z^{2n}$ vaut $1/\sqrt{2}$.

13. COROLLAIRE *(règle de Cauchy)*. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On suppose que la suite $(|a_n|^{1/n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel $L \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Alors $R = 1/L$.

14. EXEMPLE. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ vaut $1/2$.

15. PROPOSITION. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.
  – Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R \geqslant R'$.
  – Si $a_n \sim b_n$, alors $R = R''$

1.3. Comportement au bord du disque de convergence

16. REMARQUE. Pour une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, la série numérique $\sum a_n z^n$ avec $|z| = R$ peut ou non converger.

17. EXEMPLE. Plusieurs cas de figure se présente donc :
  – la série entière $\sum z^n$ de rayon de convergence 1 diverge en tout point $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| = 1$;
  – la série entière $\sum z^n/n^2$ de rayon de convergence 1 converge en tout point $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| = 1$;
  – la série entière $\sum z^n/n$ de rayon de convergence 1 diverge au point $z = 1$, mais converge en tout autre point $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ vérifiant $|z| = 1$.

18. THÉORÈME *(Abel angulaire)*. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On note f sa somme sur le disque unité ouvert. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ un réel. On considère l'ensemble

$$\Delta \coloneqq \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1 \quad \text{et} \quad \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

Alors lorsque $z \longrightarrow 1$ avec $z \in \Delta$, on a

$$f(z) \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

D1

19. CONTRE-EXEMPLE. La réciproque du théorème est fausse : on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \longrightarrow 1/2 \qquad \text{lorsque } z \longrightarrow 1,\ |z| < 1$$

bien que la série $\sum(-1)^n$ diverge.

20. Théorème *(taubérien faible)*. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f sa somme sur le disque unité ouvert. On suppose que

D1
- la fonction f admet une limite $S \in \mathbf{C}$ lorsque $x \in \mathbf{R}$ et $x \longrightarrow 1^-$;
- $a_n = o(1/n)$.

Alors la série $\sum a_n$ converge et sa somme est la limite S.

21. Exemple. On peut calculer la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

2. Régularité de la somme

2.1. Continuité, intégration et dérivation

22. Théorème. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors sa somme $S\colon \mathrm{D}(0,R) \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par l'égalité
$$S(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \qquad |z| < R$$
est continue sur le disque ouvert $\mathrm{D}(0,R)$.

23. Exemple. La fonction exponentielle est continue sur le plan complexe $\mathbf{C}$.

24. Corollaire. Soit $p \in \mathbf{N}$. Lorsque $z \longrightarrow 0$, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{p} a_n z^p + \mathrm{O}(z^{p+1}).$$

25. Théorème. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$. Soit $[a,b] \subset \left]-R,R\right[$ un segment. Alors
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n \,\mathrm{d}x.$$

26. Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$. Alors toute primitive de sa fonction somme sur $\left]-R,R\right[$ s'écrit
$$x \longmapsto \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbf{C}.$$

27. Exemple. Pour tout réel $x \in \left]-1,1\right[$, on trouve
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

28. Théorème. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa fonction somme $S\colon \left]-R,R\right[\longrightarrow \mathbf{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est la somme de sa série entière dérivée, c'est-à-dire
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n z^{n+1}, \qquad x \in \left]-R,R\right[.$$

29. Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, la fonction S est classe $\mathscr{C}^\infty$ et ses dérivées vérifient
$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \qquad x \in \left]-R,R\right[,\ k \in \mathbf{N}.$$
En particulier, les coefficients a_k vérifient la relation $a_k k! = S^{(k)}(0)$ avec $k \in \mathbf{N}$.

30. Exemple. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout réel $x \in \left]-1,1\right[$, on obtient
$$\frac{k!}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\cdots(n+k) x^n.$$

2.2. Développements en série entière dans le cas réel

31. Définition. Soit $X \subset \mathbf{R}$ un ouvert. Une fonction $f\colon X \longrightarrow \mathbf{C}$ est *développable en série entière* en un point $x_0 \in X$ s'il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et un réel $r > 0$ avec $\left]x_0 - r, x_0 + r\right[\subset X$ vérifiant
$$\forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$
De même si $X \subset \mathbf{C}$, on remplace l'intervalle $\left]x_0 - r, x_0 + r\right[$ pour le disque $\mathrm{D}(x_0, r)$.

32. Exemple. La fonction $x \longmapsto 1/(1-x)$ est développable en série entière en tout point de l'intervalle $\left]-1,1\right[$. Un polynôme est développable en tout point de $\mathbf{R}$.

33. Proposition. Soit $f\colon X \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction développable en série entière en un point $x_0 \in X$. Alors il existe un voisinage du point x_0 sur lequel la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on peut écrire
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

34. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la fonction f définie par l'égalité
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$, mais elle n'est pas développable en série entière au point 0.

35. Exemple. Pour tous réels $\alpha \in R^*$ et $x \in \left]-1,1\right[$, on trouve
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

36. Proposition. Soit f une fonction développable en série entière au point 0. On note $\sum a_n x^n$ la série entière dont elle est la somme sur un voisinage du point 0.
- Si la fonction f est paire, alors $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.
- Si la fonction f est impaire, alors $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.

2.3. Analyticité et holomorphie

37. Définition. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est *analytique* si elle se développe en série entière en tout point de Ω.

38. Exemple. Tout polynôme est analytique sur $\mathbf{C}$. Par sa définition, l'exponentielle est analytique. La fonction $z \longmapsto 1/(1-z)$ est analytique sur $\mathrm{D}(0,1)$.

39. Théorème *(principe des zéros isolés).* Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$. Si elle n'est pas nulle, alors l'ensemble de ces zéros n'admet pas de points d'accumulation dans Ω.

40. Remarque. La contraposée est souvent utile. Auquel cas, on a besoin que le point d'accumulation soit dans l'ouvert. En effet, la fonction $z \in \mathbf{C}^* \longmapsto \sin(\pi/z)$ admet pour zéros les complexes $1/n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ bien qu'elle ne soit pas nulle.

41. Théorème *(principe de prolongement analytique).* Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble de Ω ayant un point d'accumulation dans Ω, alors elles sont égales sur Ω.

42. Application. Soient $p, n \in \mathbf{N}^*$ deux entiers non nuls. Un développement de la fonction $z \longmapsto 1/(1-z)^p$ montre que

$$\sharp\{(n_1, \dots, n_p) \in \mathbf{N}^p \mid n_1 + \dots + n_p = n\} = \binom{n+p-1}{p-1}.$$

43. Théorème *(formule de Cauchy).* Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soient $z_0 \in \Omega$ un point et $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega \backslash \{z_0\}$ un lacet homotope à un point. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \mathrm{Ind}_\gamma(a) f(a).$$

44. Corollaire. Toute fonction holomorphe sur un disque ouvert est développable en série entière. En particulier, l'holomorphie et l'analyticité sont une même notion.

45. Application. La fonction gamma d'Euler se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$.

3. Un outil pour l'analyse et les probabilités

3.1. Séries entières et équations différentielles linéaires

46. Remarque. Soient $\Omega \subset \mathbf{K}^n$ un ouvert et $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. En procédant par analyse-synthèse et lorsque une fonction $f\colon I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$ est un polynôme en ses variables, on trouve une solution de l'équation différentielle $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

47. Exemple. On cherche les solutions de l'équation différentielle

$$(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0.$$

On obtient les solutions

$$y(t) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)t^n = \frac{\lambda}{1+t}, \qquad t \in \left]-1, 1\right[$$

pour des constantes $\lambda \in \mathbf{R}$. Cette solution est aussi valable sur l'intervalle $]-1, +\infty]$.

48. Théorème. On considère l'*équation de Bessel*

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{1}$$

D2 Alors la fonction $g\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par la relation

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) \, \mathrm{d}\theta, \qquad x \in \mathbf{R}$$

est une solution de l'équation (1). De plus, il existe une unique solution f_0 de l'équation (1) qui est développable en série entière au point 0 telle que $f_0(0) = 1$; cette dernière est définie sur toute la droite $\mathbf{R}$.

49. Proposition. Soit $f\colon]0, a[\longrightarrow \mathbf{R}$ une solution de l'équation (1). La famille (f, f_0) est libre si et seulement si la fonction f n'est pas bornée au voisinage de l'origine. D2

50. Corollaire. Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) \, \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^n.$$

51. Remarque. Réciproquement, étant donnée une fonction $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est développable en série entière, on peut la développer en trouvant une équation différentielle qu'elle vérifie, puis en exhibant des relations vérifiées par les coefficients.

52. Exemple. La fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto (\operatorname{Arcsin} x)^2$ vérifie le problème de Cauchy

$$(1 - x^2)y' - xy' = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 1$$

dont l'on tire le développement

$$(\operatorname{Arcsin} x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

3.2. La série génératrice d'une variable aléatoire discrète

53. Définition. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. La *fonction génératrice* d'une variable aléatoire X à valeurs entières est la fonction $G_X\colon [-1, 1] \longrightarrow [0, 1]$ définie par

$$G_X(t) \coloneqq \mathbf{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) t^n, \qquad t \in [-1, 1].$$

54. Exemple. Pour un variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$, sa fonction génératrice est donnée par la relation

$$G_X(t) = (1 - p) + tp, \qquad t \in [-1, 1].$$

55. Proposition. Soit X un variable aléatoire à valeurs entières. La fonction G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1, 1[$, elle vérifie $G_X(1) = 0$ et elle caractérise la loi de la variable aléatoire X.

56. Théorème. Soient X un variable aléatoire à valeurs entières et $k \in \mathbf{N}^*$ un entier non nul. Alors la fonction G_X est k fois dérivables au point 1 si et seulement si la variable aléatoire X admet un moment d'ordre k. Dans ce cas, on a

$$G_X^{(k)}(1) = \mathbf{E}[X(X-1) \cdots (X - k + 1)].$$

57. Proposition. Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires à valeurs entières et mutuellement indépendantes. Alors

$$G_{X_1 + \dots + X_n} = G_{X_1} \cdots G_{X_n}.$$

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Mohammed El Amrani. *Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions.* Ellipses, 2011.
[3] Xavier Gourdon. *Analyse.* 2e édition. Ellipses, 2008.