Leçon 245. Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications

I. Holomorphie et analyticité

I.1. Dérivabilité complexe et holomorphie

1. Définition. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert fixé. Une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est $\mathbf{C}$-*dérivable* en un point $a \in \Omega$ si la quantité
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$
admet une limite lorsque le complexe z tend vers le point a. Dans ce cas, la limite sera notée $f'(a)$. Si la fonction f est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point de l'ouvert Ω, alors elle est dite $\mathbf{C}$-dérivable sur l'ouvert Ω et la fonction $f'\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est sa dérivée.
2. Exemple. La fonction $z \longmapsto z$ est $\mathbf{C}$-dérivable sur $\mathbf{C}$ et sa dérivée est la fonction constante $z \longmapsto 1$. Plus généralement, toute fonction polynomiale est $\mathbf{C}$-dérivable sur $\mathbf{C}$. Cependant, la fonction $z \longmapsto \overline{z}$ n'est $\mathbf{C}$-dérivable en aucun point.
3. Remarque. La somme, le produit, l'inverse et la composée de fonctions $\mathbf{C}$-dérivables sont encores $\mathbf{C}$-dérivables.
4. Définition. Une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est *holomorphe* sur l'ouvert Ω si elle est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point de ce dernier. On note $\mathscr{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.
5. Proposition. Soient $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction et $a \in \Omega$ un point. Alors les points suivants sont équivalents :
   - la fonction f est $\mathbf{C}$-dérivable au point a ;
   - elle est différentiable au point a et a différentielle $df(a)$ est une similitude directe, c'est-à-dire la multiplication par un nombre complexe ;
   - elle est différentiable au point a et a différentielle $df(a)$ est $\mathbf{C}$-linéaire.
6. Corollaire. Toute fonction $\mathbf{C}$-dérivable sur Ω est différentiable sur Ω.
7. Contre-exemple. La réciproque est fausse : la conjugaison $z \longmapsto \overline{z}$ est différentiable sur $\mathbf{C}$ mais elle n'est $\mathbf{C}$-dérivable en aucun point.
8. Corollaire. Une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est $\mathbf{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$ si et seulement si elle vérifie les *équations de Cauchy-Riemann* en ce point a
$$\partial_x u(a) = \partial_y v(a) \qquad \text{et} \qquad \partial_y u(a) = -\partial_x v(a)$$
où $u \coloneqq \operatorname{Re} f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ et $v \coloneqq \operatorname{Im} f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$.

I.2. Séries entières

9. Définition. Une *série entière* est une série $\sum f_n$ de fonctions $f_n\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ de la forme $f_n(z) = a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ et un complexe $a_n \in \mathbf{C}$. On la note $\sum a_n z^n$.
10. Proposition *(lemme d'Abel)*. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe. On suppose que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée pour un réel $r > 0$. Alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\overline{\mathrm{D}}(0,s) \subset \mathbf{C}$ avec $s < r$.
11. Définition. Le *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le réel
$$R \coloneqq \sup\{r \geqslant 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$
12. Corollaire. Sous les mêmes notations, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque $\mathrm{D}(0,R)$
13. Exemple. La fonction $z \in \mathbf{C} \longmapsto e^z \in \mathbf{C}$ est la somme de la série entière $\sum z^n/n!$ qui est de rayon de convergence infini. De même, la fonction $z \in \mathrm{D}(0,1) \longmapsto 1/(1-z)$ est la somme de la série entière $\sum z^n$ qui est de rayon de converge 1.
14. Proposition *(formule d'Hadamard)*. La rayon de convergence $R \geqslant 0$ d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$
15. Corollaire. Une série entière $\sum a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum (n+1)a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence.
16. Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme $f\colon\ \mathrm{D}(0,R) \longrightarrow \mathbf{C}$ est infiniment $\mathbf{C}$-dérivable sur le disque ouvert $\mathrm{D}(0,1)$.

I.3. Fonctions analytiques

17. Définition. Une fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est *développable en série entière* en un point $a \in \Omega$ s'il existe une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que
$$\forall z \in \mathrm{D}(a,r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$
Elle est *analytique* si elle est développable en série entière en tout point de l'ouvert Ω.
18. Proposition. Toute fonction analytique est holomorphe.
19. Exemple. La fonction $z \longmapsto \cos z$ est analytique sur $\mathbf{C}$.
20. Théorème *(des zéros isolés)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique non nulle. Alors l'ensemble de ses zéros n'admet aucun point d'accumulation dans l'ouvert Ω.
21. Théorème *(principe du prolongement analytique)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions analytiques. Si $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation *dans* l'ouvert Ω, alors $f = g$ sur Ω.
22. Exemple. La fonction identité est la seule fonction analytique $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $f(1/n) = 1/n$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$.
23. Contre-exemple. Il est nécessaire que le point d'accumulation soit dans l'ouvert Ω. En effet, la fonction $z \in \{\operatorname{Re} > 0\} \longmapsto \sin(\pi/z)$ s'annule en chaque point $1/n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$, mais elle n'est pas nulle.

II. La théorie de Cauchy

II.1. Intégrale curviligne

24. Définition. Un *chemin* dans l'ouvert Ω est une fonction continue $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On dit que c'est un *lacet* lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$.
25. Exemple. Pour un complexe $a \in \mathbf{C}$ et un réel $r > 0$, la fonction
$$t \in [0,1] \longrightarrow a + Re^{2i\pi t}$$
décrit positivement le cercle de centre a et de rayon r.

26. Définition. L'*intégrale curviligne* d'une fonction continue $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ le long d'un chemin $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ est la quantité
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$
27. Exemple. Soit $r > 0$ un réel. On note $\gamma\colon t \in [a,b] \longrightarrow Re^{it} \in \mathbf{C}$. Alors
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = i(b-a).$$
28. Définition. L'*indice* d'un lacet $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ par rapport à un point $a \in \mathbf{C} \backslash \operatorname{Im}\gamma$ est la quantité
$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$
29. Proposition. La fonction $\operatorname{Ind}_\gamma$ est à valeurs entières, continue, constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$ et nulle sur celle non bornée.

II.2. Le théorème de Cauchy sur un convexe

30. Théorème. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. Alors elle possède une primitive sur l'ouvert Ω si et seulement si, pour tout lacet γ dans l'ouvert Ω, on a $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
31. Théorème *(Goursat)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert convexe et $w \in \Omega$ un point. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$. Pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, on a $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
32. Théorème *(Cauchy)*. Sous les mêmes hypothèses, la fonction f possède une primitive sur l'ouvert Ω.
33. Théorème *(formule de Cauchy)*. Soient $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ un lacet et $a \in \Omega \setminus \operatorname{Im}\gamma$ un point. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors
$$\operatorname{Ind}_\gamma(a)f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$
34. Corollaire. Soit $n \in \mathbf{N}$. Sous les mêmes hypothèses, on a
$$\operatorname{Ind}_\gamma(a)f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

II.3. Conséquences générales

35. Théorème. Toute fonction holomorphe est analytique.
36. Théorème *(Morera)*. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue telle que, pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, on ait $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Alors elle est holomorphe sur l'ouvert Ω.
37. Proposition *(inégalité de Cauchy)*. Soient $f\colon \mathrm{D}(0,R) \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et $r \in \left]0,R\right[$ un réel. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{avec} \quad M(r) := \sup_{|z|=r}|f(z)|.$$
38. Corollaire *(théorème de Liouville)*. Toute fonction entière bornée est constante.
39. Théorème *(d'Alembert-Gauss)*. Tout polynôme à coefficient complexe admet au moins une racine complexe.

40. Théorème. Soient $(T, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $F\colon \Omega \times T \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction vérifiant les points suivants :

- pour tout $z \in \Omega$, la fonction $F(z,\cdot)$ est mesurable ;
- pour tout $t \in T$, la fonction $F(\cdot,t)$ est holomorphe sur l'ouvert Ω ;
- pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une fonction $u_K \in \mathrm{L}^1(T)$ telle que
$$\forall (z,t) \in K \times T, \qquad |F(z,t)| \leqslant u_K(t).$$

Alors la fonction
$$z \in \Omega \longmapsto \int_T F(z,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$
est holomorphe sur l'ouvert Ω.
41. Théorème *(principe du maximum)*. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert borné et $f\colon \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. Alors
$$\forall z \in \overline{\Omega}, \qquad |f(z)| \leqslant \sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)|.$$
42. Théorème *(de l'application ouverte)*. Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe est une application ouverte.

III. Topologie du plan complexe et des fonctions holomorphes

III.1. L'ensemble des fonctions holomorphes

43. Définition. L'ensemble $\mathscr{H}(\Omega)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de l'ouvert Ω, c'est-à-dire celle engendrée par les semi-normes
$$p_K\colon f \in \mathscr{H}(\Omega) \longrightarrow \sup_{z\in K}|f(z)|$$
pour un compact $K \subset \Omega$.
44. Théorème *(Weierstrass)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω qui converge uniformément sur tout compact de l'ouvert Ω vers une fonction f. Alors cette dernière est holomorphe et la suite $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de l'ouvert Ω vers la fonction f'.
45. Exemple. La fonction $\zeta\colon s \in \{\mathrm{Re} > 1\} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} 1/n^s$ est holomorphe.
46. Théorème *(Montel)*. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω qui est uniformément bornée sur les compacts de l'ouvert Ω. Alors elle admet une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de l'ouvert Ω vers une fonction holomorphe.
47. Théorème. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω. On suppose que la série $\sum(1-f_n)$ converge normalement sur tout compact de l'ouvert Ω. Alors la fonction $\prod_{n=0}^{+\infty} f_n$ est holomorphe sur l'ouvert Ω
48. Proposition. La *fonction gamma d'Euler*
$$\Gamma\colon \left|\begin{array}{l} \{\mathrm{Re} > 0\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \quad z \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$
s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$.

DI

III.2. Biholomorphie et théorème de la représentation conforme

49. Définition. Un *biholomorphisme* entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbf{C}$ est une fonction holomorphe bijective $f\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ telle que sa réciproque f^{-1} soit holomorphe. On dit que la fonction f est un *automorphisme* lorsque $\Omega = \Omega'$ et que les ouverts Ω et Ω' sont *conformément équivalents*.
50. Théorème. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe injective. Alors sa dérivée f' ne s'annule pas et l'inverse $f^{-1}\colon f(\Omega) \longrightarrow \Omega$ est holomorphe.
51. Théorème *(lemme de Schwarz)*. Soit $f\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur le disque $\mathbf{D} \coloneqq \mathrm{D}(0,1)$ telle que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbf{D}, \quad |f(z)| \leqslant 1.$$

Alors
- pour tout $z \in \mathbf{D}$, on a $|f(z)| \leqslant |z|$;
- on a $|f'(0)| \leqslant 1$.

Si une des deux dernières inégalités en atteinte en un point $a \in \mathbf{D}$, alors la fonction f est de la forme $f(z) = \lambda z$ pour une constante $\lambda \in \mathbf{U} \coloneqq \partial\mathbf{D}$.
52. Théorème. Les automorphismes du disque $\mathbf{D}$ sont de la forme

$$z \in \mathbf{D} \longmapsto \lambda \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \in \mathbf{D}$$

avec $a \in \mathbf{D}$ et $\lambda \in \mathbf{U}$.
53. Définition. Un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ est *simplement connexe* si tout lacet de cet ouvert est homotope à un lacet constant.
54. Théorème *(Riemann)*. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe et distincts du plan $\mathbf{C}$ tout entier. Alors il est conformément équivalent au disque $\mathbf{D}$.
55. Exemple. L'homographie $z \in \mathbf{H} \longmapsto (z-i)/(z+i) \in \mathbf{D}$ envoie le demi-plan supérieur $\mathbf{H} \coloneqq \{\mathrm{Im} > 0\}$ sur le disque $\mathbf{D}$.

- D2 -

[1] Éric Amar et Étienne Matheron. *Analyse complexe.* Cassini, 2004.
[2] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[3] Patrice Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3.* Dunod, 2006.