Leçon 246. Séries de Fourier. Exemples et applications.

1. Fonctions périodiques et séries de Fourier

1.1. Fonctions périodique

[5] 1. Définition. Soit $T > 0$. Une fonction $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ est *T-périodique* si

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad f(t+T) = f(t).$$

2. Remarque. Clairement, une fonction f est T-périodique avec $T > 0$ si et seulement si la fonction $f(\frac{T}{2\pi}\cdot)$ est 2π-périodique. On se limitera à l'étude des fonctions 2π-périodique.

3. Exemple. Les fonctions cosinus, sinus et $x \longmapsto e^{inx}$ avec $n \in \mathbf{Z}$ sont 2π-périodiques.

4. Remarque. Une fonction 2π-périodique $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ s'identifie à une fonction définie sur le tore $\mathbf{T} \coloneqq \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ qui est un groupe topologique.

5. Définition. Soit $p \geqslant 1$ un réel. L'ensemble $\mathrm{L}^p(\mathbf{T})$ des fonctions $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ mesurables telles que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^p < +\infty$$

est muni de la norme définie par l'égalité

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p}$$

L'ensemble $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{T})$ des fonctions $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ mesurables telles que

$$\exists C \geqslant 0, \qquad |f(x)| \leqslant C \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbf{R}$$

est muni de la norme définie par l'égalité

$$\|f\|_\infty \coloneqq \inf\{C \geqslant 0 \mid |f(x)| \leqslant C \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbf{R}\}.$$

6. Proposition. L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ est un espace de Hilbert pour le produit salaire

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x.$$

1.2. Coefficients de Fourier

[1] 7. Définition. Soit $n \in \mathbf{Z}$. On définit la fonction $e_n \in \mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ par l'égalité

$$e_n(x) = e^{inx}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Pour une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{T})$, son *$n$-ième coefficient de Fourier* est le complexe

$$c_n(f) \coloneqq \langle f, e_n \rangle.$$

8. Proposition. La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$.

[5] 9. Proposition. Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$, $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$. Alors

- $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$;
- $c_n(f(\cdot + a)) = e^{ina}c_n(f)$;
- $c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$;
- si f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

[1] 10. Proposition *(lemme de Riemann-Lebesgue)*. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$. La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ tend vers zéro en $\pm\infty$.

11. Théorème. Soit $c_0(\mathbf{Z})$ l'espace des suites de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. L'application

$$\mathscr{F} : \left| \begin{aligned} \mathrm{L}^1(\mathbf{T}) &\longrightarrow c_0(\mathbf{Z}), \\ f &\longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}} \end{aligned} \right.$$

est un morphisme d'algèbre pour la convolution qui est continu.

12. Remarque. La fonction $\mathscr{F}$ n'est pas surjective : la suite $(\sin(nx)/\ln n)_{n\geqslant 2}$ n'est pas atteinte.

13. Notation. Pour une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$ et un entier $N \in \mathbf{N}$, on note [5]

$$S_N(f) \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n.$$

14. Théorème. Soit $f \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique.

- On a $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ si et seulement si $\mathscr{F} f \in \ell^2(\mathbf{Z}, \mathbf{C})$.
- Si $f \in \mathscr{C}^k(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, alors $n^k c_n(f) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \pm\infty$.

2. Théorèmes de convergence

2.1. Noyaux de Fejér et de Dirichlet

15. Définition. Soit $N \in \mathbf{N}$. Le *noyau de Dirichlet* d'ordre N est la fonction [5]

$$D_N \coloneqq \sum_{n=-N}^{N} e_n.$$

16. Proposition. Le noyau de Dirichlet vérifie les points suivants.

- La fonction D_N est paire et $\int_0^{2\pi} D_N(t) \, \mathrm{d}t = 2\pi$.
- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a
$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$
- Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$, on a $S_N(f) = f \star D_N$.
- On a $\|D_N\|_1 \longrightarrow +\infty$.

17. Définition. Si $N \neq 0$, le *noyau de Fejér* d'ordre N est la fonction

$$K_N \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n.$$

18. Proposition. Le noyau de Fejér vérifie les points suivants.

- Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, on a
$$K_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$
- On a $\|K_N\|_1 = 1$.

– Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$, on a
$$f \star K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) =: \sigma_N(f).$$

2.2. Théorèmes de Fejér et de Dirichlet

[5] 19. Proposition. Il existe une fonction continue 2π-périodique $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que la suite $(S_N(f)(0))_{N\in\mathbf{N}}$ diverge.

20. Remarque. C'est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus.

21. Théorème *(Fejér)*. Les deux points suivants constituent le théorème.

– Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \|\sigma_N(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$
et
$$\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \longrightarrow 0.$$

– Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{T})$. Alors on la même conclusion avec la norme p.

[1] 22. Corollaire. La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille totale de $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$. En particulier, la forme de Parseval s'applique.

23. Corollaire. L'application $\mathscr{F}\colon \mathrm{L}^1(\mathbf{T}) \longrightarrow c_0(\mathbf{Z})$ est injective. De plus, l'application $\mathscr{F}\colon \mathrm{L}^2(\mathbf{T}) \longrightarrow c_0(\mathbf{Z})$ est un isométrie.

[3] 24. Application *(inégalité de Wirtinger)*. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux telle que $f(a) = f(b) = 0$, on a
$$\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

[5] 25. Corollaire. Soient $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique et $x_0 \in \mathbf{R}$. Alors
$$S_N(f, x_0) \longrightarrow \ell \in \mathbf{C} \quad\Longrightarrow\quad \ell = f(x_0).$$

26. Proposition. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique telle que la suite $(S_N(f))_{N\in\mathbf{N}}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. Alors
$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n.$$

27. Proposition. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors la série $(S_N(f))_{N\in\mathbf{N}}$ converge normalement vers la fonction f.

[1] 28. Théorème *(Weierstrass)*. Toute fonction continue de $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.

[5] 29. Théorème *(Dirichlet)*. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{T})$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que

– les limites $f^+ := \lim_{t\longrightarrow 0^+} f(x_0+t)$ et $f^- := \lim_{t\longrightarrow 0^-} f(x_0+t)$ existent ;

– il existe une constante $\delta > 0$ tel que
$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 \pm t) - f^\pm|}{t} \,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Alors
$$S_N(f)(x_0) \longrightarrow \frac{1}{2}(f^+ + f^-).$$

30. Application. Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. La fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{T})$ définie par l'égalité
$$f(t) = e^{iat}, \qquad t[-\pi,\pi[$$
vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet au point π et on tire l'égalité
$$\pi \cot \pi a = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

3. Quelques applications

3.1. Formule sommatoire de Poisson

31. Définition. Pour une fonction $F \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* [5]
$$\hat{F}\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x t} F(t) \,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

32. Théorème. Soient $F \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ une fonction intégrable et continue. On suppose qu'il existe deux constantes $M > 0$ et $\alpha > 1$ telles que
$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |F(x)| \leqslant M(1+|x|)^{-\alpha}$$
et que
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty.$$
Alors
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n).$$

D1

33. Application. Pour tout $t > 0$, on a [4]
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t} \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

34. Remarque. La fonction $t \longmapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t}$ joue un rôle dans la résolution de l'équation de la chaleur (1).

3.2. Équation de la chaleur

35. Définition. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'*équation de la chaleur* est le problème de Cauchy [2]
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x) & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

36. Proposition. On suppose que la fonction f est 1-périodique et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe une unique solution $u\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ au problème (1) qui est 1-périodique par rapport à la variable d'espace. D2

[1] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* 2e édition. H&K, 2005.
[2] Bernard Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini, 2009.
[3] Harry Dym et Henry McKean. *Fourier Series And Integrals.* Academic Press, 1972.
[4] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Analyse 2.* 2e édition. Cassini, 2009.
[5] Hervé Queffélec et Claude Zully. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.