Leçon 250. Transformation de Fourier. Applications.

1. Transformation des fonctions intégrables et de Schwartz

1.1. Premières propriétés

1. Définition. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ est la fonction

$$\hat{f} = \mathscr{F}(f) \colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \xi \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{array} \right.$$

2. Exemple. Soit $a > 0$. La transformée de la fonction $g \colon x \in \mathbf{R} \longmapsto e^{-a|x|^2}$ s'écrit

$$\mathscr{F}(g)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\xi|/4a}.$$

3. Définition. Le *produit de convolution* de deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ est la fonction

$$f \star g \colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}, \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y. \end{array} \right.$$

4. Proposition. Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ et $a, \xi \in \mathbf{R}^n$. Alors
- si $g(x) = f(x)e^{iax}$ pour $x \in \mathbf{R}^n$, alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$ pour $\xi \in \mathbf{R}^n$;
- si $g(x) = f(x-a)$ pour $x \in \mathbf{R}^n$, alors $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}$ pour $\xi \in \mathbf{R}^n$;
- on a $\widehat{f \star g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ pour $x \in \mathbf{R}^n$;
- si $g(x) = f(x/\lambda)$ pour $x \in \mathbf{R}^n$ avec $\lambda > 0$, alors $\hat{g}(\xi) = \lambda\hat{f}(\lambda\xi)$ pour $\xi \in \mathbf{R}^n$.

5. Théorème. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Alors la fonction $\hat{f}$ est continue, tend vers 0 en l'infini et vérifie $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

6. Exemple. Soit $a > 1$. La transformée de l'indicatrice $\mathbf{1}_{[-a,a]}$ est la fonction

$$\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{2\sin a\xi}{\xi},$$

donc la transformée de la fonction triangle $\mathbf{1}_{[-a,a]} \star \mathbf{1}_{[-a,a]}$ est la fonction

$$\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \left(\frac{2\sin a\xi}{\xi}\right)^2$$

7. Définition. Une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ est *de Schwartz* si toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, c'est-à-dire que leur produit par tout polynôme est borné. Cela revient à dire que, pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, la quantité

$$N_p(\varphi) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant p} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\| < +\infty.$$

8. Notation. On note $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de Schwartz sur $\mathbf{R}^n$.

9. Exemple. Toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact est de Schwartz.

10. Lemme. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Alors la fonction $\hat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\partial_j(\mathscr{F}\varphi)(\xi) = \mathscr{F}(x \longmapsto -ix_j\varphi(x))(\xi) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F}(\partial_j\varphi)(\xi) = i\xi\hat{\varphi}(\xi)$$

pour tout vecteur $\xi \in \mathbf{R}^n$.

11. Corollaire. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{N}$. Si la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto x^k f(x)$ est intégrable, alors la fonction $\hat{f}$ est k-fois dérivable. Réciproquement, si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ et sa dérivée k-ième est intégrable, alors

$$\mathscr{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k\hat{f}(\xi) \quad \text{et} \quad \xi^k\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0.$$

12. Théorème. La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ est à valeurs dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ et, pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \qquad N_p(\hat{\varphi}) \leqslant C_p N_{p+n+1}(\varphi).$$

1.2. Formule d'inversion de Fourier

13. Théorème *(formule d'inversion de Fourier)*. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Alors

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \quad \text{avec} \quad \overline{\mathscr{F}}\hat{f}(x) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

14. Corollaire. La transformation de Fourier $\mathscr{F} \colon \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

15. Application. Une variable X de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ est de fonction caractéristique $\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{E}[e^{i\xi X}] = e^{-a|\xi|}$.

16. Théorème *(d'unicité)*. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\hat{f} = 0$ sur $\mathbf{R}^n$. Alors $f = 0$ presque partout.

1.3. Application : les polynômes orthogonaux

17. Définition. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une *fonction poids* sur I est une fonction mesurable $\rho \colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

L'ensemble $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ des fonctions de carré intégrable pour la mesure $\rho\,\mathrm{d}x$ est muni du produit scalaire définit par l'égalité $\langle f, g\rangle = \int_I f\overline{g}\rho$.

18. Remarque. Grâce au procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe une unique famille étagée orthogonale de polynômes unitaires, les *polynômes orthogonaux*.

19. Théorème. Soient $\rho \colon I \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ une fonction poids et $\alpha > 0$ un réel vérifiant

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$. D1

2. Extension de la transformation

2.1. Extension aux distributions tempérées

20. DÉFINITION. Une distribution $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ sur l'espace $\mathbf{R}^n$ est *tempérée* s'il existe un entier $p \in \mathbf{N}$ et une constante $C \geqslant 0$ tels que
$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C N_p(\varphi).$$

21. NOTATION. L'ensemble des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^n$ est noté $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$.

22. PROPOSITION. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que
$$\forall p \in \mathbf{N}, \qquad N_p(\varphi - \varphi_k) \longrightarrow 0.$$

23. THÉORÈME. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. Alors la forme linéaire $\varphi \longmapsto \langle u, \varphi\rangle$ de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ se prolonge en une unique forme linéaire sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ qui satisfait
$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \qquad |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C N_p(\varphi).$$

24. DÉFINITION. La transformée de Fourier d'une distribution $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ est la distribution $\hat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ définie par l'égalité
$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \qquad \langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle.$$

25. THÉORÈME. La transformation de Fourier $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n) \longmapsto \hat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

26. PROPOSITION. Si $u_j \longrightarrow u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, alors $\hat{u}_j \longrightarrow \hat{u}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$.

27. EXEMPLE. La transformée de Fourier de la distribution $1 \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ est égale à la distribution $(2\pi)^n\delta_0$.

2.2. Extension aux fonctions de carrés intégrables

28. THÉORÈME *(Plancherel)*. Il existe une application $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ satisfaisant les points suivants :

- lorsque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, la fonction $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de la fonction f ;
- pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, on a $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$;
- l'application $\hat{\cdot}$ est un isomorphisme ;
- pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, en notant
$$\phi_A(\xi) := \int_{|x|\leqslant A} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \psi_A(\xi) := \int_{|x|\leqslant A} \hat{f}(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$$
avec $A > 0$ et $t \in \mathbf{R}$, on a
$$\|\phi_A - f\|_2 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \|\psi_A - \hat{f}\|_2 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$$

29. COROLLAIRE. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ une fonction telle que $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Alors pour presque tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$, on a
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}x.$$

3. Applications

3.1. Formule de Poisson

30. THÉORÈME. Soient $F \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ une fonction intégrable et continue. On suppose qu'il existe deux constantes $M > 0$ et $\alpha > 1$ telles que
$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |F(x)| \leqslant M(1+|x|)^{-\alpha}$$
et que
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(n)| < +\infty.$$
Alors
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n).$$

31. APPLICATION. Pour tout $t > 0$, on a
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sqrt{t}\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

32. REMARQUE. La fonction $t \longmapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2/t}$ joue un rôle dans la résolution de l'équation de la chaleur.

3.2. Équation de la chaleur

33. DÉFINITION. Soit $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'*équation de la chaleur* est le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}u(x,t), & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x) & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

34. PROPOSITION. On suppose que la fonction f est bornée et de classe $\mathscr{C}^2$. Alors il existe une solution $u\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ au problème (1).

35. REMARQUE. Il n'y pas unicité de la solution car la fonction v définie par l'égalité
$$v(x,t) = \begin{cases} xt^{-3/2}e^{-x^2/4t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
est solution de l'équation (1) avec $f = 0$ et n'est pas nulle.

D2