Leçon 262. Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

1. Notation. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ où toutes les variables aléatoires considérées y seront définies.

I. Convergences presque sûre et en probabilité

I.1. Convergence presque sûre

2. Définition. Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ *converge presque sûrement* vers un variable aléatoire X si

$$\mathbf{P}(X_n \longrightarrow X) = 1 \quad \text{avec} \quad \{X_n \longrightarrow X\} := \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)\}.$$

Dans ce cas, on notera $X_n \xrightarrow{\text{ps}} X$.

3. Remarque. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement, alors deux de ses limites X et X' sont égales presque sûrement. La limite d'une suite convergeant presque sûrement est donc unique à égalité presque sûre.

4. Proposition. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire X si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \mathbf{P}(\limsup_{n\to+\infty} |X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

5. Proposition *(critère de Cauchy)*. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcap_{m\geqslant n} \{\|X_n - X_m\| < \varepsilon\}\Big) = 1.$$

6. Exemple. Soient $p \in [0,1]$ un réel et $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant un loi de Bernoulli de paramètre p. Alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ où l'on a posé $U_n := \sum_{i=1}^n 2^{-i} X_i$ converge presque sûrement.

7. Théorème *(lemme de Borel-Cantelli)*. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements.
   - Si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbf{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.
   - Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est indépendante, alors la réciproque du point précédent est vérifiée : si $\mathbf{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$, alors la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge.

8. Corollaire. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variable aléatoire réelle et X une variable aléatoire réelle.
   - Si la série $\sum \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon))$ converge pour tout réel $\varepsilon > 0$, alors $X_n \xrightarrow{\text{ps}} X$.
   - Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est indépendante, alors elle converge presque sûrement vers 0 si et seulement si la série $\sum \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon))$ converge pour tout réel $\varepsilon > 0$.

9. Contre-exemple. La réciproque du premier point est fausse. En effet, on se place dans l'espace $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ où la mesure λ est celle de Lebesgue sur $[0,1]$. Alors la suite $(\mathbf{1}_{[0,1/n[})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 et pourtant la série de terme général $\lambda(|X_n| > 1/2) = 1/n$ diverge

I.2. Convergence en probabilité

10. Définition. Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ *converge en probabilité* vers un variable aléatoire X si

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \mathbf{P}(\|X_n - X\| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas, on notera $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

11. Remarque. La limite, si elle existe, est encore unique à égalité presque sûre.

12. Exemple. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles centrée et de même variance. Alors la suite $((X_1 + \cdots + X_n)/n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

13. Proposition. L'expression $d(X,Y) := \mathbf{E}[\min(|X - Y|, 1)]$ définie une distance sur l'ensemble des variable aléatoires de l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et elle vérifie la propriété suivante : la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire X si et seulement si $d(X_n, X) \longrightarrow 0$.

14. Proposition. La converge presque sûrement implique celle en probabilité.

15. Contre-exemple. La réciproque est fausse. En effet, munissons le segment $[0,1]$ de sa tribu borélienne et de sa probabilité uniforme. Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par l'égalité

$$X_{2^m+k} := \mathbf{1}_{]k/2^n,(k+1)/2^n[}, \qquad n \in \mathbf{N}^*,\ k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$$

ne converge pas presque sûrement, mais elle converge en probabilité vers 0.

16. Théorème. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. Alors les points suivants sont équivalents :
   - la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité ;
   - pour toute extraction $\phi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, il existe une extraction $\psi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que la sous-suite $(X_{\phi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement.

17. Corollaire. La notion de convergence presque sûre n'est pas métrisable.

18. Proposition. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de variables aléatoires convergeant en probabilité respectivement vers deux variables aléatoires X et Y.
   - Pour toute fonction continue $f\colon \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^m$, on a $f(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$.
   - Pour tous réels $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, on a $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \alpha X + \beta Y$.
   - Lorsque $d = 1$, on a $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$.

19. Exemple. Comme le produit scalaire est continu, on trouve $\langle X_n, Y_n\rangle \xrightarrow{\mathbf{P}} \langle X, Y\rangle$.

20. Théorème. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N, \qquad \mathbf{P}(|X_n - X_N| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Alors elle converge en probabilité.

I.3. Une application : les lois faible et forte des grands nombres

21. Théorème *(loi forte des grands nombres)*. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X. On suppose que $\mathbf{E}[|X|] < +\infty$. Alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}[X].$$

22. Théorème *(loi forte des grands nombres)*. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X. Alors

$$\mathbf{E}[|X|] < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{ps}} \mathbf{E}[X].$$

23. Exemple. Considérons l'espace probabilisé $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. Tout réel $\omega \in [0,1]$

s'écrit sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} U_i(\omega)$. Les variables aléatoires U_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Alors la loi forte s'applique et assure que presque tout nombre du segment $[0,1]$ admet au moyenne autant de 0 et de 1 dans son développement dyadique.

24. Proposition *(méthode de Monte-Carlo)*. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction mesurable. Soit $(U_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur le segment $[a,b]$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit

$$I_n \coloneqq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(U_i).$$

Alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers l'intégrale $I \coloneqq (b-a)^{-1} \int_a^b \varphi$. De plus, si la fonction f est bornée par un réel $c > 0$, on a

$$\mathbf{P}(|I_n - I| > \varepsilon) \leqslant \frac{c^2}{n\varepsilon^2}, \qquad n \in \mathbf{N}^*,\ \varepsilon > 0.$$

D1

25. Théorème *(Bernstein)*. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. On introduit son module de continuité

$$\omega\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \quad h \longmapsto \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in [0,1],\ |u-v| \leqslant h\}. \end{array} \right.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère le polynôme

$$B_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(k/n) \in \mathbf{C}[x].$$

Alors

(i) la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$;

(ii) plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \|f - B_n\|_\infty \leqslant C\omega(1/\sqrt{n}).$$

II. Convergence dans les espaces de Lebesgue

II.1. Définition et uniforme intégrabilité

26. Définition. Soit $p > 0$. Une suite (X_n) de variables aléatoires de $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *converge dans* L^p vers une variable aléatoire $X \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ si

$$\|X_n - X\|_p = \mathbf{E}[\|X_n - X\|^p]^{1/p} \longrightarrow 0.$$

27. Proposition. Soient $p, q > 0$ deux réels tels que $p > q \geqslant 1$. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la variable aléatoire X dans L^p, alors elle y convergence dans L^q.

28. Définition. Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires réelles intégrables est *uniformément intégrable* si

$$\sup_{i\in I} \mathbf{E}[|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i|>c\}}] \xrightarrow[c\to+\infty]{} 0.$$

29. Remarque. Une famille finie de variables aléatoires réelles intégrables est uniformément intégrables. De même, s'il existe une variable aléatoire intégrable Y telle que, pour tout $i \in I$, on ait $|X_i| \leqslant Y$ presque sûrement, alors la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable.

30. Proposition. Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires réelles intégrables est uniformément intégrables si et seulement si les deux points suivants sont vérifiés :

- pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que
$$\forall A \in \mathscr{A}, \qquad \mathbf{P}(A) \leqslant \eta \quad\Longrightarrow\quad (\forall i \in I, \quad \mathbf{E}[|X_i|\, \mathbf{1}_A] \leqslant \varepsilon) ;$$
- la famille $(\mathbf{E}[|X_i|])_{i\in I}$ soit bornée.

II.2. Lien avec les autres convergences

31. Proposition. La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.

32. Contre-exemple. La convergence en probabilité n'implique pas la convergence dans L^p (la limite n'est pas nécessairement dans L^p). De même, la convergence presque sûre n'implique par la converge dans L^p. En effet, sur l'espace $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ et pour un réel $p > 1$, considérons des variables aléatoires X_n avec $n \in \mathbf{N}^*$ vérifiant

$$\mathbf{P}(X_n = n) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0) = n^{-p}.$$

Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 et pourtant on a $\mathbf{E}[|X_n|^p] = 1$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$.

33. Théorème. Soient $p \geqslant 1$ un réel et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre p. Alors les points suivants sont équivalents :

- la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans L^p ;
- elle est de Cauchy dans L^p ;
- la suite $(|X_n|^p)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément intégrable et la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire admettant un moment d'ordre p.

34. Contre-exemple. La condition d'uniforme intégrabilité est nécessaire. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n vérifiant

$$\mathbf{P}(X_n = n^2) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0) = 1/n.$$

Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité, mais pas dans L^1.

III. Convergence en loi

III.1. Convergences étroite et en loi

35. Définition. Une suite (μ_n) de probabilités sur $\mathbf{R}^d$ *convergence étroitement* vers une probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ si

$$\forall f \in \mathscr{C}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^d), \qquad \int f \,\mathrm{d}\mu_n \longrightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

36. Théorème *(admis)*. Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de probabilités sur $\mathbf{R}^d$ et μ une probabilité sur $\mathbf{R}^d$. Alors les points suivants sont équivalents :

- la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge étroitement vers la mesure μ ;
- pour tout fermé $F \subset \mathbf{R}^d$, on a $\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$;
- pour tout ouvert $O \subset \mathbf{R}^d$, on a $\liminf_{n\to+\infty} \mu_n(O) \geqslant \mu(O)$;
- pour tout borélien A tel que $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

37. Définition. Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires *converge en loi* vers une variable aléatoire X si la suite $(\mathbf{P}_{X_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge étroitement vers la mesure $\mathbf{P}_X$, c'est-à-dire si

$$\forall f \in \mathscr{C}_{\mathrm{b}}(\mathbf{R}^d), \qquad \mathbf{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbf{E}[f(X)].$$

On note alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ ou encore $X_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathbf{P}_X$.

38. Définition. Les points suivants sont équivalents :

- la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire X ;
- lorsque $d = 1$, pour tout point $t \in \mathbf{R}$ de discontinuité de la fonction de répartition de la variable aléatoire X, on a $\mathbf{P}(X_n \leqslant t) \longrightarrow \mathbf{P}(X \leqslant t)$;
- pour tout réel $t \in \mathbf{R}$, on a $\varphi_{X_n}(t) \coloneqq \mathbf{E}[e^{itX_n}] \longrightarrow \varphi_X(t) \coloneqq \mathbf{E}[e^{itX}]$.

39. Proposition. La convergence presque sûrement, respectivement en probabilité, implique celle en loi.

40. Contre-exemple. La convergence en loi n'implique ni la convergence presque sûre ni la convergence en probabilité. En effet, soit X une variable aléatoire suivant un loi normale centrée réduite. Alors la suite $((-1)^n X)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire X, mais elle n'y converge ni presque sûrement ni en probabilité.

41. Proposition. Une suite convergeant en loi vers une variable aléatoire constante y converge en probabilité.

42. Théorème *(lemme de Slutsky)*. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites convergeant en loi respectivement vers un variable aléatoire X et une variable aléatoire constante $c \in \mathbf{R}$. Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{loi}} (X, c)$.

43. Théorème *(Lévy)*. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires et X un variable aléatoire.

- Si $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$, alors la suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^d$ vers la fonction φ_X.
- Si la suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction φ qui est continue en 0, alors la fonction φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire et la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers cette dernière.

III.2. Le théorème central limite

D2

44. Théorème *(central limite)*. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbf{E}[X]}{\sqrt{n \operatorname{Var}[X]}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathscr{N}(0,1).$$

45. Exemple. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. Pour tout réel $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$, on a

$$\mathbf{P}\left(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t$$

avec $S_n \coloneqq X_1 + \cdots + X_n$.

46. Application *(construction d'intervalles de confiance)*. Combinée avec le lemme de Slutsky, comme la loi des grands nombre donne $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{P}} p$, la dernière limite donne

$$\mathbf{P}\left(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{S_n(1 - S_n/n)}} \leqslant b\right) \longrightarrow \int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \eqqcolon q.$$

On obtient l'intervalle de confiance

$$\left[\frac{S_n}{n} - \frac{b}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1 - \frac{S_n}{n}\right)}, \frac{S_n}{n} - \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1 - \frac{S_n}{n}\right)}\right]$$

qui encadre le paramètre p avec une probabilité voisine de la quantité q.

[1] Philippe Barbe et Michel Ledoux. *Probabilité*. Belin, 1998.
[2] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilité*. T. Tome II. Cassini, 2000.