Leçon 265. Exemples d'études et d'applications des fonctions usuelles et spéciales.

I. L'exponentielle complexe et les logarithmes

I.1. L'exponentielle : définition, premières propriétés et caractérisation

1. Définition. Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n/n!$ est infini. Sa fonction somme

$$\exp\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto 1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} + \dots \end{array} \right.$$

est la *fonction exponentielle complexe.*

2. Proposition. Soient $a, b, z \in \mathbf{C}$ trois complexes. Alors
   - $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$;
   - $\exp(z) \neq 0$;
   - $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$;
   - $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$;
   - $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$;
   - $|\exp(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbf{R}$.

3. Proposition. On définit $\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Pour un complexe $z \in \mathbf{C}$, on a

$$e^{iz} \in \mathbf{U} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \mathbf{R}.$$

4. Remarque. La fonction $\exp\colon (\mathbf{C}, +) \longrightarrow (\mathbf{C}^*, \times)$ réalise un morphisme de groupes.

5. Notation. On note $e := \exp(1)$ et, pour un complexe $z \in \mathbf{C}$, on s'autorisera la notation $e^z := \exp(z)$.

6. Proposition. La fonction $\exp\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ est entière et elle est sa propre dérivée.

7. Proposition. Pour un complexe $z \in \mathbf{C}$, on a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow e^z.$$

8. Théorème. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors les deux points suivants sont équivalents :
   - il existe deux complexes $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $f(z) = a\exp(bz)$ pour tout $z \in \Omega$;
   - pour tout $z \in \Omega$, on a $f'(z) = bf(z)$.

9. Corollaire. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe avec $0 \in \Omega$ et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors les deux points suivants sont équivalents :
   - pour tous $z, w \in \Omega$ avec $z + w \in \Omega$, on a $f(z+w) = f(z)f(w)$ et $f(0) = 1$.
   - $f = \exp$ sur Ω

10. Notation. Pour un complexe $z \in \mathbf{C}$ et un réel $a > 0$, on note $z^a := e^{z \ln a}$.

I.2. Sa surjectivité et ses conséquences

11. Proposition. La fonction $\exp\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ est un difféomorphisme local en tout point. En particulier, son image $\exp(\mathbf{C})$ est un ouvert.

12. Théorème. La fonction $\exp\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ est surjective.

13. Corollaire. Elle n'est pas injective.

14. Lemme. Un sous-groupe additif de la droite $\mathbf{R}$ est soit dense dans $\mathbf{R}$, soit de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in \mathbf{R}$.

15. Théorème. L'application $t \in \mathbf{R} \longmapsto e^{it}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{U}, \times)$. De plus, il existe un unique réel $a > 0$ tel que son noyau soit $a\mathbf{Z}$. On définit alors $\pi := a/2 > 0$.

16. Proposition. Le noyau du morphisme $\exp\colon (\mathbf{C}, +) \longrightarrow (\mathbf{C}^*, \times)$ est $2i\pi\mathbf{Z}$. Par ailleurs, cette fonction est périodique $2i\pi$-périodique.

I.3. Fonctions trigonométriques circulaires

17. Définition. Les *fonctions sinus et cosinus* sont les fonctions $\sin, \cos\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ définies par les égalités

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

18. Proposition. Ces dernières sont entières et vérifient $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. Par ailleurs, pour tout complexe $z \in \mathbf{C}$, on a

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

$$\cos z + i \sin z = z.$$

19. Proposition. Pour tous complexes $z, w \in \mathbf{C}$, on a

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos w \sin z,$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

20. Théorème. Pour tout complexe $z \in \mathbf{C}$, on a
   - $\cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi/2 + \pi\mathbf{Z}$;
   - $\sin z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbf{Z}$.

21. Corollaire. Les fonctions cos et sin sont 2π-périodique.

I.4. Les logarithmes complexes

22. Définition. Soit $X \subset \mathbf{C}^*$ une partie. Une *détermination du logarithme* sur X est une fonction $\ell\colon X \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\forall z \in X, \qquad e^{\ell(z)} = z.$$

Une *détermination de l'argument* sur X est une fonction $\theta\colon X \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant

$$\forall z \in X, \qquad |z|\, e^{i\theta(z)} = z.$$

23. Définition. Pour un complexe $z \in \mathbf{C}^*$, on note $\operatorname{Arg} z \in \mathbf{R}$ sont unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. La fonction $\operatorname{Arg}\colon \mathbf{C}^* \longrightarrow\,]-\pi, \pi]$ est la *détermination principale de l'argument.* La fonction

$$\operatorname{Log}\colon z \in \mathbf{C}^* \longmapsto \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

est la *détermination principale du logarithme.*

24. Remarque. Les fonctions Arg et Log ne sont pas continues sur $\mathbf{C}^*$.

25. Théorème. Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur le cercle $\mathbf{U}$ et *a fortiori* sur $\mathbf{C}^*$.

26. Corollaire. Il n'existe pas de détermination continue de la puissance k-ième avec $k \geqslant 2$ sur $\mathbf{C}^*$.

27. Proposition. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^*$ un ouvert. Les déterminations continues du logarithme sur Ω sont les fonctions de la forme

$$z \in \Omega \longmapsto \ln|z| + i\theta(z)$$

pour une détermination continue θ de l'argument sur Ω

28. Théorème. La fonction Arg est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et la fonction Log est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$.

29. Théorème. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^*$ un ouvert connexe. Alors

- toute détermination continue du logarithme sur Ω est un primitive de la fonction inverse $z \in \Omega \longmapsto 1/z$ sur Ω ;
- si la fonction inverse admet une primitive sur Ω, alors il existe un détermination continue du logarithme sur Ω.

D1

30. Théorème *(Cauchy homotopique).* Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ deux lacets homotopes dans Ω. Pour tout fonction holomorphe $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

31. Corollaire. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^*$ un ouvert simplement connexe. Alors il existe une détermination holomorphe du logarithme sur Ω.

32. Application *(théorème de Riemann).* Tout ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$ avec $\Omega \neq \mathbf{C}$ est conformément équivalent au disque unité ouvert $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$.

II. La fonction gamma d'Euler

II.1. La définition et l'équation fonctionnelle

33. Définition. Considérons le demi-plan $\Omega \coloneqq \{\mathrm{Re} > 0\} \subset \mathbf{C}$. Pour tout $z \in \Omega$, la fonction $t > 0 \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable. La *fonction gamma d'Euler* est la fonction

$$\Gamma \colon \left| \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R}, \\ z \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

34. Proposition. La fonction Γ est holomorphe sur l'ouvert Ω.

35. Proposition. Pour tout complexe $z \in \Omega$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

36. Corollaire. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $(n-1)! = \Gamma(n)$.

37. Application. La surface de la sphère $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ vaut $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ et le voulme de la boule $\mathbf{B}^n \subset \mathbf{R}^n$ vaut $\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$.

38. Théorème *(formule de Stirling).* Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, on a

$$\Gamma(x) \simeq x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}.$$

II.2. Prolongement en une fonction méromorphe

39. Théorème. Pour tout complexe $z \in \Omega$, on a

$$\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \longrightarrow \Gamma(z).$$

40. Notation. Notons $\gamma > 0$ la limite de la suite $(1 + \cdots + 1/n - \ln n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

41. Corollaire *(formule de Weierstrass).* Pour tout complexe $z \in \Omega$, le nombre $\Gamma(z)$ est non nul d'inverse D2

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=0}^{+\infty}\Big(1 + \frac{z}{k}\Big)^{-z/k}.$$

42. Théorème. La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ admettant des pôles simples en les entiers négatifs ou nul et dont l'inverse est entière.

II.3. La formule des compléments, deux caractérisations et leurs conséquences

43. Proposition. Pour tout complexe $z \in \Omega$ avec $1 - z \in \Omega$, on a

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

44. Application. On trouve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

45. Théorème. Soit $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe vérifiant les points :

- $f(1) = 1$;
- $f(z+1) = zf(z)$ pour tout $z \in \Omega$;
- elle est bornée sur la bande $\{1 \leqslant \mathrm{Re} < 2\}$.

Alors les fonction f et Γ sont égales.

46. Corollaire. Pour tout complexe $z \in \Omega$ et tout entier $k \geqslant 2$, on a

$$\prod_{i=0}^{k-1}\Gamma\Big(z + \frac{i}{k}\Big) = (2\pi)^{(k-1)/2}n^{1/2-kx}\Gamma(kz).$$

47. Théorème. Soit $u \colon]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ une fonction vérifiant les points :

- elle est logarithmiquement convexe, c'est-à-dire la fonction $\ln \circ u$ est convexe ;
- $u(1) = 1$;
- $u(x+1) = xu(x)$ pour tout $x > 0$.

Alors la fonction u est égale à la restriction $\Gamma|_{]0,+\infty[}$.

48. Corollaire *(formule de duplication).* Pour tout complexe $z \in \Omega$, on a

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{z+1}{2}\Big).$$

[1] Éric Amar et Étienne Matheron. *Analyse complexe.* Cassini, 2004.
[2] Hervé Queffélec et Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.
[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* 3e édition. Dunod, 1998.
[4] Patrice Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3.* Dunod, 2006.