Leçon 267. Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.

1. Notion de courbe

1.1. Chemins et lacets en topologie

1. DÉFINITION. Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue d'un intervalle compact de $\mathbf{R}$ non réduit à un point dans X. Étant donné un chemin $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$, les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ en sont ses *extrémités*. Le chemin γ est un *lacet* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
2. DÉFINITION. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Un chemin $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ est *de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux* s'il existe une subdivision $(t_0, \dots, t_N)$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que sa restriction à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ soit de classe $\mathscr{C}^k$.
3. DÉFINITION. Le cercle unité $\mathbf{T} \subset \mathbf{C}$ est décrit par le chemin $t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{2i\pi t}$.
4. PROPOSITION. Soient $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ un lacet. On considère la surjection canonique

$$p\colon \left| \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbf{T}, \\ \quad t \longmapsto e^{2i\pi t/(b-a)}. \end{array} \right.$$

Alors il existe une unique application $\hat{\gamma}\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathrm{Im}(\gamma)$ telle que $\gamma = \hat{\gamma} \circ p$. De plus, l'application $\hat{\gamma}$ est continue.
5. DÉFINITION. Deux chemins $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ et $\lambda\colon [c,d] \longrightarrow X$ sont *équivalents* (resp. *anti-équivalents*) s'il existe un homéomorphisme $\theta\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$ qui est croissant (resp. décroissant) tel que $\gamma = \lambda \circ \theta$. Deux lacets sont équivalents (resp. anti-décroissant) s'ils le sont en tant que chemin et s'ils ont les mêmes extrémités.
6. EXEMPLE. Les chemins $t \in [-\pi/2, \pi/2] \longmapsto e^{it} \in \mathbf{T}$ et $t \in [-\pi/4, \pi/4] \longmapsto e^{2it} \in \mathbf{T}$ sont équivalents. Un chemin $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ et son *inverse*

$$\gamma^-\colon t \in [a,b] \longmapsto \gamma(a+b-t) \in X$$

sont anti-équivalents.
7. DÉFINITION. Un espace topologique X est *connexe par arcs* si deux points quelconques peuvent être joints par un chemin dans X.
8. REMARQUE. La connexité par arcs implique la connexité. Mais la réciproque est fausse : il suffit de considérer l'ensemble $\overline{\{\sin(1/x) \mid x > 0\}}$.

1.2. Courbes de Jordan

9. DÉFINITION. Un *chemin de Jordan* est un chemin injectif. Un *lacet de Jordan* est un chemin $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ tel que sa restriction $\gamma|_{[a,b[}$ soit injective. Une *courbe de Jordan* est l'image d'un chemin (elle sera dite *simple*) ou d'un lacet de Jordan (elle sera dite *fermée*). Un tel chemin ou lacet est le *paramétrage* de la courbe de Jordan.
10. EXEMPLE. Le cercle $\mathbf{T}$ est une courbe de Jordan.
11. PROPOSITION. Soit $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow X$ un chemin d'image Γ. Alors
   - si le chemin γ est de Jordan, alors il réalise un homéomorphisme de $[a,b]$ sur Γ ;
   - si le chemin γ est un lacet de Jordan, alors l'application quotient $\tilde{\gamma}\colon \mathbf{T} \longrightarrow \Gamma$ est un homéomorphisme.
12. COROLLAIRE. Une courbe de Jordan simple est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$ et une courbe de Jordan fermée est homéomorphe au cercle $\mathbf{T}$.
13. PROPOSITION. Deux paramétrages d'une même courbe de Jordan sont équivalents.

1.3. Intégrer sur une courbe

14. DÉFINITION. Soit $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux d'image Γ. Une fonction $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbf{K}$ est *intégrable* sur le chemin γ si la fonction

$$t \in [a,b] \longrightarrow f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

est intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Dans ce cas, l'*intégrale* de la fonction f sur le chemin γ est le vecteur

$$\int_\gamma f \coloneqq \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

15. EXEMPLE. En considérant l'injection canonique $\iota\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, pour toute fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{K}$, on a

$$\int_\iota f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soient $R > 0$ et $a, b \in \mathbf{R}$ trois réels avec $a < b$. Avec $\gamma(t) = Re^{it}$ pour $t \in [a,b]$, on a

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = i(b-a).$$

16. THÉORÈME. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ une partie ouverte. Soient $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors

$$\int_\gamma F' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

17. COROLLAIRE. Avec les mêmes notations, si le chemin γ est un lacet, alors $\int_\gamma F' = 0$.
18. PROPOSITION. Soient γ et λ deux chemins ou deux lacets de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbf{R}^n$ de même image Γ. Soit $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction intégrable sur le chemin γ. Si les chemins γ et λ sont équivalents ou anti-équivalent, alors elle est intégrable sur le chemin λ et, dans le cas où ils sont équivalents, on a

$$\int_\gamma f = \int_\lambda f.$$

1.4. Longueur d'une courbe

19. DÉFINITION. Soient X un espace métrique et $\gamma\colon J \longrightarrow X$ un chemin continue. Pour une subdivision $s \coloneqq (s_0, \dots, s_N)$ de l'intervalle J, on pose

$$\ell(\gamma, s) \coloneqq \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(s_{i+1}), \gamma(s_i)).$$

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle J. La *longueur* du chemin γ est le réel $\ell(\gamma) \coloneqq \sup_{s \in \mathscr{S}} \ell(\gamma, s) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
20. THÉORÈME. Soit $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

21. EXEMPLE. Avec $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$, on a $\ell(\gamma) = 2\pi$.

2. Utilisation des courbes en analyse complexe

2.1. Indice d'un chemin

22. DÉFINITION. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ une partie ouverte et $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ un lacet de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. L'*indice* du chemin γ par rapport à un point $a \in \mathbf{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$ est le complexe

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) \coloneqq \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

23. EXEMPLE. Pour un disque $D \subset \mathbf{C}$ parcourut dans le sens trigonométrique et un point $a \in \mathbf{C}$, on a

$$\operatorname{Ind}(\partial D, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \mathring{D}, \\ 0 & \text{si } a \in \mathbf{C} \setminus D. \end{cases}$$

24. THÉORÈME. Sous les mêmes notations, la fonction $\operatorname{Ind}(\gamma, \cdot)\colon \mathbf{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma \longrightarrow \mathbf{C}$ prend des valeurs entières. De plus, elle est constante sur chaque composante connexe de l'ensemble $\mathbf{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$ et elle est nulle sur sa composante connexe non bornée.

2.2. Existence des primitives et théorème de Cauchy

25. DÉFINITION. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ une partie ouverte. Une *primitive* sur Ω d'une fonction continue $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $F' = f$.

26. THÉORÈME. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Alors elle admet une primitive sur Ω si et seulement si, pour tout lacet γ dans $[a,b]$, on a $\int_\gamma f = 0$.

27. THÉORÈME. On suppose que l'ouvert Ω est connexe. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue vérifiant $\int_{\partial T} f = 0$ pour tout triangle $T \subset \Omega$. Alors elle admet une primitive sur Ω.

28. THÉORÈME *(Goursat)*. Soient $w \in \Omega$ un point et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue sur U et holomorphe sur $\Omega \setminus \{w\}$. Pour tout triangle $T \subset \Omega$, on a $\int_{\partial T} f = 0$

29. THÉORÈME. On suppose que l'ouvert Ω est convexe. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Soient $a \in \Omega$ un point et γ un lacet continu dans Ω. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \, \mathrm{d}z = \operatorname{Ind}(\gamma, a) f(a).$$

30. EXEMPLE. Soit γ le cercle décrit positivement de rayon $r > 0$ et de centre $a \in \mathbf{C}$. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \supset \operatorname{Im}\gamma$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \, \mathrm{d}z = f(a).$$

D1

31. THÉORÈME. Soient $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ deux chemins homotopes dans Ω ayant les mêmes extrémité ou étant des lacets. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

2.3. Analyticité et théorème des résidus

32. THÉORÈME. Soient $\rho_1, \rho_2 \geqslant 0$ deux réels avec $\rho_1 < \rho_2$. Soit $a \in \mathbf{C}$ un complexe. Soit $f\colon C \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur la couronne $C \coloneqq \{\rho_1 < |a - \cdot| < \rho_2\}$. Alors elle est développable en série de Laurent sur cette couronne C, c'est-à-dire il existe une famille complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-a)^n.$$

Le coefficient a_{-1} est appelé le *résidu* de la fonction f au point a et on le note $\operatorname{Res}(f,a)$.

33. THÉORÈME *(des résidus)*. Soient $a_1, \dots, a_r \in \Omega$ des complexes distincts. Considérons l'ouvert $U \coloneqq \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$. Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et γ un lacet dans U tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus U, \qquad \operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0.$$

Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^r \operatorname{Ind}(\gamma, a_k) \operatorname{Res}(f, a_k).$$

34. APPLICATION. La transformée de Fourier de la fonction $x \in \mathbf{R} \longmapsto 1/(1+x^2)$ est la fonction $\xi \in \mathbf{R} \longmapsto \pi e^{-2\pi|\xi|}$.

35. THÉORÈME *(Rouché)*. Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert contenant le disque fermé $\overline{\mathscr{D}}(a,r)$ de centre a et de rayon r. Soient $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes vérifiant

$$\forall z \in \partial\overline{\mathscr{D}}(a,r), \qquad |f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Alors les fonctions f et g ont le même nombre de zéros comptés avec leur multiplicité sur $\mathscr{D}(a,r)$.

3. Trajectoires des systèmes différentiels

3.1. Trajectoires

36. DÉFINITION. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On considère le système différentiel

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

La *trajectoire* d'une solution $x\colon I \longrightarrow \mathbf{R}^n$ est l'ensemble $\{(t, x(t)) \mid t \in I\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

37. REMARQUE. L'allure des trajectoires d'un système différentiel linéaire $\dot{x} = Ax$ dépend des valeurs propres de la matrice A.

38. EXEMPLE. Lorsque $n = 2$ et la matrice A admet deux valeurs propres non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$, les trajectoires sont des spirales qui rentre vers l'origine si $\operatorname{Re}\lambda < 0$ ou qui sorte de l'origine si $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

3.2. Stabilité et étude des systèmes

39. THÉORÈME. Soit $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que l'origine est un point d'équilibre de l'équation (1), c'est-à-dire $f(0) = 0$. On suppose que

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(\mathrm{J}_f(0)), \qquad \operatorname{Re}\lambda < 0.$$

Alors l'origine est asymptotiquement stable.

40. THÉORÈME *(admis)*. On suppose maintenant que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{J}_f(0)), \qquad \mathrm{Re}\, \lambda \neq 0.$$

Alors il existe deux voisinages U et V de l'origine et un homéomorphisme $\theta \colon U \longrightarrow V$ qui envoie une trajectoire du système (1) sur une trajectoire du système linéaire

$$\dot{x} = \mathrm{J}_f(0) x. \tag{2}$$

D2

41. DÉFINITION. Soient $a, c, d, d > 0$ quatre réels. Le *système de Lotka-Volterra* est le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases} \tag{3}$$

42. THÉORÈME. La solution maximale du système (3) est globale et périodique. De plus, on peut prédire l'allure des trajectoires.

[1] Éric AMAR et Étienne MATHERON. *Analyse complexe.* 2e édition. Cassini, 2020.
[2] Florent BERTHELIN. *Équations différentielles.* Cassini, 2017.
[3] Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY. *Analyse pour l'agrégation.* 5e édition. Dunod, 2020.