

GÉOMÉTRIE O-MINIMALE

Téofil ADAMSKI & Walid EL OUADGHIRI

Lecture dirigée de L3, encadrée de M. Goulwen FICHOU

Introduction. Dans cette lecture dirigée, nous tenterons d'introduire le concept de structure o-minimale sur le corps des réels et nous établirons des propriétés très fortes vérifiées par ces structures, comme les théorèmes de décomposition cellulaire ou de triangulation. Grâce à ces résultats, nous verrons que ces structures ne possèdent pas de « monstre topologique ». Pour finir, nous travaillerons sur la caractéristique d'EULER qui, couplée avec la dimension, permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles de cette géométrie soient en bijection.

Nous tenons à remercier M. Goulwen FICHOU pour son aide précieuse à la compréhension de notre sujet de lecture dirigée.

I Notions préliminaires	1	V Notion de dimension	10
I.1 Ensembles semi-algébriques	1	V.1 Généralisation de la dimension d'une cellule	10
I.2 Corps réels clos	2	V.2 Propriétés sur la dimension	12
II Structures o-minimales	3	VI Triangulation	13
II.1 Définition et exemples	3	VI.1 Simplexes	13
II.2 Fonctions définissables	3	VI.2 Lemmes préliminaires	14
III Décomposition cellulaire	5	VI.3 Théorème de triangulation	15
III.1 Décomposition en cellules définissables	5	VII Caractéristique d'EULER	16
III.2 Théorème de décomposition cellulaire	7	VII.1 Définition	16
IV Composantes connexes	8	VII.2 La dimension et la caractéristique d'EULER donnent un invariant numérique	19
IV.1 Sélection de courbe	8	VIII Conclusion	22
IV.2 Composantes connexes	9		

NOTATIONS GÉNÉRALES.

- Les ensembles des nombres réels, rationnels et entiers naturels seront respectivement notés \mathbb{R} , \mathbb{Q} et \mathbb{N} .
- Pour toute partie A de \mathbb{R}^n , on note $\overline{A} \subset \mathbb{R}^n$ l'adhérence de A dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n .
- Pour tous ensembles A et B , on note $\Gamma(f) := \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$ le graphe d'une fonction $f: A \rightarrow B$.
- Pour tous entier $n, p \in \mathbb{N}^*$, on identifiera les espaces $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et \mathbb{R}^{n+p} par l'isomorphisme naturel.

I — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

I.1. Ensembles semi-algébriques

DÉFINITION I.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la classe des ensembles *semi-algébriques* de \mathbb{R}^n , notée \mathcal{SA}_n , comme la plus petite classe de parties de \mathbb{R}^n vérifiant

1. si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, alors

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n;$$

2. si $A, B \in \mathcal{SA}_n$, alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$ appartiennent à \mathcal{SA}_n .

En d'autres termes, un ensemble semi-algébrique A s'écrit comme une union finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0\} \quad \text{avec} \quad P, Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$

On peut également définir les ensembles *algébriques* de \mathbb{R}^n comme les ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P_1(x) = 0, \dots, P_r(x) = 0\} \quad \text{avec} \quad P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$

▷ **EXEMPLES.** Dans \mathbb{R} , la partie $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$ est un ensemble algébrique, donc il appartient à \mathcal{SA}_1 . Ces ensembles peuvent être représentés graphiquement. Par exemple, sur la figure 1, on a représenté les ensemble semi-algébriques

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y < 0\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0, y > 0\}.$$



FIGURE 1 – Représentation de A et B

PROPOSITION I.2. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in \mathcal{SA}_n$ et $B \in \mathcal{SA}_p$, alors $A \times B \in \mathcal{SA}_{n+p}$.

DÉFINITION I.3. Soit $A \in \mathcal{SA}_n$. Une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ est semi-algébrique si son graphe $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+p}$ est semi-algébrique.

- ▷ EXEMPLES. – Les fonctions polynomiales $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont semi-algébriques.
- On a $I := [-1, 1] \in \mathcal{SA}_1$. La fonction $f: x \in I \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est semi-algébrique car

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, 1 - x^2 - y^2 = 0\} \in \mathcal{SA}_2.$$

PROPOSITION I.4. Les éléments de \mathcal{SA}_1 sont exactement les unions finies de points et d'intervalles.

Preuve Il suffit de le vérifier pour les ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) > 0\}$$

avec $P \in \mathbb{R}[X]$ et c'est évident car le polynôme P admet un nombre fini de racines. Enfin, en remarquant que le complémentaire, l'union et l'intersection d'unions finies de points et d'intervalles sont aussi des unions finies de points et d'intervalles, c'est également vrai pour tout élément de \mathcal{SA}_1 .

Réciproquement, il suffit de montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, le singleton $\{a\}$ et l'intervalle ouvert $]a, b[$ appartiennent à \mathcal{SA}_1 et c'est le cas puisque

$$\{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - a = 0\} \quad \text{et} \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid -(x - a)(x - b) > 0\}. \quad \square$$

Le théorème suivant nous sera utile pour la suite, mais la démonstration est compliquée, donc nous ne la ferons pas.

THÉORÈME I.5 (TARSKI-SEIDENBERG). On note $p: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées, i. e.

$$p: \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Si $A \in \mathcal{SA}_{n+1}$, alors $p(A) \in \mathcal{SA}_n$.

I.2. Corps réels clos

Dans la suite, nous définirons la notion de structures o-minimales. Ces structures peuvent exister sur le corps des réels \mathbb{R} , mais on peut être un peu plus général en introduisant la notion de corps réels clos.

DÉFINITION I.6. Un corps *ordonné* est la donné d'un corps \mathbf{K} et d'une relation d'ordre totale \leq sur \mathbf{K} tels que, pour tous $x, y, z \in \mathbf{K}$, on ait

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

et

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \implies xy \geq 0.$$

- ▷ EXEMPLE. Tout sous-corps de \mathbb{R} est ordonné pour \leq .

DÉFINITION I.7. Un *corps réel clos* est un corps ordonné \mathbf{R} tel que

- tout élément positif de \mathbf{R} soit un carré dans \mathbf{R} ;
- tout polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré impair admette une racine dans \mathbf{R} .

- ▷ EXEMPLE. On peut montrer que l'ensemble des complexes algébriques sur \mathbb{Q}

$$\overline{\mathbb{Q}} := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Q}[X], P(z) = 0\}$$

est un sous-corps de \mathbb{C} algébriquement clos^{§1}. Par conséquent, le corps des réels algébriques

$$\mathbf{R} := \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$$

est un corps réel clos. En effet, vérifions les deux conditions. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x > 0$. Comme $x \in \mathbf{R}$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Comme $x > 0$, on pose $r := \sqrt{x} \in \mathbb{R}$. Comme $Q(r) = 0$ avec $Q := P(X^2) \in \mathbb{Q}[X]$, on a $r \in \mathbf{R}$ et $r^2 = x$. Par ailleurs, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\overline{\mathbb{Q}}$ est algébriquement clos, il admet n racines dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré impair, il admet une racine réelle. Donc il admet une racine dans \mathbf{R} .

On peut étendre toutes les définitions précédentes à un corps réel clos \mathbf{R} . On peut munir \mathbf{R}^n de la topologie euclidienne, comme pour \mathbb{R}^n . Dans la suite, on prendra souvent $\mathbf{R} = \mathbb{R}$.

II — STRUCTURES O-MINIMALES

II.1. Définition et exemples

DÉFINITION II.1 (*structure*). Une *structure étendant* un corps réel clos \mathbf{R} est une suite $\mathcal{S} := (\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où chaque élément \mathcal{S}_n est une classe de parties de \mathbf{R}^n vérifiant

- (O1) tout ensemble algébrique de \mathbf{R}^n est dans \mathcal{S}_n ;
- (O2) si $A, B \in \mathcal{S}_n$, alors $A \cup B \in \mathcal{S}_n$ et $\mathbf{R}^n \setminus A \in \mathcal{S}_n$;
- (O3) si $A \in \mathcal{S}_m$ et $B \in \mathcal{S}_n$, alors $A \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$;
- (O4) si $A \in \mathcal{S}_{n+1}$, alors $p(A) \in \mathcal{S}_n$ où $p: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est la projection sur les n premières coordonnées.

De plus, la structure \mathcal{S} est dite *o-minimale* si

- (O5) les éléments de \mathcal{S}_1 sont exactement les unions finies de singletons ou d'intervalles.

Les éléments de \mathcal{S}_n sont appelés les *sous-ensembles définissables* de \mathbf{R}^n .

La lettre o présente dans l'appellation « o-minimale » signifie « ordre ». Ces structures sont, en quelque sorte, minimales pour l'ordre et l'exemple suivant de structure o-minimale sur \mathbf{R} permet d'expliquer cette minimalité.

PROPOSITION II.2. La suite $(\mathcal{S}\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la plus petite structure o-minimale étendant \mathbf{R} .

Preuve Les axiomes (O1), (O2) et (O3) sont clairs. Le théorème de TARSKI-SEIDENBERG entraîne l'axiome (O4). L'axiome (O5) découle de la proposition I.4. Donc il s'agit d'une structure o-minimale.

Montrons qu'il s'agit de la plus petite. Soit $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une structure o-minimale étendant \mathbf{R} . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{S}\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n$. Soit $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. Il suffit de montrer que

$$A := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid P(x_1, \dots, x_n) > 0\} \in \mathcal{S}_n.$$

On note $p: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. L'ensemble

$$B := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_{n+1}^2 P(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0\}$$

est algébrique et appartient donc à \mathcal{S}_{n+1} . De plus, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \in p(B) &\iff \exists x_{n+1} \in \mathbf{R}, (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in B \\ &\iff \exists x_{n+1} \in \mathbf{R}, x_{n+1}^2 P(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0 \\ &\iff \exists x_{n+1} \in \mathbf{R}, P(x_1, \dots, x_n) = 1/x_{n+1}^2 \quad (\text{car } x_{n+1} \neq 0) \\ &\iff P(x_1, \dots, x_n) > 0 \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) \in A. \end{aligned}$$

D'où $A = p(B) \in \mathcal{S}_n$. Ensuite, comme la classe \mathcal{S}_n est une algèbre booléenne, le résultat est immédiat. \square

II.2. Fonctions définissables

À partir de maintenant, on fixe une structure o-minimale $\mathcal{S} := (\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étendant le corps des réels \mathbb{R} . Sans le repréciser à chaque fois, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles définissables de \mathbb{R}^n désigneront les éléments de la classe de parties \mathcal{S}_n .

§1. Ceci est un résultat général montré pp. 87–88 du livre de GOURDON [2].

DÉFINITION II.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ est définissable si son graphe est un ensemble définissable de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, i. e. $\Gamma(f) \in \mathcal{S}_{n+p}$.

▷ **EXEMPLES.** – Toute fonction polynomiale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définissable. En effet, son graphe est algébrique, donc il appartient à \mathcal{S}_{n+1} d'après l'axiome (O1).

– Montrons que la fonction $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas définissable. On observe que l'équation $\sin x = 0$ admet une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est « discret ». Plus précisément, on note $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée. Alors

$$p(\Gamma(\sin) \cap [\mathbb{R} \times \{0\}]) = \pi\mathbb{Z}.$$

Si la fonction \sin était définissable, alors son graphe $\Gamma(\sin)$ le serait et, comme $\mathbb{R} \times \{0\}$ est définissable, l'intersection $\Gamma(\sin) \cap [\mathbb{R} \times \{0\}]$ serait définissable, donc sa projection $\pi\mathbb{Z}$ serait définissable ce qui évidemment faux car ce n'est pas une union finie de singletons et d'intervalles.

PROPOSITION II.4. Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définissable. Alors A est définissable.

Preuve On note $p: \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n -premières coordonnées. Alors $A = p(\Gamma(f))$. Comme $\Gamma(f)$ est définissable, en considérant les projections successives $\mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^{n+p-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{R}^n$ et en appliquant p fois l'axiome (O4), l'ensemble A est définissable. \square

PROPOSITION II.5. L'image d'un ensemble définissable par une fonction définissable est définissable.

Preuve Soient $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définissable et $B \in \mathcal{S}_n$ un ensemble définissable de \mathbb{R}^n . On considère l'ensemble algébrique

$$\Delta := \{(z, x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \mid z = y\} \in \mathcal{S}_{n+p+n}.$$

Comme f est définissable, l'ensemble $\mathbb{R}^p \times \Gamma(f)$ est définissable. On en déduit que l'ensemble

$$C := \Delta \cap [\mathbb{R}^p \times \Gamma(f)] \cap [\mathbb{R}^p \times B \times \mathbb{R}^p]$$

est définissable. En notant $p: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ la projection sur les p premières coordonnées, on a $p(C) = f(B)$ et, en appliquant $n+p$ fois l'axiome (O4), on en déduit que l'ensemble $f(B)$ est définissable. \square

PROPOSITION II.6. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$. Alors la fonction f est définissable si et seulement si ses composantes $A \rightarrow \mathbb{R}$ sont définissables.

Preuve On suppose que la fonction f est définissable. Soit $i \in [1, p]$. On note $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ sa p -ième composante. Considérons

$$\Delta_i := \{(t, u, x, y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid (t, u) = (x, y_i)\} \in \mathcal{S}_{2n+p+1}.$$

et $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ la projection sur les $n+1$ premières coordonnées. Alors le graphe

$$\Gamma(f_i) = p(\Delta_i \cap [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Gamma(f)])$$

est définissable. Réciproquement, on suppose que les composantes $f_1, \dots, f_p: A \rightarrow \mathbb{R}$ de la fonction f sont définissables. On considère

$$\Theta := \{(x, y, x_1, y_1, \dots, x_p, y_p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^p \mid x = x_1 = \dots = x_p, y = (y_1, \dots, y_p)\} \in \mathcal{S}_{n+2p+np}$$

et $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ la projection sur les $n+p$ premières coordonnées. Alors le graphe

$$\Gamma(f) = p\left(\Theta \cap \prod_{i=1}^p [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^{i-1} \times \Gamma(f_i) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^{p-i}]\right)$$

est définissable. Cela montre l'équivalence. \square

PROPOSITION II.7. 1. La composition de deux fonctions définissables est définissable.

2. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions définissables $A \rightarrow \mathbb{R}$ est une \mathbb{R} -algèbre, i. e. la somme, le produit et le quotient de deux fonctions définissables sont définissables.

Preuve 1. Soient $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ et $C \subset \mathbb{R}^p$. Soient $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$ deux fonctions définissables. Montrons que la composée $g \circ f$ est définissable. On note

$$\Delta := \{(t, u, x, y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid (t, u) = (x, z)\} \in \mathcal{S}_{2m+2n+p}.$$

De plus, on note $p: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ la projection sur les $m+p$ premières coordonnées. Alors le graphe

$$\Gamma(g \circ f) = p(\Delta \cap [\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \Gamma(f) \times \mathbb{R}^p] \cap [\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \Gamma(g)])$$

est définissable ce qui implique que la fonction $g \circ f$ est définissable.

2. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définissables. Montrons que la somme $f + g$ est définissable. On considère la fonction semi-algébrique

$$\alpha: \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \longmapsto x + y. \end{cases}$$

Comme la fonction $(f, g): A \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est définissable, la composée $f + g = \alpha \circ (f, g)$ est définissable. On procède de même pour le produit. \square

COROLLAIRE II.8. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors la somme et le produit de deux fonctions définissables $A \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont définissables.

Le lemme suivant va beaucoup nous servir et, plus généralement, on peut aisément le généraliser à toute permutation d'indices : changer l'ordre des composantes ne change pas la définissabilité d'un ensemble.

LEMME II.9. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$ et $f: A \rightarrow B$ une fonction définissable. Alors

$$\Gamma' := \{(y, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in \Gamma(f)\}$$

est définissable. En particulier, si f est bijective, alors f^{-1} est définissable.

Preuve On reprend l'ensemble Δ de la preuve de la proposition II.5. On note $p: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ la projection sur les $p + n$ premières coordonnées. Alors l'ensemble

$$\Gamma' = p(\Delta \cap [B \times \Gamma(f)]) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$$

est définissable. \square

III — DÉCOMPOSITION CELLULAIRE

III.1. Décomposition en cellules définissables

On munit les espaces \mathbb{R}^n de leur topologie euclidienne canonique.

DÉFINITION III.1. On définit les *décompositions en cellules définissables* (ou dcd) de \mathbb{R}^n par induction sur n .

1. Une dcd de \mathbb{R} est une partition finie $\{C_1, \dots, C_k\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de \mathbb{R} telle que chaque partie C_i soit un singleton ou un intervalle ouvert.

2. Pour $n \geq 2$, une dcd $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ de \mathbb{R}^n est la donnée d'une dcd \mathcal{C}' de \mathbb{R}^{n-1} et, pour toute partie $C \in \mathcal{C}'$, d'un entier $\ell_C \geq 1$ et de fonctions $\zeta_{C,1} < \dots < \zeta_{C,\ell_C}: C \rightarrow \mathbb{R}$ définissables et continues. Les éléments de \mathcal{C} sont alors les bandes et les graphes

$$[\zeta_{C,i}, \zeta_{C,i+1}[:= \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in C, \zeta_{C,i}(x') < x_n < \zeta_{C,i+1}(x')\} \quad \text{et} \quad \Gamma(\zeta_{C,i}),$$

pour $C \in \mathcal{C}'$ et $i \in [0, \ell_C]$ en posant $\zeta_{C,0} := -\infty$ et $\zeta_{C,\ell_C+1} := +\infty$.

Les éléments C d'une dcd \mathcal{C} de \mathbb{R}^n sont appelées des *cellules*.

PROPOSITION III.2. Les éléments d'une dcd de \mathbb{R}^n sont définissables.

Preuve Cela découle des axiomes des structures o-minimales. On montre le résultat par induction sur n . Il suffit de montrer que, si une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est définissable, alors l'ensemble $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ est définissable. La proposition en découlera.

Montrons ce dernier résultat. Soit $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable. On note $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Comme $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ est semi-algébrique et donc définissable par la propriété II.2, l'ensemble

$$\{x \in A \mid f(x) > 0\} = p(\Gamma(f) \cap [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*])$$

est définissable. \square

DÉFINITION III.3. On définit la dimension des cellules d'une dcd de \mathbb{R}^n par induction sur n .

1. La dimension d'un singleton vaut 0 et la dimension d'un intervalle vaut 1.

2. Pour $n \geq 2$, alors la dimension d'une cellule C d'une dcd de \mathbb{R}^n vaut

- la dimension de $p(C)$ si C est un graphe;
- la dimension de $p(C)$ plus 1 si C est une bande

où $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ est la projection sur les $n - 1$ premières coordonnées.

La dimension d'une cellule C est notée $\dim C \in \mathbb{N}$.

- ◊ REMARQUE. On remarque qu'une cellule de \mathbb{R}^n est de dimension n si et seulement si elle est ouverte dans \mathbb{R}^n . On peut montrer facilement ce résultat par induction sur n .

PROPOSITION III.4. Soit C une cellule d'une dcd de \mathbb{R}^n . Alors il existe un homéomorphisme définissable

$$\theta_C: C \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim C}$$

Preuve On procède par induction sur n .

• *Initialisation.* On suppose $n = 1$. Un singleton est bien homéomorphe à $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. De plus, l'intervalle ouvert $] -1, 1[$ est définissablement homéomorphe à \mathbb{R} par l'application

$$\phi: \begin{cases}] -1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \end{cases}$$

donc un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ l'est pas l'application

$$\theta_{]a,b[}: \begin{cases}]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \phi\left(\frac{2x}{b-a} - 1\right). \end{cases}$$

Par ailleurs, l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ est définissablement homéomorphe à \mathbb{R} par l'application

$$\psi: \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto x - 1/x, \end{cases}$$

donc un intervalle ouvert $]a, +\infty[$ avec $a > -\infty$ l'est pas l'application

$$\theta_{]a,+\infty[}: \begin{cases}]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \psi(x - a). \end{cases}$$

On procède de même pour un intervalle ouvert $] -\infty, a[$ avec $a < +\infty$. Enfin, l'espace \mathbb{R} est bien définissablement homéomorphe à \mathbb{R} par l'application $\text{Id}_{\mathbb{R}}$. On a ainsi traité tous les cas ce qui termine l'initialisation ^{S2}.

• *Hérédité.* Soit $n \geq 2$. On suppose le résultat vrai pour des cellules d'une dcd de \mathbb{R}^{n-1} . Soit C une cellule d'une dcd de \mathbb{R}^n . On note $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la projection sur les $n - 1$ premières coordonnées. Alors $p(C)$ est une cellule d'une dcd de \mathbb{R}^{n-1} . Par l'hypothèse de récurrence, il existe un homéomorphisme définissable $\theta_D: D \rightarrow \mathbb{R}^{\dim D}$. Pour tout $x \in C$, on notera $x = (x', x_n)$ avec $x' \in D$.

On suppose que la cellule C est le graphe d'une fonction continue définissable $\zeta: D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors l'application

$$\theta_C: \begin{cases} C \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim C} = \mathbb{R}^{\dim D}, \\ x \longmapsto \theta_D(x') \end{cases}$$

est bien un homéomorphisme définissable

On suppose que la cellule C est une bande $]\zeta, \eta[$ entre deux fonctions définissables $\zeta < \eta: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Si les deux fonctions sont finies, alors la cellule C est définissablement homéomorphe à $\mathbb{R}^{\dim C} = \mathbb{R}^{\dim D+1}$ par l'application

$$\theta_C: \begin{cases} C \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim C}, \\ (x', x_n) \longmapsto \left(\theta_D(x'), \phi\left(\frac{2x_n}{\eta(x') - \zeta(x')} - 1\right) \right). \end{cases}$$

Si $\zeta > -\infty$ et $\eta = +\infty$, alors on pose

$$\theta_C: \begin{cases} C \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim C}, \\ x \longmapsto (\theta_D(x'), \psi(x_n - \zeta(x'))). \end{cases}$$

On procède de même si $\zeta = -\infty$ et $\eta < +\infty$. Enfin, si les deux fonctions sont infinies, on pose

$$\theta_C: \begin{cases} C \longrightarrow \mathbb{R}^{\dim C}, \\ x \longmapsto (\theta_D(x'), x_n). \end{cases}$$

On a ainsi traité tous les cas. □

^{S2}. Ces applications sont bien des homéomorphismes. Par exemple, la bijection réciproque de ϕ est la fonction $y \mapsto y/(1+y^2)^{1/2}$ qui est bien continue de \mathbb{R} dans $] -1, 1[$. De même, la bijection réciproque de ψ est la fonction $y \mapsto \frac{1}{2}(y + [y^2 + 4]^{1/2})$. Au passage, notons que, si on se place dans un corps réel clos \mathbf{R} , la racine carrée d'un nombre positif existe bien et ces bijections fonctionnent toujours.

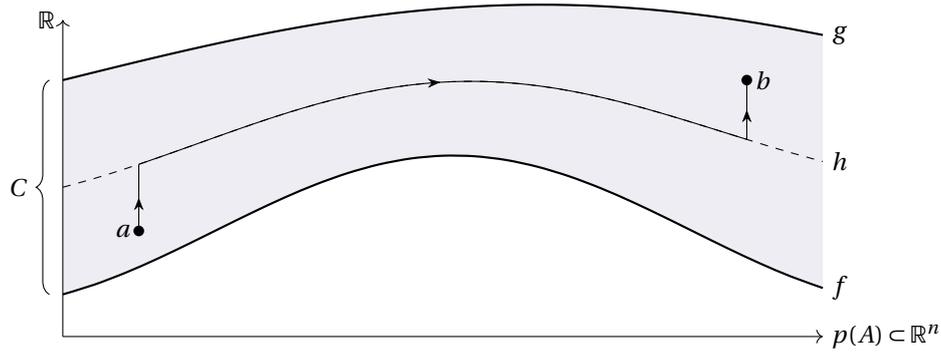


FIGURE 2 – Construction d'un chemin dans une bande

DÉFINITION III.5. Un ensemble définissable A est dit *définissablement connexe* si, pour tous ouverts définissables disjoints U et V de A tels que $A = U \cup V$, on a $A = U$ ou $A = V$.

Un ensemble définissable A est dit *définissablement connexe par arcs* si, pour tous $a, b \in A$, il existe une fonction continue et définissable $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

- ▷ **EXEMPLES.** – La connexité par arcs définissable implique la connexité par arcs classique.
 – La connexité classique implique la connexité définissable. Par exemple, le segment $[0, 1]$ est connexe, donc il est définissablement connexe.

PROPOSITION III.6. Toute cellule d'une dcd de \mathbb{R}^n est définissablement connexe par arcs.

Preuve On procède par induction sur la dimension n . Le cas $n = 1$ est trivial. Soient $n \geq 1$ un entier et A une cellule de \mathbb{R}^{n+1} . On note $p: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Sa projection $p(A)$ est une cellule de \mathbb{R}^n , donc elle est définissablement connexe par arcs. On suppose que la cellule A est une bande $]f, g[$ entre deux fonctions continues définissables $f, g: p(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $a, b \in A$. Comme $p(A)$ est définissablement connexe par arcs, il existe un chemin continu définissable $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow p(A)$ entre $\tilde{a} := p(a)$ et $\tilde{b} := p(b)$. On considère la fonction continue définissable $h := \frac{1}{2}(f + g)$. Alors les fonctions

$$\alpha: \begin{cases} [0, 1] \rightarrow A, \\ t \mapsto (1-t)a + t(\tilde{a}, h(\tilde{a})) \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta: \begin{cases} [0, 1] \rightarrow A, \\ t \mapsto tb + (1-t)(\tilde{b}, h(\tilde{b})). \end{cases}$$

sont bien des chemins continus définissables joignant respectivement a à $(\tilde{a}, h(\tilde{a}))$ et $(\tilde{b}, h(\tilde{b}))$ à b dans A ^{§3}. De plus, la fonction

$$\gamma: \begin{cases} [0, 1] \rightarrow A, \\ t \mapsto (\tilde{\gamma}(t), h(\tilde{\gamma}(t))) \end{cases}$$

est un chemin continu définissable joignant $(\tilde{a}, h(\tilde{a}))$ à $(\tilde{b}, h(\tilde{b}))$ et il est à valeurs dans la bande A . En considérant la concaténation (cf. figure 2) des trois chemins α , γ et β , on obtient un chemin continu définissable joignant a à b dans A .

Il reste à montrer le résultat dans le cas où la cellule A est un graphe et c'est immédiat en reprenant les arguments présents ci-dessus. Ceci termine l'induction. \square

III.2. Théorème de décomposition cellulaire

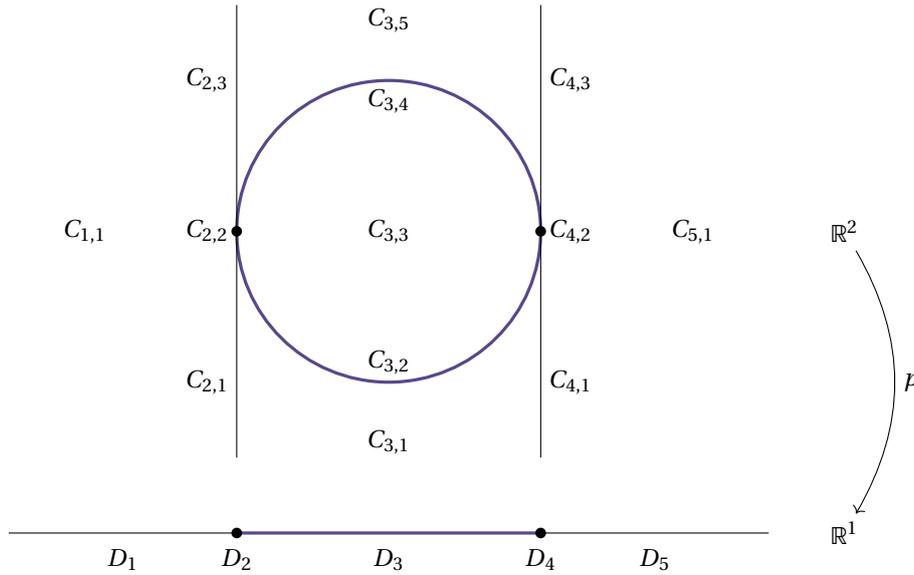
Tout d'abord, on admet le lemme suivant.

THÉORÈME III.7 (de monotonie). Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable. Alors il existe une subdivision finie $a = a_0 < \dots < a_k = b$ telle que, sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, la fonction f est continue et soit constante, soit strictement monotone.

On admet le théorème principale de cette lecture dirigée, technique à montrer^{§4}, qui permet de décomposer des ensembles définissables en union cellules.

^{§3}. Ces chemins explicites fonctionnent si on se place dans \mathbb{R} et également si on est dans un corps réels clos \mathbf{R} car alors la notation $]0, 1[$ désigne l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$.

^{§4}. Une démonstration est donnée pp. 19–23 du livre de COSTE [1].


 FIGURE 3 – Une dcd adaptée à la sphère \mathbb{S}^1

THÉORÈME III.8 (de décomposition cellulaire). Soient $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles définissables. Alors il existe une dcd de \mathbb{R}^n telle que chaque ensemble A_i soit une union finie de cellules.

On dira qu'une telle dcd de \mathbb{R}^n est *adaptée* aux ensembles A_1, \dots, A_k . Donnons également un théorème utile pour la suite qui se prouve par induction avec le théorème de décomposition cellulaire.

THÉORÈME III.9. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable de \mathbb{R}^n et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définissable. Alors il existe une dcd de \mathbb{R}^n adaptée à A telle que, pour toute cellule C contenue dans A , la restriction $f|_C$ soit continue.

▷ **EXEMPLES.** La figure 3 une dcd adaptée à la sphère unité \mathbb{S}^1 de \mathbb{R}^2 . Pour construire une telle dcd, on commence par projeter la sphère dans \mathbb{R}^1 en choisissant la projection canonique p . On construit alors une dcd de cette projection et puis, pour chaque cellule de \mathbb{R}^1 , on construit une cellule de \mathbb{R}^2 : soit une bande, soit un graphe. Ici, la classe de parties $\{D_i \mid 1 \leq i \leq 5\}$ forment bien une cad adaptée au segment $[-1, 1]$, *i. e.* la sphère \mathbb{S}^0 : les ensembles D_i sont soit des singletons soit des intervalles ouverts.

De même, la classe de parties constitué des ensembles $C_{i,j}$ forment également une cad adaptée à \mathbb{S}^1 . Par exemple, la cellule $C_{3,4}$ est le graphe de la fonction définissable et continue

$$\zeta_{3,4}: \begin{cases} D_3 =]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

et, de même, la cellule $C_{3,2}$ est le graphe de la fonction $\zeta_{3,2} := -\zeta_{3,4}: D_3 \rightarrow \mathbb{R}$. La cellule $C_{3,2}$ est la bande $]\zeta_{3,2}, \zeta_{3,4}[$, *i. e.* la boule ouverte unité de \mathbb{R}^2 . Donnons un dernier exemple, la cellule $C_{2,2}$ est réduite au point $(-1, 0)$ et est, en fait, le graphe de la fonction

$$\zeta_{2,2}: \begin{cases} D_2 = \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto 0. \end{cases}$$

Le théorème de décomposition cellulaire est très puissant et il va se révéler utile dans toute la suite. Le fait de pouvoir décomposer un ensemble définissable en cellule permet de le manipuler plus facilement.

IV — COMPOSANTES CONNEXES

IV.1. Sélection de courbe

THÉORÈME IV.1 (du choix définissable). Soit A un ensemble définissable de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. On note $p: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la projection sur les m premières coordonnées. Alors il existe une fonction définissable $f: p(A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x \in p(A), \quad (x, f(x)) \in A.$$

Preuve En considérant des projections successives

$$\mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

on peut supposer que $n = 1$. Par le théorème de décomposition cellulaire, considérons une dcd de \mathbb{R}^{m+1} adaptée à A . Alors A est une union de cellules contenues dans A , donc sa projection $p(A)$ est une union de projection par p de cellules contenues dans A . Pour simplifier, on peut supposer que A est une cellule de \mathbb{R}^{m+1} de sorte que $p(A)$ soit une cellule de \mathbb{R}^m .

- Si A est le graphe d'une fonction définissable $\zeta_i : p(A) \rightarrow \mathbb{R}$, on prend $f := \zeta_i$.
- Si A est une bande $] \zeta_i, \zeta_{i+1}[$ où les deux fonctions sont finies, on prend $f := \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_{i+1})$.
- Si A est une bande $] \zeta_i, +\infty[$ où la fonction ζ_i est finie, on prend $f := \zeta_i + 1$.
- Si A est une bande $] -\infty, \zeta_i[$ où la fonction ζ_i est finie, on prend $f := \zeta_i - 1$.

On a ainsi traité tous les cas. □

LEMME IV.2 (*de sélection de courbe*). Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable de \mathbb{R}^n et $b \in \overline{A}$. Alors il existe une fonction continue définissable $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(0) = b$ et $\gamma(]0, 1[) \subset A$.

Preuve On considère l'ensemble

$$X := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid x \in A, \|x - b\| < t\}.$$

On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée. Montrons que $p(X) =]0, +\infty[$. L'inclusion directe étant claire, soit $t > 0$. Comme $b \in \overline{A}$, il existe $x \in A$ tel que $\|x - b\| < t$. Alors $(t, x) \in X$, donc $t \in p(X)$.

Comme X est un ensemble définissable de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ car $\|x - b\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - b_i)^2$, le théorème précédent assure qu'il existe une fonction définissable $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall t > 0, f(t) \in A \text{ et } \|f(t) - b\| < t.$$

D'après le théorème de monotonie, en restreignant la fonction f à un bon intervalle ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction continue définissable $\delta :]0, \varepsilon[\rightarrow A$ telle que

$$\forall t \in]0, \varepsilon[, \|\delta(t) - b\| < t.$$

Prolongeons cette fonction en une fonction continue $\tilde{\delta} :]0, \varepsilon[\rightarrow A$ en posant $\tilde{\delta}(0) = b$. Elle est bien continue car, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, on a

$$\|\tilde{\delta}(t) - \tilde{\delta}(0)\| = \|\delta(t) - b\| < t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

et elle est clairement définissable : on rajoute un point à son graphe. On considère alors la fonction

$$\gamma : \begin{cases}]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \longmapsto \tilde{\delta}(t\varepsilon) \end{cases}$$

qui satisfait bien les hypothèses. □

IV.2. Composantes connexes

THÉORÈME IV.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable. Alors il existe une unique partition finie $\{A_1, \dots, A_k\}$ telle que chaque partie A_i soit non vide, ouverte et fermée dans A et définissablement connexe par arcs.

De telles parties A_i sont appelées les *composantes définissablement connexes* de A .

Preuve • *Existence*. On considère une dcd de \mathbb{R}^n adaptée à A . On dira qu'une cellule C est *adjacente* à une autre cellule D si $C \cap \overline{D} \neq \emptyset$ et on notera $C < D$.

Soient C et D deux cellules telles que $C < D$. Montrons que tout point $x \in C$ peut être joint à tout point $y \in D$ par un chemin continu définissable à valeurs dans $C \cup D$. Soit $c \in C \cap \overline{D}$. Par le lemme de sélection des courbes, il existe une fonction continue définissable $\gamma :]0, 1[\rightarrow C \cup D$ telle que $\gamma(0) = c$ et $\gamma(]0, 1[) \subset D$. On note $d := \gamma(1/2)$. Alors les points c et d sont joints par une fonction continue définissable

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases}]0, 1[\longrightarrow C \cup D, \\ t \longmapsto \gamma(t/2). \end{cases}$$

Comme chaque cellule est définissablement homéomorphe à \mathbb{R}^m , pour un certain entier $m \in \mathbb{N}$, qui est définissablement connexe par arcs, tout point $x \in C$ peut être joint à c par une fonction continue définissable à valeurs dans C et tout point $y \in D$ peut être joint à d par une fonction continue définissable à valeurs dans D . En considérant les bonnes compositions, on a montré le résultat.

Deux cellules C et D contenues dans A seront dites *équivalentes* s'il existe des cellules C_0, \dots, C_{2k} incluses dans A vérifiant $C = C_0 < C_1 > C_2 < \dots > C_{2k} = D$. On notera $C \sim D$. Alors la relation \sim sur les cellules contenues dans A est bien une relation d'équivalence. On note $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ les classes d'équivalences^{§5}. Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note $A_i := \bigcup_{C \in \mathcal{E}_i} C$. Alors les ensembles A_i forment une partition finie de A en ensembles définissables. Le point précédent montre alors que chaque partie A_i est définissablement connexe par arcs. De plus, elles sont clairement non vides. Enfin, montrons que toute partie A_i est ouverte et fermée dans A . Si une cellule $C \subset A$ vérifie $C \cap \overline{A_i} \neq \emptyset$, alors $C < A_i$, donc $C \in \mathcal{E}_i$, donc $C \subset A_i$. Montrons que A_i est fermé dans A . Soit $x \in A \cap \overline{A_i}$. Il existe une cellule $C \subset A$ tel que $x \in C$, donc $C \cap \overline{A_i} \neq \emptyset$, donc $C \subset A_i$, donc $x \in A_i \subset A_i \cap A$. D'où $A \cap \overline{A_i} = A_i \cap A$ ce qui montre que A_i est fermé dans A . De plus, comme les parties A_i forment une partition finie de A , elles sont également ouvertes. Cela termine l'existence.

- *Unicité.* Soit $\{B_1, \dots, B_\ell\}$ une autre telle partition. Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On a

$$A_i = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} (A_i \cap B_j)$$

où chaque partie $A_i \cap B_j$ est définissable, ouverte et fermée dans A . Comme A_i est non vide et définissablement connexe, il existe un unique entier $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ tel que $A_i = A_i \cap B_j$, donc $A_i \subset B_j$. De même, pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, il existe un unique entier $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $B_j \subset A_i$. Ainsi on a $k = \ell$ et les deux partitions coïncident. \square

Intuitivement, le dernier théorème assure qu'un ensemble définissable d'une structure o-minimale admet qu'un nombre fini de composantes définissablement connexes, *i. e.* il ne peut pas être composé d'une infinité de morceaux.

- ◊ REMARQUE. Comme une cellule est définissablement connexe, il vient que le nombre de composantes connexes d'un ensemble définissable A ne peut être supérieur au nombre de cellules contenues dans A d'une dcd de \mathbb{R}^n adaptée à A .

| COROLLAIRE IV.4. Un ensemble définissable définissablement connexe est définissablement connexe par arcs.

- ▷ EXEMPLE. Considérons l'ensemble

$$\Gamma := \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, 1[\} \cup \{(0, 0)\}.$$

On peut montrer qu'il est connexe et non connexe par arcs. Montrons qu'il n'est pas définissable. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est définissable. Comme il est connexe, il est définissablement connexe, donc il est définissablement connexe par arcs, donc il est connexe par arcs ce qui est impossible. Cet ensemble est l'exemple classique d'un ensemble non définissable. De même pour l'ensemble $\overline{\Gamma}$.

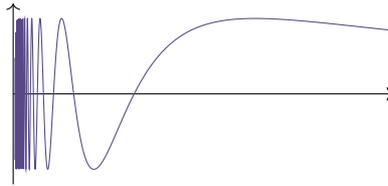


FIGURE 4 – Représentation graphique de l'ensemble $\Gamma \notin \mathcal{S}_2$, un « monstre topologique »

V — NOTION DE DIMENSION

V.1. Généralisation de la dimension d'une cellule

Nous avons déjà défini la notion de dimension pour une cellule dans la définition III.3. Il serait intéressant de généraliser cette notion à tout ensemble définissable tout en vérifiant la cohérence avec cette précédente définition. En première idée, on pourrait dire que la dimension d'un ensemble définissable de \mathbb{R}^n est le maximum des dimensions des cellules contenues dans A . Mais cette définition dépend de la dcd de \mathbb{R}^n choisie et il faudrait montrer qu'elle n'en dépend en fait pas. Ainsi on donne la définition suivante.

| DÉFINITION V.1. La dimension d'un ensemble définissable $A \subset \mathbb{R}^n$, notée $\dim A$, est la borne supérieure de l'ensemble des entiers $d \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une fonction définissable injective de \mathbb{R}^d dans A .

§5. Comme une dcd est une partition finie, il n'y a bien qu'un nombre fini de classes.

CONVENTION. La borne supérieure de l'ensemble vide est $-\infty$.

- ◊ REMARQUE. *A priori*, la dimension peut valoir $+\infty$, mais ce n'est pas le cas en réalité. De plus, ce qui serait bien, c'est que cette définition coïncide avec la précédente et c'est également le cas.

NOTATION. On note $\widetilde{\dim} C$ l'ancienne définition de la dimension d'une cellule C .

LEMME V.2. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide et $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ une injection définissable. Alors l'image $f(A)$ est d'intérieur non vide.

Preuve Montrons ce lemme par induction sur n . Pour $n = 1$, comme A est d'intérieur non vide, il est infini. Comme f est définissable et injective, l'image $f(A) \subset \mathbb{R}$ est définissable et infinie, donc elle contient un intervalle. Son intérieur est donc non vide.

Soit $n \geq 2$. On suppose le lemme pour tout $m < n$. Quitte à prendre une dcd adaptée à A , par le théorème de continuité par morceaux III.9, on peut supposer que la fonction f est continue. Par l'absurde, supposons que $f(A)$ est d'intérieur vide. On considère une dcd de \mathbb{R}^n adaptée à $f(A)$. Alors $f(A)$ ne contient aucune cellule ouverte, donc il existe des cellules non ouvertes C_1, \dots, C_k telles que

$$f(A) = C_1 \cup \dots \cup C_k.$$

On considère une dcd de \mathbb{R}^n adaptée aux ensembles $f^{-1}(C_i)$. Comme

$$A = f^{-1}(C_1) \cup \dots \cup f^{-1}(C_k)$$

est d'intérieur non vide, une partie $f^{-1}(C_i)$, disons $f^{-1}(C_1)$, contient une cellule ouverte B . Alors $f: B \rightarrow C_1$ est injective, continue et définissable. Comme B est une cellule ouverte, elle est définissable homéomorphe à \mathbb{R}^n . De plus, la cellule C_1 est définissablement homéomorphe à \mathbb{R}^m avec $m := \widetilde{\dim} C \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ^{S6}. En composant ces trois applications, on obtient une fonction continue, définissable et injective $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Contredisons l'injectivité de g . On note $\mathbf{0}_{n-m} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-m}$ et on considère

$$\tilde{g}: \begin{cases} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ x \mapsto g(\mathbf{0}_{n-m}, x). \end{cases}$$

L'application \tilde{g} est continue, injective et définissable. Par l'hypothèse de récurrence, l'image $\tilde{g}(\mathbb{R}^m)$ est d'intérieur non vide. Soit $c := \tilde{g}(b) \in \mathbb{R}^m$ un point de l'intérieur de $\tilde{g}(\mathbb{R}^m)$. Comme l'application g est continue, il existe un voisinage V de $\mathbf{0}_{n-m}$ dans \mathbb{R}^{n-m} telle que

$$\forall z \in V, \quad g(z, b) \in \tilde{g}(\mathbb{R}^m).$$

Soit $z_0 \in V \setminus \{\mathbf{0}_{n-m}\}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $g(z_0, b) = \tilde{g}(x)$, donc $g(z_0, b) = g(\mathbf{0}_{n-m}, x)$ ce qui contredit l'injectivité de g . On en déduit que l'image $f(A)$ est d'intérieur non vide ce qui termine la récurrence. \square

COROLLAIRE V.3. 1. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on a $\dim \mathbb{R}^d = d$.

2. Soit C une cellule de \mathbb{R}^n . Alors $\widetilde{\dim} C = \dim C$, i. e. les deux notions de dimensions coïncident sur les cellules.

Preuve 1. Si $e > d$, il n'existe pas d'injection définissable de \mathbb{R}^e dans \mathbb{R}^d , donc $\dim \mathbb{R}^d \leq d$. S'il existait une telle injection définissable $i: \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^d$ et on pose

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{e-d}, \\ x \mapsto (x, \mathbf{0}_{e-d}), \end{cases}$$

alors la composée $f := g \circ i: \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^e$ est injective et définissable et son image $f(\mathbb{R}^e) = \mathbb{R}^d \times \{\mathbf{0}_{e-d}\}$ est d'intérieur vide dans \mathbb{R}^e ce qui contredit le lemme. Enfin, l'identité

$$\text{Id}_{\mathbb{R}^d}: \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ x \mapsto x \end{cases}$$

est injective et définissable ce qui montre finalement l'égalité $\dim \mathbb{R}^d = d$.

2. On note $e := \widetilde{\dim} C$. Par la proposition III.4, il existe un homéomorphisme définissable $\theta_C: C \rightarrow \mathbb{R}^e$. En particulier, la réciproque $\theta_C^{-1}: \mathbb{R}^e \rightarrow C$ est injective et définissable, donc

$$e = \widetilde{\dim} C \leq \dim C.$$

Montrons l'égalité. Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f: \mathbb{R}^d \rightarrow C$ une injection définissable. Alors la composée $\theta_C \circ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ est une injection définissable, donc $d \leq \dim \mathbb{R}^e = e$. En passant à la borne supérieure sur l'entier $d \in \mathbb{N}$, on obtient l'autre inégalité. \square

^{S6}. Comme C_1 est une cellule non ouverte, on a bien $m < n$.

V.2. Propriétés sur la dimension

Cette notion de dimension est alors assez intuitive. Par exemple, une droite de \mathbb{R}^2 est bien de dimension une car elle est isomorphe à \mathbb{R} et une application linéaire est définissable. De plus, par le point 1 précédent, cela coïncide avec la notion de dimension d'espace vectoriel. On s'attend également aux résultats suivants.

PROPOSITION V.4. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles définissables de \mathbb{R}^n . Alors

1. si $A \subset B$, alors $\dim A \leq \dim B$;
2. on a $\dim A < +\infty$.
3. si $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction définissable, alors $\dim g(A) \leq \dim A$. De plus, si g est injective, alors

$$\dim g(A) = \dim A;$$
4. on a $\dim A \cup B = \max(\dim A, \dim B)$;
5. si $C \subset \mathbb{R}^p$ est un ensemble définissable de \mathbb{R}^p , alors $\dim A \times C = \dim A + \dim C$.

Preuve 1. On suppose $\dim A < +\infty$. Il existe une injection définissable $f: \mathbb{R}^{\dim A} \rightarrow A$. Alors la co-restriction

$$\tilde{f}: \begin{cases} \mathbb{R}^{\dim A} \rightarrow B, \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

est aussi une injection définissable, donc $\dim A \leq \dim B$. Si $\dim A = +\infty$, on montre de même que $\dim B = +\infty$. Dans les deux cas, l'inégalité est vraie.

2. Comme $A \subset \mathbb{R}^n$, on a $\dim A \leq \dim \mathbb{R}^n = n < +\infty$.

3. On suppose d'abord que g est injective. Il existe une injection définissable $f: \mathbb{R}^{\dim A} \rightarrow A$. Alors la composée $g \circ f: \mathbb{R}^{\dim A} \rightarrow g(A)$ est une injection définissable, donc $\dim A \leq \dim g(A)$. En considérant la bijection définissable

$$\tilde{g}: \begin{cases} A \rightarrow g(A), \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$$

et une injection définissable $h: \mathbb{R}^{\dim g(A)} \rightarrow g(A)$, la composée $\tilde{g}^{-1} \circ h: \mathbb{R}^{\dim g(A)} \rightarrow A$ est une injection définissable, donc $\dim g(A) \leq \dim A$ ce qui montre l'égalité.

On ne suppose plus que g est injective. On note $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Comme g est définissable, le lemme II.9 assure que l'ensemble

$$B := \{(y, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in \Gamma(g)\}$$

est définissable dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. D'après le théorème IV.1, il existe une fonction définissable $f: p(B) = g(A) \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\Gamma(f) \subset B$. Pour tout $x \in A$, on a $(g(x), f(g(x))) \in B$, donc il existe $y \in A$ tel que $(g(x), f(g(x))) = (g(y), y)$, donc

$$g(f(g(x))) = g(y) = g(x) \quad \text{et} \quad f(g(x)) = y \in A.$$

On en déduit que $g \circ f = \text{Id}_{g(A)}$ et $f(g(A)) \subset A$. La fonction f est donc injective. Le cas précédent et le point 1 donnent alors $\dim g(A) = \dim f(g(A)) \leq \dim A$.

4. Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, le point 1 donne

$$\max(\dim A, \dim B) \leq \dim A \cup B.$$

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f: \mathbb{R}^d \rightarrow A \cup B$ une injection définissable. On considère une dcd adaptée à $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$. Alors $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$ contient une cellule de dimension d . Donc $\dim f^{-1}(A) \geq d$ et $\dim f^{-1}(B) \geq d$. Comme la fonction f est injective, on a $\dim A \geq d$ et $\dim B \geq d$, donc $\max(\dim A, \dim B) \geq d$. En passant à la borne supérieure sur l'entier d , on obtient que

$$\max(\dim A, \dim B) \geq \dim A \cup B$$

ce qui montre l'égalité.

5. Quitte à considérer deux dcd de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m adaptées respectivement à A et C et à utiliser le point précédent, on peut supposer que A et B sont des cellules. Comme $A \times C$ est définissablement homéomorphe à $\mathbb{R}^{\dim A} \times \mathbb{R}^{\dim C}$, le point 2 donne

$$\dim A \times C = \dim \mathbb{R}^{\dim A} \times \mathbb{R}^{\dim C} = \dim \mathbb{R}^{\dim A + \dim C} = \dim A + \dim C. \quad \square$$

◊ REMARQUE. La réciproque du point 3 est fautive : deux ensembles définissables ayant la même dimension ne sont pas nécessairement en bijection définissable. Par exemple, il suffit de considérer les ensembles algébriques de dimension zéro $A := \{0\}$ et $B := \{0, 1\}$.

VI — TRIANGULATION

VI.1. Simplexes

Nous allons avoir besoin de généraliser la notion de triangle dans un espace de dimension quelconques puisqu'on va vouloir trianguler un ensemble. Par exemple, on veut qu'en dimension trois, un « triangle » soit en fait une pyramide. Les simplexes interviennent alors.

DÉFINITION VI.1. Soit (a_0, \dots, a_d) une famille libre de \mathbb{R}^n engendrant un espace de dimension d . Le d -simplexe ouvert d'arêtes a_0, \dots, a_d est l'ensemble

$$]a_0, \dots, a_d[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in]0, 1], \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^d \lambda_i a_i\}.$$

Le d -simplexe fermé d'arêtes a_0, \dots, a_d est l'ensemble

$$[a_0, \dots, a_d] := \overline{]a_0, \dots, a_d[} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in [0, 1], \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^d \lambda_i a_i\}.$$

◊ REMARQUE. Ces notations coïncident avec les intervalles ouverts et fermés quand $d = n = 1$. En effet, le simplexe $]a, b[$ est bien l'intervalle ouvert $]a, b[$. Il en va de même avec les simplexes fermés. De plus, on remarque qu'un simplexe $[a_0, \dots, a_d]$ n'est autre que l'enveloppe convexe de la partie $\{a_0, \dots, a_d\}$.

▷ EXEMPLE. Voici des exemples de d -simplexes pour des dimensions d valant de zéro à trois.

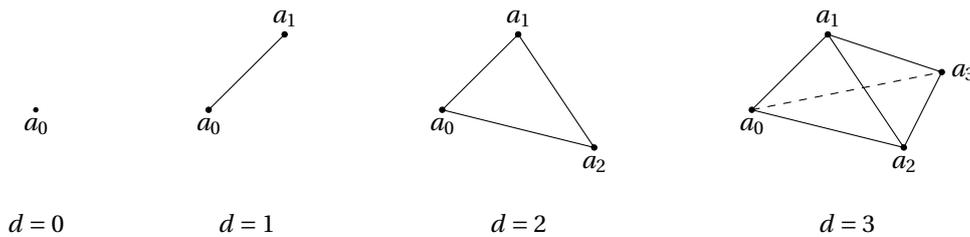


FIGURE 5 – Des d -simplexes fermés de \mathbb{R}^3 (par exemple)

DÉFINITION VI.2. Une face d'un simplexe $\bar{\sigma} = [a_0, \dots, a_d]$ est un simplexe $\bar{\tau} = [b_0, \dots, b_e]$ tel que

$$\{b_0, \dots, b_e\} \subset \{a_0, \dots, a_d\}.$$

Un complexe simplicial fini de \mathbb{R}^n est un ensemble fini $\mathcal{K} := \{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_p\}$ de simplexes de \mathbb{R}^n qui vérifient, pour tous $i, j \in [1, p]$, l'intersection $\bar{\sigma}_i \cap \bar{\sigma}_j$ ait une face commune de $\bar{\sigma}_i$ et $\bar{\sigma}_j$. On pose

$$|\mathcal{K}| = \bigcup_{i=1}^p \bar{\sigma}_i.$$

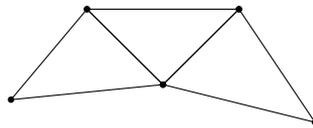


FIGURE 6 – Un complexe simplicial fini de \mathbb{R}^2

◊ REMARQUE. Par commodité, on considérera que, si un simplexe appartient à un complexe simplicial fini \mathcal{K} , alors toutes ses faces appartiennent à \mathcal{K} .

DÉFINITION VI.3. Un polyèdre de \mathbb{R}^n est une partie de \mathbb{R}^n de la forme $|\mathcal{K}|$ où \mathcal{K} est un complexe simplicial fini de \mathbb{R}^n . Soient P un polyèdre de \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n \setminus P$ tel que $[a, x] \cap P = \{x\}$ pour tout $x \in P$. Le cône de base P et sommet a est l'ensemble

$$B * a := \{tx + (1-t)a \mid x \in P, t \in [0, 1]\}.$$

VI.2. Lemmes préliminaires

LEMME VI.4. Soient $n \geq 2$ un entier et $W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable. Pour $s \in \mathbb{R}^m$, on pose

$$W_s := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (s, y) \in W\}.$$

On suppose que $\dim W_s < n$ pour $s \in \mathbb{R}^m$. Alors il existe une fonction polynomiale $v' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ de degré au plus m telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}^m$, l'ensemble

$$\{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, v'(x_1)) \in W_s\}$$

soit fini.

Preuve On procède par induction sur n .

• *Initialisation.* On suppose que $n = 2$. Soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble définissable de dimension une. Une dcd de \mathbb{R}^2 adaptée à V décompose V en une union finie de points, bande verticale ouverte et graphes de fonctions définissables continues $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On considère une telle fonction $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $a := (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, on pose

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ t \mapsto \sum_{i=0}^m a_i t^i. \end{cases}$$

En combinant des projections, l'ensemble

$$X := \{x_1 \in I \mid \exists a \in \mathbb{R}^{m+1}, \exists \varepsilon > 0, \forall y \in I, |y - x_1| < \varepsilon \Rightarrow f_a(y) = \zeta(y)\}$$

est un ouvert définissable de \mathbb{R} . Il possède donc un nombre fini de composantes définissablement connexes qui sont des intervalles ouverts. Soit U une composante définissablement connexe. Montrons qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que $f_a|_U = \zeta|_U$. L'unicité est immédiate. Par l'absurde, supposons que $f_a|_U \neq \zeta|_U$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, il existe $u_a \in U$ tel que $f_a(u_a) \neq \zeta(u_a)$, donc $u_a \notin X$, donc $u_a \in U \setminus X = \emptyset$ ce qui est impossible. Alors l'ensemble

$$\{a \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \#\{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, f_a(x_1)) \in V\} = +\infty\}$$

est fini. On en déduit que, pour tout $s \in \mathbb{R}^m$, l'ensemble

$$\{a \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \#B_{a,s} = +\infty\} \quad \text{avec} \quad B_{a,s} := \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, f_a(x_1)) \in W_s\}$$

est fini. Comme un ensemble définissable fini a une dimension nulle, l'ensemble

$$\{(a, s) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^m \mid \#B_{a,s} = +\infty\}$$

est de dimension au plus m . Alors l'ensemble

$$\{a \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists s \in \mathbb{R}^m, \#B_{a,s} = +\infty\}$$

est de dimension au plus m comme une projection de l'ensemble précédent. En passant au complémentaire, l'ensemble

$$\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{a \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists s \in \mathbb{R}^m, \#B_{a,s} = +\infty\} = \{a \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \forall s \in \mathbb{R}^m, \#B_{a,s} < +\infty\}$$

est de dimension $m+1$. En particulier, ce dernier est non vide. Soit $a \in \mathbb{R}^{m+1}$ un élément de cet ensemble. Alors l'application f_a satisfait les conditions. Cela montre le lemme dans le cas $n = 2$.

• *Hérédité.* Soit $n > 2$. On suppose le lemme au rang $n-1$. On considère l'ensemble définissable

$$Z := \{(s, x_1, u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} \mid \#\{x_n \in \mathbb{R} \mid (s, x_1, u, x_n) \in W\} = +\infty\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}^m$, comme $\dim W_s < n$, on a $\dim Z_s < n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction polynomiale $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}^m$, l'ensemble

$$\{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, g(x_1)) \in Z_s\}$$

soit fini. Par ailleurs, on considère l'ensemble définissable

$$M := \{(s, x_1, x_n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \mid (s, x_1, g(x_1), x_n) \in W\}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}^m$, on a $\dim M_s \leq 1$. Par l'initialisation de la récurrence, il existe une fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de degré au plus m telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}^m$, l'ensemble

$$\{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, f(x_1)) \in M_s\}$$

soit fini. L'application

$$v' : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \\ x_1 \mapsto (g(x_1), f(x_1)) \end{cases}$$

satisfait alors l'hypothèse du lemme ce qui termine la preuve. \square

LEMME VI.5. Soit $G \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable. On suppose que

$$\dim G_t < n, \quad \forall t \in \mathbb{R}^q.$$

On note $p: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-1}$ la projections sur les $q + n - 1$ premières coordonnées. Alors il existe un automorphisme polynomial $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $(t, x') \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-1}$, l'ensemble

$$p^{-1}(\{(t, x')\}) \cap [\mathbb{R}^q \times u(G_t)]$$

soit fini.

Preuve On pose

$$W := \{(t, y', x', x_n) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid (t, y' + x', x_n) \in G\}.$$

Soit $(t, y') \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-1}$. Montrons que $W_{(t, y')} = G_t - (y', 0)$. Soit $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} (x', x_n) \in W_{(t, y')} &\iff (t, y', x', x_n) \in W \\ &\iff (t, y' + x', x_n) \in G \\ &\iff (y' + x', x_n) \in G_t \\ &\iff (x', x_n) \in G_t - (y', 0). \end{aligned}$$

Comme l'application $(x', x_n) \mapsto (x' - y', x_n)$ est continue et définissable, on en déduit que

$$\dim W_{(t, y')} = \dim G_t < n.$$

En échangeant les rôles des composantes x_1 et x_n , le lemme précédent nous assure l'existence d'une fonction polynomiale $v': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ telle que, pour tout $(t, y') \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-1}$, l'ensemble

$$\{x_n \in \mathbb{R} \mid (v'(x_n), x_n) \in W_{(t, y')}\}$$

soit fini. On considère l'application

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (x', x_n) \longmapsto (x' - v'(x_n), x_n). \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un automorphisme polynomial. Soit $(t, x') \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-1}$. Montrons que l'ensemble

$$X := p^{-1}(\{(t, x')\}) \cap [\mathbb{R}^q \times u(G_t)]$$

est fini. Soit $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $(t, x', x_n) \in X$. Alors il existe $(y', y_n) \in G_t$ tel que $(x', x_n) = u(y', y_n)$. On peut alors écrire

$$\begin{cases} x' = y' - v'(y_n), \\ x_n = y_n, \\ (y', y_n) \in W_{(t, y')} + (y', 0). \end{cases}$$

Alors

$$(v'(x_n), x_n) = (y' - x', x_n) = (y', y_n) - (x', 0) \in W_{(t, y')} + (y' - x', 0).$$

Or $\{\tilde{x}_n \in \mathbb{R} \mid (v'(\tilde{x}_n), \tilde{x}_n) \in W_{(t, y')}\}$ est fini, donc il n'y a qu'un nombre fini de tels réels $x_n \in \mathbb{R}$. On en déduit que l'ensemble X est fini. Ainsi l'application u vérifie bien les conditions \square

LEMME VI.6. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable, fermé et borné. On note $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la projection sur les $n - 1$ premières coordonnées. On suppose que la préimage $p|_F^{-1}(\{y\})$ est finie pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Soit $X \subset p(F)$ un ensemble définissable telle que tout $x' \in \bar{X}$ admet une base de voisinages U tels que $U \cap X$ soit définissablement connexe. Alors tout fonction continue définissable $\zeta: X \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est contenu dans F se prolonge par continuité sur \bar{X} .

Preuve Soit $\Gamma \subset F$ le graphe de ζ . Comme F est un fermé borné, sa fermeture $\bar{\Gamma}$ est bornée et vérifie $p(\bar{\Gamma}) = \bar{X}$. Soit $x' \in \bar{X}$. Alors l'ensemble $\bar{\Gamma} \cap p^{-1}(\{x'\})$ est à la fois non vide et fini par hypothèse, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que

$$(\{x'\} \times]a - \delta, a + \delta]) \cap \bar{\Gamma} = \{(x', a)\}.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \delta[$. Il existe un voisinage U de x' tel que $U \cap X$ soit définissablement connexe. Alors $U \cap \zeta^{-1}(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[)$ est non vide car il contient a . Quitte à réduire U , on peut supposer que $\zeta(y') \neq a \pm \varepsilon$ pour tout $y' \in U \cap X$. Il vient que $\zeta(U \cap X) \subset]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. On peut donc étendre ζ à \bar{X} en posant $\zeta(x') = a$. \square

VI.3. Théorème de triangulation

THÉOREME VI.7. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable et $B_1, \dots, B_k \subset A$ des ensembles définissables. Alors il existe un complexe simplicial fini \mathcal{K} tel que les sommets des simplexes de \mathcal{K} appartiennent à \mathbb{Q}^n et un homéomorphisme définissable $\Phi: |\mathcal{K}| \rightarrow A$ telle que chaque ensemble B_i soit une union d'images de simplexes ouverts de \mathcal{K} par Φ .

Avec les mains, le théorème de triangulation assure que l'on peut trianguler tout ensemble définissable, c'est-à-dire qu'on peut le décomposer en petits triangles à déformations continues près.

Idée de la preuve La preuve se fait par induction sur n . Le cas $n = 0$ est assez clair. Pour passer du rang n au rang $n + 1$, voici ce qu'on va faire.

- On montre d'abord qu'on peut se ramener au cas où tous les ensembles B_i sont des fermés bornés.
- On introduit le fermé F définie comme l'union des frontières F_i des ensembles B_i et $B_0 := A$. Il va être de dimension strictement inférieure à n . On note $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la projection sur les $n - 1$ premières coordonnées. Grâce au lemme VI.5, on peut supposer que $p^{-1}(\{x'\}) \cap F$ est fini pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ (noté $(*)$).
- On considère une dcd de \mathbb{R}^n adaptée aux fermés F_i . De là, on va pouvoir construire un partition finie de la projections $p(A)$ en des ensembles définissables et définissablement connexes X_λ de \mathbb{R}^{n-1} . De plus, on exhibe des fonctions continues et définissables $\zeta_{\lambda,\mu}: X_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles chaque fermé F_i soit une union de graphes.
- Dès lors, on applique l'hypothèse de récurrence à $p(A)$: on peut alors trouver un complexe simplicial fini \mathcal{L} et un homéomorphisme $\Psi: |\mathcal{L}| \rightarrow p(A)$ comme dans le théorème. Pour simplifier, supposons que les ensembles X_λ sont des simplexes ouverts σ_λ de \mathcal{L} . On obtient alors des graphes et des bandes de fonctions continues définissables $\zeta_{\lambda,\mu}: \sigma_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$. D'après le lemme VI.6 et $(*)$, on peut les prolonger en des fonctions $\overline{\zeta}_{\lambda,\mu}: \overline{\sigma}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$.
- On peut alors construire le complexe simplicial fini \mathcal{K} . On note $\{\overline{C}_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq \ell}$ la classe de tous les graphes et les bandes des prolongements précédents. À chaque cellule \overline{C}_α , on associe une sorte de « barycentre », en fonction de sa dimension, que l'on note $b_\alpha \in \mathbb{Q}^n$. Ensuite, on construit, par induction sur la dimension de la cellule \overline{C}_α , des cellules \overline{D}_α . Si $\dim \overline{C}_\alpha = 0$, on pose $\overline{D}_\alpha := \{b_\alpha\}$. Si $\dim \overline{C}_\alpha > 0$, on pose $\overline{D}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ le cône de sommet b_α et de base

$$\bigcup_{C_\beta \subset \partial C_\alpha} \overline{D}_\beta.$$

Cette construction est licite car on montre que, pour tout ensemble définissable $A \neq \emptyset$, on a $\dim(\overline{A} \setminus A) < \dim A$ et les ensembles C_α sont ici des ouverts. Le simplexe $\mathcal{K} := \{\overline{D}_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq \ell}$ est un bon candidat.

- La construction de l'homéomorphisme $\Phi: |\mathcal{K}| \rightarrow A$ est compliquée et difficile à comprendre. □

VII — CARACTÉRISTIQUE D'EULER

Pour cette dernière partie, nous allons donner un invariant numérique qui permet de caractériser les espaces munis de la topologie définissable : la caractéristique d'EULER. Cela permet généraliser, dans le cadre de la géométrie o-minimale, le théorème de DESCARTES-EULER :

pour tout polyèdre de l'espace homéomorphe à la sphère S^2 , en notant S , A et F ses nombres de sommets, arêtes et faces, on a

$$S - A + F = 2.$$

VII.1. Définition

DÉFINITION VII.1. Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable et $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ une partition finie de S en cellules. On pose

$$\chi(S, \mathcal{P}) := \sum_{C \in \mathcal{P}} (-1)^{\dim C} \in \mathbb{Z}.$$

En fait, on va montrer que cette définition ne dépend pas de la partition \mathcal{P} choisie. Pour cela, introduisons la notion de décomposition d'une cellule, généralisant la notion de dcd de \mathbb{R}^n , et montrons quelques lemmes.

DÉFINITION VII.2. On définit les décompositions d'une cellule C de \mathbb{R}^n par induction sur n .

1. Toute partition finie d'une cellule $C \subset \mathbb{R}^n$ en cellules est une décomposition de C .
2. Pour $n \geq 1$, une décomposition d'une cellule $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une partition finie \mathcal{D} de C en cellules telle que, en notant $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées, la classe de parties

$$\pi(\mathcal{D}) := \{\pi(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$$

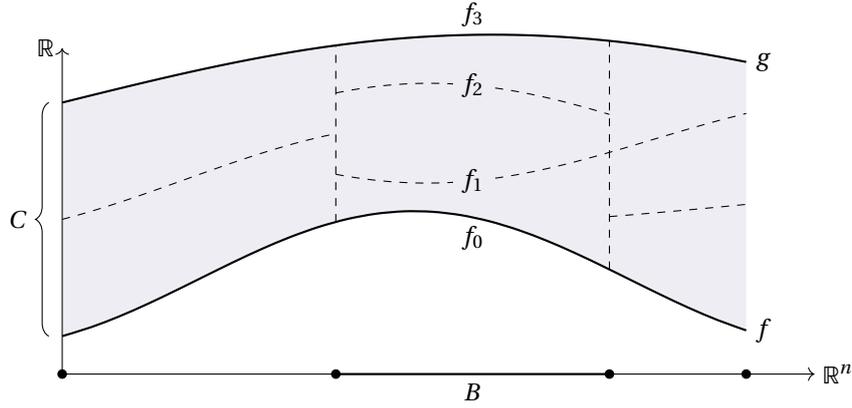


FIGURE 7 – Construction de la partition \mathcal{P}_B dans le cas où la cellule f est une bande $]f, g[$. Ici, on considère une décomposition \mathcal{D} de C , donnée par les traits en pointillés, et une partie $B \in \pi(\mathcal{D})$. Les cellules de \mathcal{D} sont bien « alignées verticalement » car $\pi(\mathcal{D})$ est une décomposition de $\pi(C)$. De plus, on voit bien que les cellules de \mathcal{P}_B , avec $t_B = 2$, s'envoient sur B par π . Enfin, on remarque que $f_0 = f|_B$ et $f_3 = g|_B$.

soit une décomposition de la cellule $\pi(C) \subset \mathbb{R}^n$.

En d'autres termes, il s'agit des restrictions à une cellule $C \subset \mathbb{R}^n$ des dcd de \mathbb{R}^n . Cette dernière assertion se montre facilement par induction sur n .

LEMME VII.3. Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ une cellule et \mathcal{D} une décomposition de C . Alors

$$\chi(C, \mathcal{D}) = (-1)^{\dim C}.$$

Preuve Procédons par induction sur n . On suppose que $n = 1$. Alors toute cellule $C \subset \mathbb{R}$ est un singleton ou un intervalle ouvert. Dans le premier cas, on a nécessairement $\mathcal{D} = \{C\}$ et l'égalité est clairement vraie. Dans le second cas, on écrit $C =]a, b[$ avec $a < b$. Alors la partition \mathcal{D} est de la forme

$$\mathcal{D} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_k\},]a_0, a_1[, \dots,]a_k, a_{k+1}[\}$$

avec $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = b$. On a $\dim C = 1$ et

$$\begin{aligned} \chi(C, \mathcal{D}) &= \sum_{j=1}^k (-1)^{\dim\{a_j\}} + \sum_{j=0}^k (-1)^{\dim]a_j, a_{j+1}[} \\ &= k(-1)^0 + (k+1)(-1)^1 = k - (k+1) = -1 = (-1)^{\dim C}. \end{aligned}$$

Soit $n \geq 1$. On suppose le lemme au rang n . Soient $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une cellule et \mathcal{D} une décomposition de C . On note $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Comme \mathcal{D} est une décomposition de C , la classe de parties $\pi(\mathcal{D})$ est une décomposition de $\pi(C) \subset \mathbb{R}^n$ et l'hypothèse de récurrence assure

$$\chi(\pi(C), \pi(\mathcal{D})) = (-1)^{\dim \pi(C)}.$$

On suppose que C est une bande. Soit $B \in \pi(\mathcal{D})$. Alors B est une cellule de \mathbb{R}^n et il existe un entier $t_B \in \mathbb{N}$ et des fonctions continues et définissables $f_1 < \dots < f_{t_B+1}: B \rightarrow \mathbb{R}$ telles que la classe de parties

$$\mathcal{P}_B := \{\Gamma(f_1), \dots, \Gamma(f_{t_B}),]f_0, f_1[, \dots,]f_{t_B}, f_{t_B+1}[\}$$

soit une partition en cellules de $\{D \in \mathcal{D} \mid \pi(D) = B\}$ (cf. figure 7 pour visualiser cela). Or, comme $\{\mathcal{P}_B \mid B \in \pi(\mathcal{D})\}$ forme une partition de \mathcal{D} , on obtient

$$\begin{aligned} \chi(C, \mathcal{D}) &= \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} [t_B \cdot (-1)^{\dim B} + (t_B + 1) \cdot (-1)^{\dim B + 1}] \\ &= - \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} (-1)^{\dim B} \\ &= -\chi(\pi(C), \pi(\mathcal{D})) = -(-1)^{\dim \pi(C)} = -(-1)^{\dim C - 1} = (-1)^{\dim C} \end{aligned}$$

puisque, comme C est une bande, on a $\dim \pi(C) = \dim C + 1$.

On suppose que C est un graphe. De même, il existe une fonction continue et définissable $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la classe de parties $\mathcal{P}_B := \{\Gamma(f)\}$ soit une partition en cellule de $\{D \in \mathcal{D} \mid \pi(D) = B\}$. On obtient alors

$$\chi(C, \mathcal{D}) = \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} (-1)^{\dim B} = \chi(\pi(C), \pi(\mathcal{D})) = (-1)^{\dim \pi(C)} = (-1)^{\dim C}$$

car, comme C est un graphe, on a $\dim \pi(C) = \dim C$. Cela termine l'induction. \square

LEMME VII.4. Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable et $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ deux partitions finies de S en cellules. Alors il existe une partition finie \mathcal{P} de S en cellules telle que, pour toute cellule $C \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, la restriction

$$\mathcal{P}|_C := \{C \cap A \mid A \in \mathcal{P}\} \setminus \{\emptyset\}$$

soit une décomposition de C .

Preuve On considère une dcd \mathcal{C} de \mathbb{R}^n adaptée à chaque cellule de $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Alors la classe de parties

$$\mathcal{D} := \{D \cap S \mid D \in \mathcal{C}\} \setminus \{\emptyset\}.$$

vérifie bien les hypothèses. \square

On peut alors montrer que la quantité $\chi(S, \mathcal{P})$ ne dépend pas de la partition finie \mathcal{P} choisie.

DÉFINITION-PROPOSITION VII.5. Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable et $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ deux partitions finies de S en cellules. Alors

$$\chi(S, \mathcal{P}_1) = \chi(S, \mathcal{P}_2).$$

On note alors $\chi(S)$ la valeur commune, appelée *caractéristique d'EULER* de S .

Preuve Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ une partition finie de S en cellules comme dans le lemme VII.4. Alors

$$\mathcal{P} = \bigsqcup_{C \in \mathcal{P}_1} \mathcal{P}|_C,$$

donc

$$\begin{aligned} \chi(S, \mathcal{P}) &= \sum_{C \in \mathcal{P}_1} \chi(C, \mathcal{P}|_C) \\ &= \sum_{C \in \mathcal{P}_1} (-1)^{\dim C} \quad (\text{par le lemme VII.3}) \\ &= \chi(S, \mathcal{P}_1). \end{aligned}$$

De même, on a $\chi(S, \mathcal{P}) = \chi(S, \mathcal{P}_2)$ ce qui conclut. \square

▷ EXEMPLE. On reprend la dcd de \mathbb{R}^2 adaptée au cercle S^1 (cf. figure 3) que l'on restreint au cercle pour obtenir une décomposition de ce dernier. On peut en déduire sa caractéristique d'EULER et elle vaut

$$\chi(S^1) = 2(-1)^0 + 2(-1)^1 = 2 - 2 = 0.$$

Et pour la boule fermée de \mathbb{R}^2 , on a $\chi(\mathbb{B}_1^2) = 2 - 2 + 1 = 1$. De même, on a $\chi(S^2) = 2$.

PROPOSITION VII.6. Soient $S, T \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles définissables. Alors

$$\chi(S \cup T) = \chi(S) + \chi(T) - \chi(S \cap T).$$

Si $S \subset T$, alors

$$\chi(T \setminus S) = \chi(T) - \chi(S).$$

Preuve La première relation est claire si S et T sont disjoints et, dans ce cas, on a

$$\chi(S \cup T) = \chi(S) + \chi(T).$$

On suppose que $S \cap T \neq \emptyset$. Alors on peut écrire l'union disjointe

$$S \cup T = (S \setminus [S \cap T]) \sqcup (S \cap T) \sqcup (T \setminus [S \cap T]).$$

Alors le cas « disjoint » donne

$$\chi(S \cup T) = \chi(S \setminus [S \cap T]) + \chi(S \cap T) + \chi(T \setminus [S \cap T]).$$

Or $S = (S \setminus [S \cap T]) \sqcup (S \cap T)$, donc $\chi(S) = \chi(S \setminus [S \cap T]) + \chi(S \cap T)$. Par symétrie, on a une relation similaire avec T . On en déduit que

$$\begin{aligned} \chi(S \cup T) &= \chi(S) - \chi(S \cap T) + \chi(S \cap T) + \chi(T) - \chi(S \cap T) \\ &= \chi(S) + \chi(T) - \chi(S \cap T). \end{aligned}$$

Le deuxième relation est évidente en reprenant le raisonnement précédent. \square

VII.2. La dimension et la caractéristique d'EULER donnent un invariant numérique

On se propose de montrer que deux ensembles définissables sont en bijection définissable si et seulement s'ils ont la même dimension et la même caractéristiques d'EULER.

DÉFINITION VII.7. Deux ensembles définissables $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ sont dits *définissablement équivalents* s'il existe une bijection définissable entre A et B .

(i) Sens direct

On sait déjà que deux ensembles définissables en bijection de manière définissable ont la même dimension (cf. point 2 de la proposition V.4). Commençons par montrer qu'un ensemble définissable et son image par une injection définissable ont la même caractéristique d'EULER.

◇ REMARQUE. On associe des m -uplets aux cellules de \mathbb{R}^m par induction sur m .

- On dit qu'une cellule C de \mathbb{R} est une (0)-cellule si C est un singleton ou une (1)-cellule si C est un intervalle.
- Soit $m \geq 1$. Soit C une cellule de \mathbb{R}^{m+1} . Si C est le graphe d'une fonction définissable continue d'une (i_1, \dots, i_m) -cellule de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R} , on dit que C est une $(i_1, \dots, i_m, 0)$ -cellule. Sinon on dit que C est une $(i_1, \dots, i_m, 1)$ -cellule. Si C est une (i_1, \dots, i_m) -cellule, on montre aisément que $\dim C = i_1 + \dots + i_m$.

PROPOSITION VII.8. Soient $S \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un ensemble définissable et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+n})$ une décomposition de \mathbb{R}^{m+n} partitionnant S . On note $\pi: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ la projection sur les m premières coordonnées. Soit $A \in \pi(\mathcal{D})$. Alors il existe $c_A \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall a \in A, \quad \chi(S_a) = c_A.$$

De plus, on a

$$\chi(\pi^{-1}(A) \cap S) = \chi(A) \cdot c_A.$$

Preuve La cellule A est un (i_1, \dots, i_m) -cellule pour des entiers $i_1, \dots, i_m \in \{0, 1\}$. Soit $C \in \mathcal{D}$ une cellule telle que $C \subset S$ et $\pi(C) = A$. Alors C est une $(i_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_{m+n})$ -cellule pour des entiers $i_{m+1}, \dots, i_{m+n} \in \{0, 1\}$. Alors pour tout $a \in A$, la cellule C_a est une $(i_{m+1}, \dots, i_{m+n})$ -cellule, donc

$$\begin{aligned} \chi(A) \cdot \chi(C_a) &= (-1)^{\dim A} \cdot (-1)^{\dim C_a} \\ &= (-1)^{i_1 + \dots + i_m} \cdot (-1)^{i_{m+1} + \dots + i_{m+n}} \\ &= (-1)^{i_1 + \dots + i_m + i_{m+1} + \dots + i_{m+n}} \\ &= (-1)^{\dim C} = \chi(C). \end{aligned}$$

Or l'ensemble $\pi^{-1}(A) \cap S$ est l'union disjointes de telles cellules $C \in \mathcal{D}$ et, pour tout $a \in A$, l'ensemble S_a est l'union disjointe des ensembles C_a pour de telles cellules $C \in \mathcal{D}$. On en déduit les relations avec

$$c_A := \chi(A)^{-1} \sum_{\substack{C \in \mathcal{D} \\ C \subset S \\ \pi(C) = A}} \chi(C) \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

COROLLAIRE VII.9. Soient $S \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un ensemble définissable et $c \in \mathbb{Z}$. On suppose

$$\forall a \in \mathbb{R}^m, \quad S_a \neq \emptyset \implies \chi(S_a) = c.$$

On note $\pi: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ la projection sur les m premières coordonnées. Alors

$$\chi(S) = \chi(\pi(S)) \cdot c.$$

Preuve Il suffit de considérer la décomposition $\mathcal{D} := \{S, \mathbb{R}^{m+n} \setminus S\}$. Pour $A := \pi(S)$, on a alors

$$\chi(S) = \chi(\pi^{-1}(A) \cap S) = \chi(\pi(S)) \cdot c. \quad \square$$

COROLLAIRE VII.10. En particulier, pour tous ensembles définissables $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\chi(A \times B) = \chi(A) \cdot \chi(B).$$

On peut maintenant passer au sens direct de ce qu'on souhaite montrer : deux ensembles en bijection de manière définissable ont la même caractéristique d'EULER.

THÉOREME VII.11. Soient $S \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble définissable et $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ une injection définissable. Alors

$$\chi(S) = \chi(f(S)).$$

Preuve On applique le corollaire VII.9 au graphe $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de l'injection f . Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $\Gamma_x \neq \emptyset$, comme f est une injection, l'ensemble Γ_x est un singleton, donc $\chi(\Gamma_x) = 1$. Le corollaire donne alors $\chi(S) = \chi(\Gamma)$. On considère le graphe « renversé »

$$\Gamma' := \{(y, x) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid (x, y) \in \Gamma\}$$

qui est bien définissable (cf. lemme II.9). De même, on a $\chi(f(S)) = \chi(\Gamma')$. Il suffit de montrer l'égalité $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma')$. Cette dernière est assurée par le théorème suivant qu'on admet ^{S7}.

Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble définissable et $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ une permutation de $\llbracket 1, m \rrbracket$. On définit

$$\sigma A := \{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) \in \mathbb{R}^m \mid (x_1, \dots, x_m) \in A\}.$$

Alors $\chi(A) = \chi(\sigma A)$. □

◇ REMARQUE. Notons que la continuité de f n'est pas nécessaire.

(ii) Sens réciproque

DÉFINITION VII.12. Une partie *semi-linéaire* de \mathbb{R}^m est une partie semi-algébrique de \mathbb{R}^m qui est définie par des égalités et inégalités de polynômes de degré au plus un. Une fonction semi-linéaire est une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ dont le graphe est semi-linéaire. On dit que deux ensembles définissables sont semi-linéairement équivalents s'il existe une bijection semi-linéaire entre eux.

Le preuve de cette réciproque va s'appuyer principalement sur le théorème de triangulation. Il va donc falloir montrer des petits lemmes sur les simplexes.

LEMME VII.13. Soit $k \in \mathbb{N}$. On se place dans \mathbb{R}^m .

1. Si $k > 0$, tout k -simplexe est une union disjointe de deux k -simplexes et d'un $k-1$ -simplexe.
2. Deux k -simplexes ouverts sont semi-linéairement homéomorphe.
3. La caractéristique d'EULER d'un k -simplexe ouvert vaut $(-1)^k$.

Preuve 1. On procède par récurrence sur $k > 0$. Le cas $k = 1$ est trivial. Soit $]a, b[$ un 1-simplexe ouvert. On pose $c := \frac{1}{2}(a + b)$. Alors

$$]a, b[=]a, c[\sqcup]c[\sqcup]c, b[.$$

On remarque que l'ensemble $]c[= \{c\}$ est un 0-simplexe et les ensembles $]a, c[$ et $]c, b[$ sont deux 1-simplexes ce qui conclut l'initialisation.

Soit $k > 0$. On suppose le résultat vrai pour des k -simplexes. Soit $]a_0, \dots, a_{k+1}[$ un $k+1$ -simplexe ouvert. Alors la face $]a_0, \dots, a_k[$ est un k -simplexe. Par l'hypothèse de récurrence, il existe deux k -simplexes $]b_0, \dots, b_k[$ et $]c_0, \dots, c_k[$ et un $k-1$ -simplexe $]d_0, \dots, d_{k-1}[$ tels que

$$]a_0, \dots, a_k[=]b_0, \dots, b_k[\sqcup]c_0, \dots, c_k[\sqcup]d_0, \dots, d_{k-1}[.$$

Alors

$$]a_0, \dots, a_{k+1}[=]b_0, \dots, b_k, a_{k+1}[\sqcup]c_0, \dots, c_k, a_{k+1}[\sqcup]d_0, \dots, d_{k-1}, a_{k+1}[$$

où les ensembles apparaissant sont bien deux $k+1$ -simplexes et un k -simplexe ce qui termine la récurrence.

2. Soit $]a_0, \dots, a_k[$ un k -simplexe ouvert. Il suffit considérer l'ensemble

$$A_k := \{(s_0, \dots, s_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{k+1} \mid s_0 + \dots + s_k = 1\}$$

et l'application

$$\varphi: \begin{cases} A_k \longrightarrow]a_0, \dots, a_k[, \\ (t_0, \dots, t_k) \longmapsto t_0 a_0 + \dots + t_k a_k \end{cases}$$

qui définit un homéomorphisme semi-linéaire entre A_k et $]a_0, \dots, a_k[$. Ainsi deux k -simplexes sont semi-linéairement homéomorphe à A , donc ils sont semi-linéairement homéomorphes — la bijection réciproque d'un homéomorphisme semi-linéaire est bien semi-linéaire (cf. lemme II.9 en changeant « définissable » par « semi-linéaire »).

^{S7}. Une démonstration technique est donnée pp. 72–75 dans l'ouvrage de VAN DEN DRIES [3]

Vérifions seulement l'injectivité de φ . Soient $t := (t_0, \dots, t_k) \in A$ et $s := (s_0, \dots, s_k) \in A$ tels que $\varphi(t) = \varphi(s)$. En posant $u_i := t_i - s_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient les relations

$$\sum_{i=0}^n u_i a_i = \mathbf{0}_m \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n u_i = 0.$$

En remplaçant u_0 par $-\sum_{i=1}^n u_i$, on a

$$\sum_{i=1}^n u_i (a_i - a_0) = \mathbf{0}_m.$$

Comme $\]a_0, \dots, a_k[$ est un k -simplexe, la famille (a_0, \dots, a_k) engendre un sous-espace vectoriel de dimension k , donc la famille $(a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0)$ est linéairement indépendante. On en déduit $u_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ce qui assure $u_0 = 0$. D'où $t = s$.

Pour montrer que sa réciproque est continue, on peut considérer les projections sur les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}\{a_i - a_0\}$ parallèlement à $\text{Vect}\{a_1 - a_0, \dots, \bar{a}_i - \bar{a}_0, \dots, a_k - a_0\}$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère le m -simplexe $\Delta_m := \] \mathbf{0}_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m [$ où la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est la base canonique de \mathbb{R}^m . Montrons que

$$\Delta_{m+1} = \{(x_1, \dots, x_m, r) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m, 0 < r < 1 - x_1 - \dots - x_m\}.$$

Soit $x := (x_1, \dots, x_{m+1}) \in \Delta_{m+1}$. Il existe $t_0, t_1, \dots, t_{m+1} \geq 0$ tels que

$$t_0 + \dots + t_{m+1} = 1 \quad \text{et} \quad x = t_0 \mathbf{0}_{m+1} + t_1 \varepsilon_1 + \dots + t_{m+1} \varepsilon_{m+1}.$$

Alors $x = (t_1, \dots, t_{m+1})$. De plus, on a

$$(x_1, \dots, x_m) = (t_0 + t_{m+1}) \mathbf{0}_m + t_1 \varepsilon_1 + \dots + t_m \varepsilon_m \quad \text{et} \quad (t_0 + t_{m+1}) + t_1 + \dots + t_m = 1,$$

donc $(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m$. Par ailleurs, on a

$$0 < t_{m+1} = 1 - t_0 - t_1 - \dots - t_m < 1 - t_1 - \dots - t_m.$$

D'où $x \in \Delta_{m+1}$. Réciproquement, soit $x := (x_1, \dots, x_m, r) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que

$$(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m \quad \text{et} \quad 0 < r < 1 - x_1 - \dots - x_m$$

Il existe $t_0, \dots, t_m > 0$ tels que

$$t_0 + \dots + t_m = 1 \quad \text{et} \quad (x_1, \dots, x_m) = t_0 \mathbf{0}_{m+1} + t_1 \varepsilon_1 + \dots + t_m \varepsilon_m.$$

Alors $r \in \] 0, 1 [$ et

$$x = (t_0 - r) \mathbf{0}_{m+1} + t_1 \varepsilon_1 + \dots + t_m \varepsilon_m + r t_{m+1} \in \Delta_{m+1}.$$

Une récurrence immédiate montre que le simplexe Δ_m est une cellule ouverte en montrant qu'il s'agit de la bande ouverte entre les fonctions 0 et

$$(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_m \mapsto 1 - x_1 - \dots - x_m.$$

On en déduit que sa dimension vaut m . D'où $\chi(\Delta_m) = (-1)^m$.

Soit σ un k -simplexe ouvert de \mathbb{R}^m . Alors l'ensemble $\Delta' := \Delta_k \times \{\mathbf{0}_{m-k}\} \subset \mathbb{R}^m$ est un k -simplexe. Le point 2 montre que le simplexe σ est semi-linéairement homéomorphe à Δ' et donc définissablement homéomorphe. Le caractèreistique d'EULER de Δ' est bien la même que celle de Δ_k : il suffit de prolonger les cellules d'une partition en cellules de Δ_k par des zéros pour former une partition en cellules de Δ' . Le théorème précédent assure alors

$$\chi(\sigma) = \chi(\Delta') = \chi(\Delta_k) = (-1)^k. \quad \square$$

À présent, montrons le sens réciproque de notre théorème. Ce dernier conclura notre lecture dirigée et utilise à peu près tous les outils développés dans ce rapport et, en particulier, la triangulation.

THÉORÈME VII.14. Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles définissables tels que

$$\dim A = \dim B \quad \text{et} \quad \chi(A) = \chi(B).$$

Alors A et B sont définissablement équivalents.

Preuve Montrons même qu'après triangulation, ils sont semi-linéairement équivalents.

Procédons par induction sur la dimension commune $k \in \mathbb{N}$ de A et B . Pour $k = 0$, les ensembles A et B sont finis et, comme $\chi(A) = \chi(B)$, ils sont de même cardinal. Dans ce cas, toute bijection de A dans B fera l'affaire.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose le théorème vrai pour des polyèdres de même caractéristique d'EULER et de dimensions valant $k-1$. Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles définissables tels que

$$\dim A = \dim B = k \quad \text{et} \quad \chi(A) = \chi(B).$$

Quitte à trianguler, on peut les écrire comme des unions disjointes de simplexes

$$A = \bigsqcup_{i=1}^q \sigma_i \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{j=1}^s \tau_j.$$

On note $p \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $r \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tels que les simplexes σ_i et τ_j soient

- de dimension maximale k pour tous $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$;
- de dimension strictement inférieure à k pour $i \in \llbracket p+1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket r+1, s \rrbracket$.

Avec le point 1 du lemme VII.13, quitte à couper un simplexe, on peut supposer que $p = r$ et qu'il y a un $k-1$ -simplexe parmi les simplexes σ_i pour $i > p$ (resp. les simplexes τ_j pour $j > p$). Avec le point 2, il existe une bijection semi-linéaire entre $A' := \sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \sigma_p$ et $B' := \tau_1 \sqcup \dots \sqcup \tau_p$.

Par ailleurs, les ensembles $A'' := \sigma_{p+1} \sqcup \dots \sqcup \sigma_q$ et $B'' := \tau_{p+1} \sqcup \dots \sqcup \tau_s$ sont de dimension $k-1$ et ont la même caractéristique d'EULER puisque $\chi(A) = \chi(B)$ et $\chi(A') = \chi(B')$ (par le point 3). L'hypothèse de récurrence assure qu'ils sont semi-linéairement équivalents. Comme $\{A', A''\}$ et $\{B', B''\}$ forment des partitions de A et B , on en déduit que ces derniers sont semi-linéairement équivalents.

Finalement, après les avoir triangulés, les ensembles sont définissablement équivalents. En leur appliquant les réciproques des homéomorphismes de triangulation, on en déduit que les ensembles A et B sont définissablement équivalents. \square

▷ EXEMPLE. Tout ensemble définissable de dimension deux et de caractéristique d'EULER deux est définissablement équivalent à la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

VIII — CONCLUSION

La structure des ensemble semi-algébriques de \mathbb{R}^n est très intéressante. Elle vérifie de très belles propriétés de comme la stabilité par projection donnée par le théorème de TARSKI-SEIDENBERG.

Essayant de reproduire ces propriétés, les structures o-minimales, suites de classes de parties de \mathbb{R}^n indicées par n , forment des ensembles qui gardent beaucoup de propriétés des structures semi-algébriques. Fixer une telle structure o-minimale permet de définir de nombreuses notions, notamment celles d'ensembles et de fonctions définissables. À partir de là, on peut définir une « topologie modérée » — pour reprendre le terme d'Alexandre GROTHENDIECK — avec des ouverts définissables et y étendre des notions comme la connexité ou la continuité. C'est cette sorte de topologie qui ne contient pas de monstre topologique comme des ensembles à la fois définissablement connexes et non définissablement connexes par arcs.

Une des propriétés les plus importantes des structures o-minimales est la décomposition cellulaire. Elle permet de décomposer des ensembles définissables en des ensembles définissables simples : les cellules. Enfin, un autre outil important est sans doute la triangulation qui permet, à un homéomorphisme définissable près, de partitionner un ensemble définissable en simplexes. Cet outil permet de montrer l'invariant numérique que donnent la dimension et la caractéristique d'EULER.

Beaucoup des résultats de la géométrie o-minimale ne sont pas très évidents à démontrer. En revanche, beaucoup sont très intuitifs ce qui rend cette géométrie assez visuelle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Michel COSTE. *An Introduction to O-minimal Geometry*. 1999.
- [2] Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre*. Ellipse. 2008.
- [3] Lou VAN DEN DRIES. *Tame Topology and O-minimal Structures*. London Mathematical Society. 248. Cambridge University Press, 1998.