# GÉOMÉTRIE O-MINIMALE

lecture dirigée de recherche,
encadrée par M. Goulwen Fichou

Walid El Ouadghiri & Téofil Adamski

lundi 27 avril 2020

# Introduction

## But

Développer une géométrie « modérée », c'est-à-dire qui ne comporte pas de monstres topologiques comme l'adhérence du graphe de la fonction $x > 0 \longmapsto \sin(1/x)$.

## Objectifs

- Observer des propriétés fortes de cette géométrie :
  - décomposition cellulaire,
  - triangulation.
- Étudier la connexité.
- Donner un sens à la dimension.
- Construire la caractéristique d'Euler.

# Plan

1. Ensembles semi-algébriques
2. Structure o-minimale
3. Décomposition cellulaire
4. Connexité et dimension
5. Triangulation et caractéristique d'Euler

Partie 1

## Ensembles semi-algébriques

# Ensembles semi-algébriques et algébriques

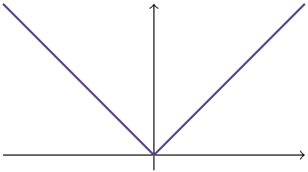
## Définition

Un ensemble *semi-algébrique* de $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles de la forme

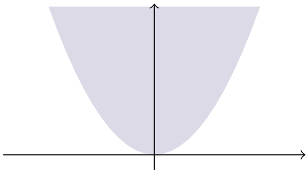
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0\} \quad \text{avec} \quad P, Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$

On note $\mathscr{SA}_n$ la classe des ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$.
Un ensemble *algébrique* de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P_1(x) = 0, \dots, P_r(x) = 0\} \quad \text{avec} \quad P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$



$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 - x^2 = 0, y > 0\right\}$$



$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - x^2 > 0\right\}$$

# Propriétés des ensembles semi-algébriques

## Théorème de Tarski-Seidenberg

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ la projection sur les $n$ premières coordonnées. Alors

$$A \in \mathscr{S}\mathscr{A}_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \pi(A) \in \mathscr{S}\mathscr{A}_n.$$

Les ensembles semi-algébriques sont stables par projection. Ce n'est pas le cas des ensembles algébriques. ⇒ Propriété intéressante !

## Structure de $\mathscr{S}\mathscr{A}_1$

Les éléments de $\mathscr{S}\mathscr{A}_1$ sont exactement les unions finies de singletons et d'intervalles.

Partie 2

# Structure o-minimale

# Structures o-minimales

## Définition

Une *structure étendant* $\mathbb{R}$ est une suite $\mathscr{S} := (\mathscr{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où chaque élément $\mathscr{S}_n$ est une classe de parties de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

1. tout ensemble algébrique de $\mathbb{R}^n$ est dans $\mathscr{S}_n$ ;
2. si $A, B \in \mathscr{S}_n$, alors $A \cup B \in \mathscr{S}_n$ et $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathscr{S}_n$ ;
3. si $A \in \mathscr{S}_m$ et $B \in \mathscr{S}_n$, alors $A \times B \in \mathscr{S}_{m+n}$ ;
4. si $A \in \mathscr{S}_{n+1}$, alors $\pi(A) \in \mathscr{S}_n$ où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur les $n$ premières coordonnées.

De plus, la structure $\mathscr{S}$ est dite *o-minimale* si

5. les éléments de $\mathscr{S}_1$ sont exactement les unions finies de singletons ou d'intervalles.

Les éléments de $\mathscr{S}_n$ sont appelés les *sous-ensembles définissables* de $\mathbb{R}^n$.

# Un exemple de structure o-minimale

## Proposition

La suite $(\mathscr{S}\mathscr{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une structure o-minimale étendant $\mathbb{R}$. C'est même la plus petite.

*Preuve* Les axiomes se montrent facilement et notamment grâce au théorème de Tarski-Seidenberg. Montrons que c'est la plus petite. Soient $(\mathscr{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une structure o-minimale étendant $\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{S}\mathscr{A}_n \subset \mathscr{S}_n$. Soit $P\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$. Montrons que

$$A := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid P(x_1,\dots,x_n)>0\}\in\mathscr{S}_n.$$

On pose

$$B := \{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1}^2 P(x_1,\dots,x_n)-1=0\}\in\mathscr{S}_{n+1}.$$

On note $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ la projection sur les $n$ premières coordonnées. Alors

$$A=\pi(B)\in\mathscr{S}_n. \qquad \square$$

# Fonctions définissables

### Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}^p$ est *définissable* si son graphe $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+p}$ est définissable.

### Exemples

- Toute fonction polynomiale $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définissable.
- La fonction

$$f : \left| \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

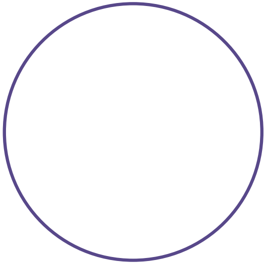
  est définissable.

$\Rightarrow$ Propriétés usuelles : stabilité par somme, produit, composition, ...

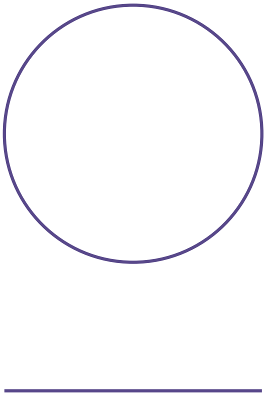
Partie 3

# Décomposition cellulaire

# Une décomposition cellulaire adaptée au cercle $\mathbb{S}^1$

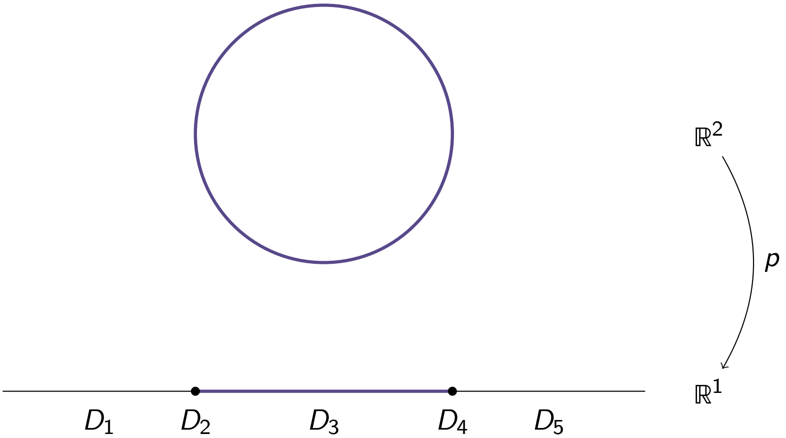


# Une décomposition cellulaire adaptée au cercle $\mathbb{S}^1$

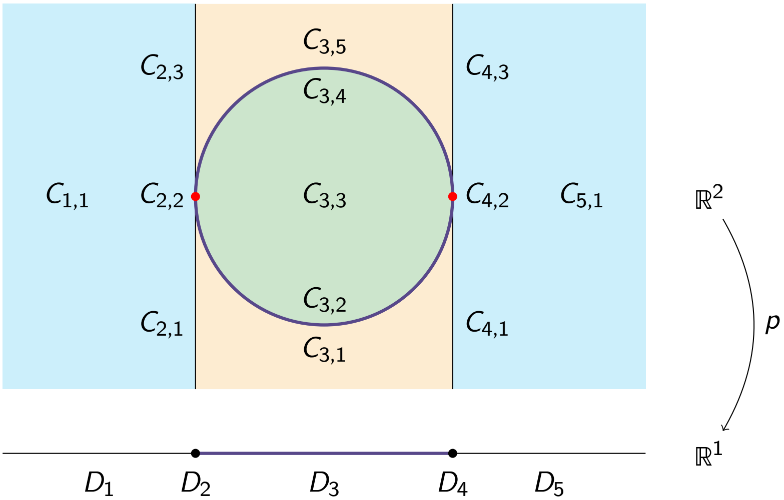


$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, bend left, "p"] \\ \mathbb{R}^1 \end{tikzcd}$$

# Une décomposition cellulaire adaptée au cercle $\mathbb{S}^1$



# Une décomposition cellulaire adaptée au cercle $\mathbb{S}^1$



# Décompositions en cellules définissables

## Définition

On définit les *décompositions en cellules définissables* (ou dcd) de $\mathbb{R}^n$ par induction sur $n$.

1. Une dcd de $\mathbb{R}$ est une partition $\{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ telle que chaque partie $C_i$ soit un singleton ou un intervalle ouvert.
2. Pour $n \geqslant 2$, une dcd $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une dcd $\mathscr{C}'$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ et, pour chaque partie $C \in \mathscr{C}'$, d'un entier $\ell_C \geqslant 1$ et de fonctions définissables et continues

$$\zeta_{C,1} < \cdots < \zeta_{C,\ell_C} : C \to \mathbb{R}.$$

   Les éléments de $\mathscr{C}$ sont alors les ensembles

$$]\zeta_{C,i}, \zeta_{C,i+1}[ := \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x' \in C,\, \zeta_{C,i}(x') < x_n < \zeta_{C,i+1}(x')\right\} \quad \text{et} \quad \Gamma(\zeta_{C,i}),$$

   pour $C \in \mathscr{C}'$ et $i \in [\![0, \ell_C]\!]$ en posant $\zeta_{C,0} := -\infty$ et $\zeta_{C,\ell_C+1} := +\infty$.

Les éléments $C$ d'une dcd $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ sont appelées des *cellules*.

# Théorème de décomposition cellulaire

### Théorème

Soient $A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles définissables. Alors il existe une dcd de $\mathbb{R}^n$ telle que chaque ensemble $A_i$ soit une union finie de cellules.

On dira qu'une telle dcd de $\mathbb{R}^n$ est adaptée aux ensembles $A_1, \ldots, A_k$.

Partie 4

# Connexité et dimension

# Connexité définissable

## Définition

- Un ensemble définissable $A$ est dit *définissablement connexe* si, pour tous ouverts définissables disjoints $U$ et $V$ de $A$ tels que $A = U \cup V$, on a $A = U$ ou $A = V$.
- Un ensemble définissable $A$ est dit *définissablement connexe par arcs* si, pour tous points $a, b \in A$, il existe une fonction continue et définissable $\gamma : [0,1] \to A$ telle que

$$\gamma(0) = a \quad \text{et} \quad \gamma(1) = b.$$

## Remarque

Pour un ensemble définissable, on a les implications

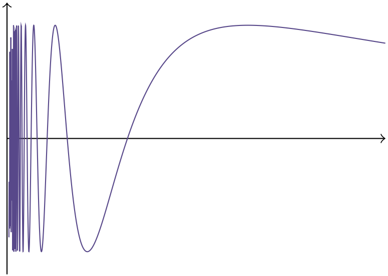
$$\begin{aligned} \text{connexité par arcs définissable} \quad &\Longrightarrow \quad \text{connexité par arcs} \\ &\Longrightarrow \quad \text{connexité} \\ &\Longrightarrow \quad \text{connexité définissable.} \end{aligned}$$

# Réciproque « connexité définissable ⇒ connexité par arcs définissable » ?

## Corollaire (réciproque)

Tout ensemble définissable de $\mathbb{R}^n$ définissablement connexe est définissablement connexe par arcs.

⇒ Cette géométrie ne possède pas de monstres topologiques !



$\notin \mathscr{S}_2$

# Notion de dimension

## Définition

La dimension d'un ensemble définissable $A \subset \mathbb{R}^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des entiers $d \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une fonction définissable injective de $\mathbb{R}^d$ dans $A$. On la note

$$\dim A \in [-\infty, +\infty].$$

## Propositions

La dimension d'un ensemble définissable ne peut valoir $+\infty$. De plus, on a les propositions attendues suivantes.

- Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on a $\dim \mathbb{R}^d = d$.
- Si $A \subset B$, alors $\dim A \leqslant \dim B$.
- Si $f : A \to B$ est une bijection définissable, alors $\dim A = \dim B$.
- On a $\dim(A \cup B) = \max(\dim A, \dim B)$.
- On a $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B$.

Partie 5

# Triangulation et caractéristique d'Euler

# Simplexes

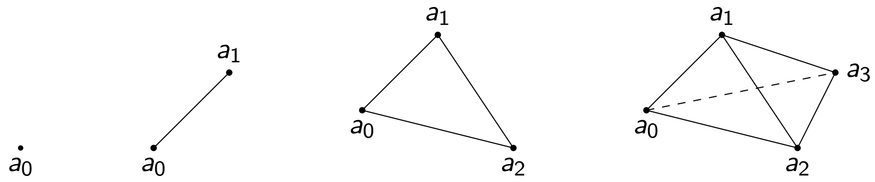
## Définition

Soit $(a_0, \dots, a_d)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ telle que $(a_1 - a_0, \dots, a_d - a_0)$ soit linéairement indépendante dans $\mathbb{R}^n$. Le *d-simplexe ouvert* d'arêtes $a_0$, ..., $a_d$ est l'ensemble

$$]a_0, \dots, a_d[ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in ]0,1], \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i\}.$$

Le *d-simplexe fermé* d'arêtes $a_0$, ..., $a_d$ est l'ensemble

$$[a_0, \dots, a_d] := \overline{]a_0, \dots, a_d[}.$$



# Simplexes (suites)

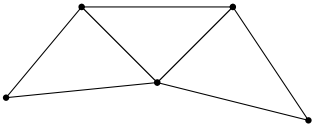
### Définition

Une *face* d'un simplexe $\overline{\sigma} = [a_0, \ldots, a_d]$ est un simplexe $\overline{\tau} = [b_0, \ldots, b_e]$ tel que

$$\{b_0, \ldots, b_e\} \subset \{a_0, \ldots, a_d\}.$$

Un *complexe simplicial fini* de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fini $\mathscr{K} := \{\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_p}\}$ de simplexes qui vérifient, pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$, l'intersection $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j}$ ait une face commune de $\overline{\sigma_i}$ et $\overline{\sigma_j}$.
On pose

$$|\mathscr{K}| = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\sigma_i}.$$



# Théorème de triangulation

### Théorème

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable et $B_1, \ldots, B_k \subset A$ des ensembles définissables. Alors il existe un complexe simplicial fini $\mathscr{K}$ tel que les sommets des simplexes de $\mathscr{K}$ appartiennent à $\mathbb{Q}^n$ et un homéomorphisme définissable $\Phi\colon |\mathscr{K}| \to A$ telle que chaque ensemble $B_i$ soit une union d'images de simplex ouverts de $\mathscr{K}$ par $\Phi$.

### Interprétation

Un ensemble définissable peut être décomposé, à un homéomorphisme définissable près, en petits triangles.

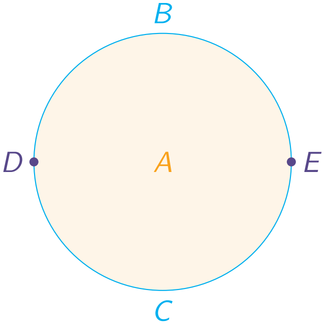
# Caractéristique d'Euler

## Définition

Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable et $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ une partition finie de $S$ en cellules. On pose

$$\chi(S, \mathscr{P}) := \sum_{C \in \mathscr{P}} (-1)^{\dim C} \in \mathbb{Z}.$$

Cette quantité ne dépend pas de la partition finie en cellules $\mathscr{P}$ choisies. On la note $\chi(S)$.




$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \chi(\mathbb{S}^1) = 2 - 2 = 0, \\ \chi(\mathbb{B}^2_f) = 2 - 2 + 1 = 1, \end{cases}$$

## Des invariants numériques : la dimension et la caractéristique d'Euler

On sait déjà que deux ensembles en bijection définissable ont la même dimension.

### Théorème

Soient $S \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble définissable et $f : S \to \mathbb{R}^n$ une injection définissable. Alors

$$\chi(S) = \chi(f(S)).$$

### Remarque

Notons qu'il n'y a aucune hypothèse de continuité sur la fonction $f$.

# Des invariants numériques : sens réciproque

## Théorème

Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles définissables tels que

$$\dim A = \dim B \quad \text{et} \quad \chi(A) = \chi(B).$$

Alors il existe une bijection définissable entre $A$ et $B$.

*Preuve* Par induction sur la dimension commune. Le cas $\dim A = \dim B = 0$ est trivial. Soit $k > 0$. On suppose le théorème aux rangs $\ell < k$. Quitte à trianguler, on peut les écrire comme des unions disjoints de simplexes

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{q} \sigma_i \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{j=1}^{s} \tau_j.$$

On peut s'arranger pour qu'ils aient le même nombre de $k$-simplexes et qu'ils aient au moins un $k-1$ simplexes. On sépare ensuite les $k$-simplexes des $\ell$-simplexes avec $\ell < k$. On peut ensuite construire une bijection semi-linéaire entre l'union des $k$-simplexes de $A$ et l'union des $k$-simplexes de $B$. De même pour les $\ell$-simplexes en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

## Conclusion

Merci de nous avoir écouté !