

Université de Rennes
Rapport de stage de master 2

Intégrales motiviques oscillantes

Téofil ADAMSKI

Encadrant : Michel RAIBAUT

Laboratoire de Mathématiques (LAMA) de l'Université Savoie Mont Blanc

Le Bourget-du-Lac, avril-juin 2023



Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude de certaines intégrales motiviques oscillantes. Dans la section 1, on commencera par introduire la théorie de l'intégration motivique, développée par CLUCKERS et LOESER dans les articles [2, 3, 4]. Puis on ajoutera des exponentielles dans la section 2 en suivant l'article [1] des mêmes auteurs qui développent aussi une transformation de Fourier, expliquée dans la section 3. Enfin, dans la section 4, on parlera d'intégrale motivique oscillante avec un premier résultat de RAIBAUT issu de l'article [7], inspiré d'un article [6] de HEIFETZ dans le cas p -adique, et on finira par une tentative de généralisation de la proposition 1.2 de ce dernier article.

Remerciements

Je tiens à remercier Michel de m'avoir accompagné tout au long de mon stage et d'avoir pris de son temps pour m'expliquer beaucoup de choses sur l'intégration motivique mais pas que ! Je suis très heureux de pouvoir continuer à travailler avec lui pendant ces trois prochaines années de doctorat.

Merci également à Alphonse et Alexis, mes deux collègues stagiaires au laboratoire de Chambéry. Bonne continuation à vous deux !

Sommaire

1	Intégration des fonctions motiviques constructibles	1
1.1	Les langages de Denef-Pas	1
1.2	Sous-assignements	2
1.3	Dimension d'un sous-assignement définissable	3
1.4	Fonctions de Presburger	3
1.5	Semi-groupe et groupe de Grothendieck	4
1.6	Fonctions motiviques constructibles	4
1.7	Jacobien d'une fonction définissable	5
1.8	Le foncteur d'intégration motivique	6
1.9	Intégration relative	9
2	Intégration des fonctions motiviques constructibles exponentielles	9
2.1	Groupe de Grothendieck exponentiel	9
2.2	Fonctions motiviques constructibles exponentielles	11
2.3	Le foncteur d'intégration motivique exponentielle	12
2.4	Intégration relative	13
2.5	Théorème de changement de variables	13
3	Transformation de Fourier	13
3.1	Transformation de Fourier sur le corps résiduel	14
3.2	Transformation de Fourier sur le corps valué	15
3.3	Produit de convolution	19
3.4	Fonctions de Schwartz-Bruhat et formule d'inversion	21
4	Intégrales motiviques oscillantes	24
4.1	Formule de la phase stationnaire motivique	24
4.2	Formule exacte de la phase stationnaire motivique	25

Introduction

L'idée de l'intégration motivique fut introduite pour la première fois en 1998 par Maxim KONTSEVICH comme un analogue de l'intégration p -adique sur l'anneau $\mathbf{k}[[t]]$ des séries formelles sur un corps \mathbf{k} de caractéristique nulle ; le groupe additif $\mathbf{k}[[t]]$ n'étant pas localement compact, il n'existe pas de mesure de Haar sur celui-ci. Contrairement à l'intégration p -adique, les intégrales ne sont pas à valeurs réelles, mais ce sont des objets géométriques : les motifs. Le cardinal $p = \text{Card } \mathbf{F}_p$ du corps résiduel est remplacé par le motif \mathbf{L} de la droite affine $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^1$; la mesure d'une variété X est, par définition, sa classe d'isomorphisme $[X]$. L'objectif de KONTSEVICH était de trouver une preuve plus simple du théorème de Batyrev grâce à cette théorie : ce dernier se montre alors avec un simple changement de variables.

Une première théorie géométrique, développée par Jan DENEFF et François LOESER [5], a vu le jour. Par la suite, Raf CLUCKERS et François LOESER [2, 3, 1] ont construit une théorie de cette intégration sur les corps $\mathbf{k}((t))$ des séries de Laurent pour un corps \mathbf{k} de caractéristique nulle grâce à la théorie des modèles. Cette dernière théorie permet ainsi de considérer des fonctions motiviques constructibles, des intégrales à paramètres ou encore des exponentielles. Sa construction se base principalement sur un théorème d'élimination des quantificateurs et un théorème de décomposition cellulaire. Ces mêmes auteurs ont ensuite généralisé [4] l'intégration en remplaçant les corps $\mathbf{k}((t))$ par des corps plus généraux \mathbf{K} .

La puissance de cette théorie vient de son caractère motivique. En effet, les motifs, des classes d'isomorphismes de variétés soumises à certaines relations, peuvent se réaliser à travers des invariants additifs, comme la caractéristique d'Euler en géométrie semi-algébrique (dans ce cas, on retrouve l'intégration contre la caractéristique d'Euler). Par ailleurs, des théorèmes de transfert et de spécialisation existent comme dans l'article [2] qui permettent, à partir de l'intégration motivique, de trouver des résultats dans le cas p -adique.

En analyse réelle, plusieurs théories utilisent l'intégration comme outils. C'est par exemple le cas de la théorie des distributions et des fronts d'ondes. Daniel HEIFETZ a considéré [6] ces objets dans le cas p -adique. Grâce à l'intégration motivique, Michel RAIBAUT a pu le faire [7] dans le cas motivique, ouvrant ainsi la porte à une théorie de l'analyse microlocale motivique.

Dans ce mémoire, on se propose d'étudier la théorie de l'intégration motivique construite par CLUCKERS et LOESER pour arriver à définir et étudier certaines intégrales motiviques oscillantes, c'est-à-dire des intégrales ayant une forme généralisant celle de la transformée de Fourier. Ces intégrales particulières peuvent ensuite servir à étudier des distributions motiviques. On se basera sur les résultats de HEIFETZ et RAIBAUT.

Bibliographie

- [1] Raf CLUCKERS et François LOESER. « Constructible exponential functions, motivic Fourier transform and transfer principle ». *Annals of Mathematics* 171.2 (2010), p. 1011-1065.
- [2] Raf CLUCKERS et François LOESER. « Constructible motivic functions and motivic integration ». *Inventiones mathematicae* 173 (2008), p. 23-121.
- [3] Raf CLUCKERS et François LOESER. « Fonctions constructibles et intégration motivique I ». *Comptes Rendus Mathématique* 339.6 (2004), p. 411-416.
- [4] Raf CLUCKERS et François LOESER. « Motivic integration in all residue field characteristics for Henselian discretely valued fields of characteristic zero ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2015.701 (2015), p. 1-31.
- [5] Jan DENEFF et François LOESER. « Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration ». *Inventiones Mathematicae* 135 (1999), p. 201-232.

- [6] Daniel HEIFETZ. « p -adic oscillatory integrals and wave front sets ». *Pacific Journal of Mathematics* 116.2 (1985), p. 285-305.
- [7] Michel RAIBAUT. « Motivic wave front sets ». *International Mathematics Research Notices* 2021.17 (2021), p. 13075-13152.
- [8] Vasilii Sergeevich VLADIMIROV, Igor Vasilievich VOLOVICH et Evgenii Igorevich ZELENOV. *p -Adic Analysis and Mathematical Physics*. T. 1. World Scientific, 1994.

1. Intégration des fonctions motiviques constructibles

Toute cette première partie repose sur l'article [2].

1.1. Les langages de Denef-Pas

Soit \mathbf{K} un corps valué de valuation $\text{ord}: \mathbf{K}^\times \rightarrow \Gamma$. L'ensemble Γ est un groupe ordonné, appelé *groupe des valeurs*. On pose $\text{ord}(0) = +\infty$. On note $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} := \{x \in \mathbf{K} \mid \text{ord } x \geq 0\}$ son anneau de valuation. Il s'agit d'un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}} := \{x \in \mathbf{K} \mid \text{ord } x > 0\}$. Alors le quotient $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$ est un corps, appelé le corps résiduel du corps valué \mathbf{K} .

Définition 1.1. Une *composante angulaire* sur le corps valué \mathbf{K} est un morphisme de groupes

$$\bar{ac}: \mathbf{K}^\times \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbf{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{K}})^\times$$

satisfaisant $\bar{ac}(x) = \bar{x}$ pour tout élément $x \in \mathbf{K}^\times$ tel que $\text{ord}(x) = 0$. On pose $\bar{ac}(0) = 0$.

Exemples. – Soit \mathbf{k} un corps. Alors le corps $\mathbf{k}((t))$, constitué des éléments de la forme

$$x = \sum_{i \geq N} a_i t^i$$

avec $N \in \mathbf{Z}$ et $a_i \in \mathbf{k}$, est un corps valué pour la valuation définie par l'égalité

$$\text{ord}(x) := N$$

avec $x \neq 0$ et $a_N \neq 0$. Son corps résiduel est le corps \mathbf{k} . Une composante angulaire est donnée par l'égalité $\bar{ac}(x) := a_N$.

– Le corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques est aussi un corps valué pour la valuation p -adique. Son corps résiduel est le corps fini \mathbf{F}_p à p éléments.

Définition 1.2. Un *langage de Denef-Pas* est un langage \mathcal{L}_{DP} à trois sortes :

- la sorte du corps valué munie d'une extension \mathcal{L}_{Val} du langage des anneaux ;
- la sorte du corps résiduel munie d'une extension \mathcal{L}_{Res} du langage des anneaux ;
- la sorte du groupe des valeurs munie d'une extension \mathcal{L}_{Ord} du langage de Presburger $\{+, -, 0, \leq, \equiv_2, \equiv_3, \dots\}$ où les symboles \equiv_n avec $n \geq 2$ s'interprètent comme les congruences modulo n ;

et auquel on rajoute les symboles ord et \bar{ac} . On notera $\mathcal{L}_{\text{DP}} = (\mathcal{L}_{\text{Val}}, \mathcal{L}_{\text{Res}}, \mathcal{L}_{\text{Ord}}, \text{ord}, \bar{ac})$. Une \mathcal{L}_{DP} -structure est alors un triplet $(\mathbf{K}, \mathbf{k}, \Gamma)$.

Exemple. On note $\mathcal{L}_{\text{DP}, \mathbf{P}}$ le langage de Denef-Pas correspondant aux trois langages sans extension. Dans ce cas, le triplet $(\mathbf{k}((t)), \mathbf{k}, \mathbf{Z})$ en est une structure.

Étant donné un langage de Denef-Pas \mathcal{L}_{DP} et un corps de base \mathbf{k} , on note $\mathcal{L}_{\text{DP}}(\mathbf{k})$ le langage \mathcal{L}_{DP} auquel, dans la sorte du corps valués, on a rajouté les éléments du corps $\mathbf{k}((t))$ comme constantes et, dans la sorte du corps résiduel, les éléments du corps \mathbf{k} comme constantes.

Exemple. L'expression $\exists y \ y^2 = i$ est une formule du langage $\mathcal{L}_{\text{DP}}(\mathbf{C})$, mais pas du langage $\mathcal{L}_{\text{DP}}(\mathbf{R})$ puisque $i \notin \mathbf{R}$.

Dans toute la suite, on considère le langage de Denef-Pas $\mathcal{L}_{\text{DP}} := \mathcal{L}_{\text{DP}, \mathbf{P}}$ et un objet (respectivement un morphisme) définissable fera référence à un objet (respectivement un morphisme) définissable pour ce langage.

1.2. Sous-assignements

Définition 1.3. Soient \mathcal{C} une catégorie et $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ un foncteur. Un *sous-assignement* du foncteur F est la donnée, notée h , de sous-ensembles $h(C) \subset F(C)$ pour chaque objet C de la catégorie \mathcal{C} .

Étant donnés deux sous-assignements h_1 et h_2 d'un même foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, on notera $h_1 \subset h_2$ lorsque $h_1(C) \subset h_2(C)$ pour tout objet C de la catégorie \mathcal{C} .

Dans toute la suite, on fixe un corps \mathbf{k} et on considère la catégorie $\text{Field}_{\mathbf{k}}$ des corps \mathbf{K} vérifiant $\mathbf{K} \supset \mathbf{k}$. Soient $m, n, r \geq 0$ trois entiers. Pour chaque objet \mathbf{K} de la catégorie $\text{Field}_{\mathbf{k}}$, on pose $h[m, n, r](\mathbf{K}) := \mathbf{K}((t))^m \times \mathbf{K}^n \times \mathbf{Z}^r$. On considère ainsi le foncteur

$$h[n, m, r]: \text{Field}_{\mathbf{k}} \rightarrow \text{Set}.$$

Définition 1.4. Un sous-assignement Z du foncteur $h[m, n, r]$ est *définissable* s'il existe une formule φ du langage $\mathcal{L}_{\text{DP}}(\mathbf{k})$ telle que, pour chaque objet \mathbf{K} de la catégorie $\text{Field}_{\mathbf{k}}$, on ait

$$Z(\mathbf{K}) = \{x \in h[m, n, r](\mathbf{K}) \mid (\mathbf{K}((t)), \mathbf{K}, \mathbf{Z}) \models \varphi(x)\}.$$

On définit maintenant la catégorie $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ des sous-assignements définissables où

- les objets sont les couples $(Z, h[m, n, r])$ pour trois entiers $m, n, r \geq 0$ et un sous-assignement définissable Z du foncteur $h[m, n, r]$ (on le notera simplement Z);
- un morphisme entre deux objets $(Z, h[m, n, r])$ et $(Z', h[m', n', r'])$ est la donnée d'applications $f_{\mathbf{K}}: Z(\mathbf{K}) \rightarrow Z'(\mathbf{K})$ pour chaque objet \mathbf{K} de $\text{Field}_{\mathbf{k}}$ telles que le sous-assignement du foncteur $h[m+m', n+n', r+r']$ donné par les graphes des applications $f_{\mathbf{K}}$ soit définissable (on notera $f: Z \rightarrow Z'$).

Remarque. Le sous-assignement vide $\emptyset: \mathbf{K} \mapsto \emptyset$ est l'objet initial dans la catégorie $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ et le point $h[0, 0, 0]$, noté $\{*\}$ par la suite, est l'objet final dans celle-ci.

Soit Z un objet de la catégorie $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. On définit la catégorie Def_Z des *sous-assignements définissables au-dessus de l'objet Z* où

- les objets sont les morphismes $Y \rightarrow Z$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$;
- un morphisme entre deux objets $Y \rightarrow Z$ et $Y' \rightarrow Z$ est un morphisme $Y \rightarrow Y'$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \swarrow & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Dans cette catégorie, le produit fibré $Y \times_Z Y'$ de deux objets Y et Y' existe : il s'agit du produit fibré ensembliste appliqué terme à terme.

Soient Y et Y' deux objets de la catégorie $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. On note $Y \times Y'$ l'objet $Y \times_{\{*\}} Y'$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ où les projections $Y \rightarrow \{*\}$ et $Y' \rightarrow \{*\}$ sont les morphismes finaux. On pose également $Y[m, n, r] := Y \times h[m, n, r]$.

Définition 1.5. Un *point* d'un sous-assignement définissable Z est un couple de la forme (x_0, \mathbf{K}) pour un objet \mathbf{K} de la catégorie $\text{Field}_{\mathbf{k}}$ et un élément x_0 de l'ensemble $Z(\mathbf{K})$. On note $|Z|$ l'ensemble des points du sous-assignement Z .

Poussé en avant et tiré en arrière. Soit $f: Z \rightarrow Z'$ un morphisme de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. La composition avec ce dernier définit un foncteur $f_1: \text{Def}_Z \rightarrow \text{Def}_{Z'}$. Grâce au produit tensoriel, ce même morphisme induit également un foncteur $f^*: \text{Def}_{Z'} \rightarrow \text{Def}_Z$ envoyant chaque objet $Y \rightarrow Z'$ sur l'objet $Y \times_{Z'} Z \rightarrow Z$.

Attention. À partir de maintenant, on fixe un corps \mathbf{k} . Un sous-assignement ou morphisme définissable fera toujours référence à un objet ou morphisme de la catégorie $\text{Def}_{\mathbf{k}}$.

1.3. Dimension d'un sous-assignement définissable

Soit Z un sous-assignement définissable de $h[m, 0, 0]$. Sa *clôture de Zariski* est le sous-assignement W de $h[m, 0, 0]$ définie comme l'intersection des sous-assignements définissables algébriques X de $h[m, 0, 0]$ telles que $Z \subset X$. On entend par sous-assignement définissable *algébrique* un sous-assignement défini comme le lieu d'annulation d'une famille finie de polynômes à m variables et à coefficients dans le corps $\mathbf{k}((t))$. La *dimension* du sous-assignement Z , notée $\text{Kdim } Z$, est alors la dimension du sous-ensemble algébrique affine W , c'est-à-dire la dimension de Krull de son anneau de fonctions.

Soit Z un sous-assignement définissable de $h[m, n, r]$. Notons $p: h[m, n, r] \rightarrow h[m, 0, 0]$ la projection. On définit la dimension du sous-assignement Z comme la dimension du sous-assignement $p(Z) \subset h[m, 0, 0]$, c'est-à-dire $\text{Kdim } Z := \text{Kdim } p(Z)$.

Dimension relative. Soit Λ un objet de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Soit $f: Z \rightarrow \Lambda$ un objet de Def_{Λ} . Notons $\varphi(x, y)$ la formule décrivant le graphe du morphisme f . Pour un point $\lambda = (\lambda_0, \mathbf{k}(\lambda))$ de Λ , on définit le *fibres* en ce point comme le sous-assignement Z_{λ} de $\text{Def}_{\mathbf{k}(\lambda)}$ défini par l'égalité

$$Z_{\lambda}(\mathbf{K}) := \{x \in X(\mathbf{K}) \mid (\mathbf{K}((t)), \mathbf{K}, \mathbf{Z}) \models \varphi(x, \lambda_0)\}$$

pour tout objet \mathbf{K} de $\text{Field}_{\mathbf{k}(\lambda)}$. La *dimension relative* du sous-assignement $Z \rightarrow \Lambda$ par rapport au sous-assignement Λ est au plus d , noté $\text{Kdim}_{\Lambda} Z \leq d$, si

$$\forall \lambda \in |\Lambda|, \quad \text{Kdim } Z_{\lambda} \leq d.$$

1.4. Fonctions de Presburger

Soit S un sous-assignement définissable. Tout morphisme $\alpha: S \rightarrow h[0, 0, 1]$ définit une fonction $\tilde{\alpha}: |S| \rightarrow \mathbf{Z}$. Remarquons que les fonctions α et $\tilde{\alpha}$ se déterminent mutuellement : on les confondra donc. On considère une indéterminée \mathbf{L} et l'anneau

$$\mathbf{A} := \mathbf{Z} \left[\mathbf{L}, \mathbf{L}^{-1}, \frac{1}{1 - \mathbf{L}^{-i}} \right]_{i \geq 1}.$$

Pour chaque réel $q > 1$, on dispose d'un morphisme d'évaluation $\vartheta_q: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$, évaluant l'indéterminée \mathbf{L} en le réel q . On introduit l'anneau $\mathcal{P}(S)$ des *fonctions de Presburger constructibles* comme le sous-anneau de l'anneau des fonctions $|S| \rightarrow \mathbf{A}$ engendré par

- les fonctions constantes ;
- les fonctions $\tilde{\alpha}$ et $\mathbf{L}^{\tilde{\alpha}}$ pour des morphismes $\alpha: S \rightarrow h[0, 0, 1]$.

On définit également l'anneau $\mathcal{P}_+(S)$ des fonctions $\varphi \in \mathcal{P}(S)$ vérifiant

$$\vartheta_q(\alpha(s)) \geq 0$$

pour tout point s de S et tout réel $q > 1$. Une fonction $\varphi \in \mathcal{P}(S[0, 0, r])$ est *S-intégrable* si, pour tout point (x_0, \mathbf{K}) de S et tout réel $q > 1$, la famille $(\vartheta_q(\varphi(x_0, i, \mathbf{K})))_{i \in \mathbf{Z}^r}$ est sommable. On note $\text{I}_S \mathcal{P}(S[0, 0, r])$ l'ensemble des fonctions *S-intégrables*.

Théorème 1.6. Soit $\varphi \in \text{I}_S \mathcal{P}(S[0, 0, r])$. Alors il existe une unique fonction $\mu_S(\varphi) \in \mathcal{P}(S)$ telle que

$$\vartheta_q(\mu_S(\varphi)(x_0, \mathbf{K})) = \sum_{i \in \mathbf{Z}^r} \vartheta_q(\varphi(x_0, i, \mathbf{K}))$$

pour tout point (x_0, \mathbf{K}) de S et tout réel $q > 1$. De plus, l'application

$$\mu_S: \text{I}_S \mathcal{P}(S[0, 0, r]) \rightarrow \mathcal{P}(S)$$

est un morphisme de $\mathcal{P}(S)$ -modules.

Tiré en arrière. Soit $f: Z \rightarrow Y$ un morphisme de la catégorie $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Alors la composition induit deux morphismes d'anneaux $f^*: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ et $f^*: \mathcal{P}_+(Y) \rightarrow \mathcal{P}_+(Z)$.

1.5. Semi-groupe et groupe de Grothendieck

Soit Z un sous-assignement définissable. On définit la catégorie RDef_Z comme le sous-catégorie pleine de Def_Z dont les objets sont les sous-assignements définissables Y de $Z[0, n, 0]$ pour tout entier $n \geq 0$ que l'on munit de leurs projections canonique $Y \rightarrow Z$. Un objet Y de cette catégorie sera identifié à sa projection $Y \rightarrow Z$. Pour deux objets Y et Y' de cette catégorie, le produit fibré $Y \times_Z Y'$ muni du morphisme canonique $Y \times_Z Y' \rightarrow Z$ ainsi que l'intersection $Y \cap Y'$ et l'union $Y \cup Y'$ sont encore des objets de cette catégorie.

On définit maintenant le *semi-groupe de Grothendieck*, noté $\text{SK}_0(\text{RDef}_Z)$, comme le semi-groupe libre abélien engendré par les symboles $[Y \rightarrow Z]$ pour chaque objet $Y \rightarrow Z$ de RDef_Z et soumis aux relations suivantes :

(i) $[\emptyset \rightarrow Z] = 0$;

(ii) pour tous objets isomorphes $Y \rightarrow Z$ et $Y' \rightarrow Z$, on a

$$[Y \rightarrow Z] = [Y' \rightarrow Z] ;$$

(iii) pour tous objets $Y \rightarrow Z$ et $Y' \rightarrow Z$ avec $Y, Y' \subset Z[0, n, 0]$ et $n \geq 0$, on a

$$[Y \cup Y' \rightarrow Z] + [Y \cap Y' \rightarrow Z] = [Y \rightarrow Z] + [Y' \rightarrow Z].$$

On définit également le *groupe de Grothendieck*, noté $\text{K}_0(\text{RDef}_Z)$, comme le groupe libre abélien engendré par les mêmes symboles et les relations (ii) et (iii). Les éléments de ce groupe sont appelés des *motifs* au-dessus du sous-assignement Z . Le groupe $\text{K}_0(\text{RDef}_Z)$ est muni d'une structure d'anneau donnée en posant

$$[Y \rightarrow Z] \times [Y' \rightarrow Z] := [Y \otimes_Z Y' \rightarrow Z]$$

pour deux éléments $[Y \rightarrow Z]$ et $[Y' \rightarrow Z]$ de $\text{K}_0(\text{RDef}_Z)$. Son élément neutre est alors la classe $1 := [Z \rightarrow Z]$ de l'identité.

Tiré en arrière et poussé en avant. Soit $f: Z \rightarrow Z'$ un morphisme de la catégorie $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Alors le foncteur f^* défini à la section 1.2 induit un morphisme d'anneaux

$$f^*: \text{K}_0(\text{RDef}_{Z'}) \rightarrow \text{K}_0(\text{RDef}_Z).$$

Cette construction vérifie l'identité $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. De même, le morphisme f induit un morphisme d'anneaux

$$f_!: \text{K}_0(\text{RDef}_Z) \rightarrow \text{K}_0(\text{RDef}_{Z'})$$

et on trouve l'identité $(g \circ f)_! = g_! \circ f_!$.

1.6. Fonctions motiviques constructibles

1.6.1. fonctions motiviques constructibles

Soit Z un sous-assignement définissable. On définit le sous-anneau $\mathcal{P}^0(Z)$ de $\mathcal{P}(Z)$ (respectivement le sous-semi-anneau $\mathcal{P}_+^0(Z)$ de $\mathcal{P}_+(Z)$) engendré par les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_Y$ pour chaque sous-assignement $Y \subset Z$ et par la fonction constante $\mathbf{L} - 1$. Ensuite, on considère les motifs

$$\mathbf{L} := [Z[0, 1, 0] \rightarrow Z] \in \text{K}_0(\text{RDef}_Z)$$

et

$$\mathbf{L} - 1 := [Z \times \mathbf{G}_m \rightarrow Z] \in \text{K}_0(\text{RDef}_Z)$$

où le sous-assignement $\mathbf{G}_m := h[0, 1, 0] \setminus \{0\}$ est le *groupe multiplicatif*. Les axiomes (ii) et (iii) assurent que $(\mathbf{L} - 1) + 1 = \mathbf{L}$. Le morphisme d'anneaux

$$\mathcal{P}^0(Z) \rightarrow \text{K}_0(\text{RDef}_Z)$$

envoyant chaque fonction indicatrice $\mathbf{1}_Y$ sur la classe $[Y \rightarrow Z]$ et la fonction constante $\mathbf{L} - 1$ sur la classe $\mathbf{L} - 1$ fait de l'anneau $K_0(\text{RDef}_Z)$ un $\mathcal{P}^0(Z)$ -module. De la même manière, on munit le semi-anneau $\text{SK}_0(\text{RDef}_Z)$ d'une structure de $\mathcal{P}^0(Z)$ -semi-module. On définit alors l'anneau des *fonctions motiviques constructibles*

$$\mathcal{C}(Z) := K_0(\text{RDef}_Z) \otimes_{\mathcal{P}^0(Z)} \mathcal{P}(Z)$$

ainsi que l'anneau des *fonctions motiviques constructibles positives*

$$\mathcal{C}_+(Z) := \text{SK}_0(\text{RDef}_Z) \otimes_{\mathcal{P}_+^0(Z)} \mathcal{P}_+(Z).$$

Notation. Pour un sous-assignement Y de Def_Z , on notera $\mathbf{1}_Z$ la fonction $\mathbf{1}_Z \otimes 1 \in \mathcal{C}(Z)$.

Tiré en arrière. Soit $f: Z \rightarrow Y$ un morphisme de la catégorie Def_k . Alors les morphismes f^* définis précédemment sur les fonctions de Presburger et sur les motifs induisent un morphisme d'anneaux « image inverse » $f^*: \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(Z)$.

Poussés en avant. L'obtention de poussés en avant est plus délicate. Pour le moment, on sait le faire dans les deux cas suivants. Le cas général sera donné par l'intégrale motivique.

Soit $i: Z \hookrightarrow Z'$ une inclusion entre deux objets de Def_k . On a déjà vu que la composition donne un morphisme de groupes $i_!: K_0(\text{Def}_Z) \rightarrow K_0(\text{Def}_{Z'})$. De plus, l'extension par zéro des fonctions donne un morphisme d'anneaux $i_!: \mathcal{P}(Z) \rightarrow \mathcal{P}(Z')$. Avec le produit tensoriel, on obtient alors un morphisme de groupes $i_!: \mathcal{C}(Z) \rightarrow \mathcal{C}(Z')$. De même, on trouve un morphisme de groupes $i_!: \mathcal{C}_+(Z) \rightarrow \mathcal{C}_+(Z')$.

Soient S un sous-assignement définissable et $\pi: S[0, n, 0] \rightarrow S$ le morphisme de projection. Avec la proposition 5.1.3 de l'article [2], on a un isomorphisme

$$\mathcal{C}(S[0, n, 0]) \simeq K_0(\text{RDef}_{S[0, n, 0]}) \otimes_{\mathcal{P}^0(S)} \mathcal{P}(S)$$

ce qui permet, à partir du morphisme $\pi_!: K_0(\text{RDef}_{S[0, n, 0]}) \rightarrow K_0(\text{RDef}_S)$, de définir un morphisme $\pi_!: \mathcal{C}(S[0, n, 0]) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ en agissant uniquement sur les motifs.

1.6.2. Fonctions motiviques constructibles

Soit Z un objet de Def_k . Soit $d \geq 0$ un entier. Une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(Z)$ est de *dimension au plus d* si on peut l'écrire sous la forme $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{Z_i}$ pour des éléments $\lambda_i \in \mathbf{A}$ et des sous-assignements Z_i de Def_Z de dimension au plus d . Elle est de *dimension d* si elle est de dimension au plus d et elle n'est pas de dimension au plus $d - 1$. On note $\mathcal{C}^{\leq d}(Z)$ le sous-groupe de $\mathcal{C}(Z)$ des fonctions de dimension au plus d . On définit alors le quotient

$$C^d(Z) := \mathcal{C}^{\leq d}(Z) / \mathcal{C}^{\leq d-1}(Z)$$

puis le groupe abélien gradué des *Fonctions motiviques constructibles*

$$C(Z) := \bigoplus_{d \geq 0} C^d(Z).$$

Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(Z)$ de dimension d ou nulle, on notera $[\varphi]$ sa classe dans $C^d(Z)$ et on notera également sous la forme même forme son image dans $C(Z)$.

On remarque que les ensembles $\mathcal{C}^{\leq d}(Z)$ sont des idéaux de l'anneau $\mathcal{C}(Z)$. Ainsi le groupe $C(Z)$ est muni, grâce au produit sur l'anneau $\mathcal{C}(Z)$, d'une structure de $\mathcal{C}(Z)$ -module. De même, on définit le $\mathcal{C}_+(Z)$ -semi-module $C_+(Z)$ des Fonctions motiviques positives constructibles.

1.7. Jacobien d'une fonction définissable

Soient \mathbf{K} un objet de Field_k et $A \subset \mathbf{K}^n$ une partie. Le *jacobien* d'une fonction $h: A \rightarrow \mathbf{K}^n$ est la fonction $\text{jac } h: A \rightarrow \mathbf{K}$ définie, pour tout point $x \in A$, par les points suivants :

- si la matrice jacobienne de la fonction h au point x existe, alors l'élément $\text{jac } h(x)$ est son déterminant ;

– sinon $\text{jac } h(x) = 0$.

Soient maintenant C un ensemble et $A \subset C \times \mathbf{K}^n$ une partie. Soit $f: A \rightarrow C \times \mathbf{K}^n$ une fonction faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \times \mathbf{K}^n \\ & \searrow & \downarrow \\ & & C. \end{array}$$

où les fonctions $A \rightarrow C$ et $C \times \mathbf{K}^n \rightarrow C$ sont les projections. Pour chaque élément $c \in C$, on note A_c l'ensemble des points $x \in \mathbf{K}^n$ tel que $(c, x) \in A$ et on note $f_c: A_c \rightarrow \mathbf{K}^n$ la fonction induite grâce à la commutativité du triangle. On définit la fonction $\text{jac}_C f: A \rightarrow \mathbf{K}$ par l'égalité

$$\text{jac}_C f(c, x) := \text{jac } f_c(x), \quad (c, x) \in A.$$

Definition-proposition 1.7. Soient $A \subset X[n, 0, 0]$ un objet de Def_X et $g: A \rightarrow X[n, 0, 0]$ un morphisme de Def_X . Alors il existe un unique morphisme $\text{jac}_X g: A \rightarrow h[1, 0, 0]$ de Def_X tel que

$$(\text{jac}_X g)_\mathbf{K} = \text{jac}_{X(\mathbf{K})} g_\mathbf{K}$$

pour tout objet \mathbf{K} de $\text{Field}_\mathbf{k}$.

Étant donnés de tels objets, on peut considérer le morphisme $\text{ordjac } g: A \rightarrow h[0, 0, 1]$ de Def_X défini par la relation $(\text{ordjac } g)_\mathbf{K} := \text{ord} \circ (\text{jac}_X g)_\mathbf{K}$ pour tout objet \mathbf{K} de $\text{Field}_\mathbf{k}$.

1.8. Le foncteur d'intégration motivique

Intégration des fonctions motiviques constructibles positives. Dans toute la suite, on suppose que le corps \mathbf{k} est de caractéristique nulle.

Théorème 1.8 (Cluckers-Loeser). Soit S un sous-assignement définissable. Alors il existe un unique foncteur de la catégorie Def_S dans la catégorie des semi-groupes abéliens, envoyant un objet Z de Def_S sur un semi-groupe $\text{I}_S C_+(Z)$ et envoyant un morphisme f de Def_S sur un morphisme de semi-groupes $f_!$, vérifiant les points suivants.

- (A0) – Pour tous morphismes composables f et g dans Def_S , on a $(f \circ g)_! = f_! \circ g_!$.
– Soit $\lambda: S \rightarrow S'$ un morphisme de $\text{Def}_\mathbf{k}$. Notons $\lambda_+: \text{Def}_S \rightarrow \text{Def}_{S'}$ le foncteur induit par la composition. Alors

$$\text{I}_{S'} C_+(\lambda_+(Z)) \subset \text{I}_S C_+(Z)$$

et, pour toute fonction $\varphi \in \text{I}_{S'} C_+(\lambda_+(Z))$ et tout morphisme $f: Z \rightarrow Y$ de Def_S , les morphismes

$$\lambda_+(f)_!: \text{I}_{S'} C_+(\lambda_+(Z)) \rightarrow \text{I}_{S'} C_+(\lambda_+(Y)) \quad \text{et} \quad f_!: \text{I}_S C_+(Z) \rightarrow \text{I}_S C_+(Y)$$

envoie la fonction φ sur la même fonction.

- Pour tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ de Def_S et toute fonction $\varphi \in C_+(X)$, on a

$$\varphi \in \text{I}_S C_+(X) \iff \begin{cases} \varphi \in \text{I}_Y C_+(X), \\ f_!(\varphi) \in \text{I}_S C_+(Y). \end{cases}$$

- (A1) Le semi-groupe $\text{I}_S C_+(Z)$ est un sous-semi-groupe gradué de $C_+(Z)$ et on a

$$\text{I}_S C_+(S) = C_+(S).$$

- (A2) Soient Z_1 et Z_2 deux objets de Def_S et Z leur union disjointe. Alors l'isomorphisme

$$C_+(Z) \simeq C_+(Z_1) \oplus C_+(Z_2)$$

induit un isomorphisme

$$\Phi: \text{I}_S C_+(Z) \rightarrow \text{I}_S C_+(Z_1) \oplus \text{I}_S C_+(Z_2)$$

vérifiant

$$f_!(\Phi^{-1}(\varphi_1 \oplus \varphi_2)) = (f|_{Z_1})_!(\varphi_1) \oplus (f|_{Z_2})_!(\varphi_2)$$

pour tout morphisme $f: Z \rightarrow Y$ de Def_S et toutes fonctions $\varphi_i \in \text{I}_S C_+(Z_i)$.

(A3) Soit $f: Z \rightarrow Y$ un morphisme dans Def_S . Soient $\alpha \in C_+(Y)$ et $\beta \in \text{I}_S C_+(Z)$. Alors

$$\alpha f_!(\beta) \in \text{I}_S C_+(Y) \iff f^*(\alpha)\beta \in \text{I}_S C_+(Z).$$

Dans ce cas, on a $f_!(f^*(\alpha)\beta) = \alpha f_!(\beta)$.

(A4) Soit $i: Z \rightarrow Z'$ une inclusion entre deux objets de Def_S . Considérons le morphisme $i_!: \mathcal{C}_+(Z) \rightarrow \mathcal{C}_+(Z')$ défini à la section 1.6. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_+(Z)$. Alors

$$[\varphi] \in \text{I}_S C_+(Z) \iff [i_!(\varphi)] \in \text{I}_S C_+(Z').$$

Dans ce cas, on a $i_!([\varphi]) = [i_!(\varphi)]$.

Soit Y un objet de Def_S .

(A5) *Intégration des variables du corps résiduel.* Notons $\pi: Z := Y[0, n, 0] \rightarrow Y$ la projection. Considérons le morphisme $\pi_!: C_+(Z) \rightarrow C_+(Y)$ défini à la section 1.6. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_+(Z)$. Alors

$$[\varphi] \in \text{I}_S C_+(Z) \iff [\pi_!(\varphi)] \in \text{I}_S C_+(Y).$$

Dans ce cas, on a $\pi_!([\varphi]) = [\pi_!(\varphi)]$.

(A6) *Intégration des variables du groupe des valeurs.* Notons $\pi: Z := Y[0, 0, r] \rightarrow Y$ la projection. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_+(Z)$. Alors $[\varphi] \in \text{I}_S C_+(Z)$ si et seulement s'il existe une fonction Y -intégrable $\varphi' \in \mathcal{C}_+(Z)$ au sens de la section 1.4 telle que $[\varphi] = [\varphi']$. Dans ce cas, on a $\pi_!([\varphi]) = \mu_S([\varphi'])$.

(A7) *Volume des grosses boules.* Soient $\alpha: Y \rightarrow h[0, 0, 1]$, $\xi: Y \rightarrow h[0, 1, 0] \setminus \{0\}$ et $c: Y \rightarrow h[1, 0, 0]$ trois morphismes de Def_S . Considérons le sous-assignement définissable $Z \subset Y[1, 0, 0]$ défini, pour tout corps \mathbf{K} de $\text{Field}_{\mathbf{k}}$, par l'égalité

$$Z(\mathbf{K}) := \left\{ (y, z) \in Y(\mathbf{K}) \times \mathbf{K}((t)) \mid \begin{array}{l} \text{ord}(z - c_{\mathbf{K}}(y)) = \alpha_{\mathbf{K}}(y), \\ \overline{\text{ac}}(z - c_{\mathbf{K}}(y)) = \xi_{\mathbf{K}}(y) \end{array} \right\}.$$

Notons $f: Z \rightarrow Y$ la projection. Alors

$$[\mathbf{1}_Z] \in \text{I}_S C_+(Z) \iff \mathbf{L}^{-\alpha-1}[\mathbf{1}_Y] \in \text{I}_S C_+(Y).$$

Dans ce cas, on a

$$f_!([\mathbf{1}_Z]) = \mathbf{L}^{-\alpha-1}[\mathbf{1}_Y].$$

(A8) *Théorème de changement de variables.* Soit $c: Y \rightarrow h[0, 1, 0] \setminus \{0\}$ un morphisme de Def_S . Considérons le sous-assignement définissable $Z \subset Y[1, 0, 0]$ défini, pour tout corps \mathbf{K} de $\text{Field}_{\mathbf{k}}$, par l'égalité

$$Z(\mathbf{K}) := \{(y, z) \in Y(\mathbf{K}) \times \mathbf{K}((t)) \mid z = c_{\mathbf{K}}(y)\}.$$

Notons $f: Z \rightarrow Y$ la projection qui est un isomorphisme et $\tilde{f}: Z \rightarrow Y[1, 0, 0]$ cette même projection suivie du morphisme canonique $Y \rightarrow Y[1, 0, 0]$. Alors

$$[\mathbf{1}_Z] \in \text{I}_S C_+(Z) \iff \mathbf{L}^{(\text{ord}_{\text{Jac}_Y \tilde{f}} \circ f^{-1})} \in \text{I}_S C(Y).$$

Dans ce cas, on a

$$f_!([\mathbf{1}_Z]) = \mathbf{L}^{(\text{ord}_{\text{Jac}_Y \tilde{f}} \circ f^{-1})}.$$

Remarque. La functorialité de cette construction est appelé le *théorème de Fubini*.

Donnons quelques idées de la construction d'un tel foncteur. Soit $f: Z \rightarrow Y$ un morphisme de Def_S . En notant Γ_f son graphe et en considérant l'injection $i: Z \rightarrow \Gamma_f$ et la projection $p: \Gamma_f \rightarrow Y$, on peut écrire $f = p \circ i$. Avec la functorialité, il suffit donc de savoir construire les morphismes de semi-groupes $p_!$ et $i_!$.

– Le cas d'une injection est facile : elles correspondent simplement à l'amalgame des différents

poussés en avant que l'on a construit dans ce texte (pour les fonctions de Presburger, on les prolonge par zéro).

- Le cas d'une projection sur fait par récurrence sur la dimension du corps valué. Pour l'hérédité, on utilise un théorème de décomposition cellulaire (l'intégration des cellules étant donnée par l'axiome (A7)). Lorsque la dimension valuative est nulle, on utilise un théorème d'élimination des quantificateurs dans le langage de Denef-Pas pour séparer l'intégration au niveau du groupe des valeurs et du corps résiduel.

Remarque. Pour simplifier et alléger les notations, on omettra de préciser les corps \mathbf{K} lorsqu'on définit un sous-assignement. Par exemple, le sous-assignement de l'axiome (A7) sera écrit sous la forme

$$Z = \{(y, z) \in Y[1, 0, 0] \mid \text{ord}(z - c(y)) = \alpha(y), \bar{\text{ac}}(z - c(y)) = \xi(y)\}.$$

Pour un objet $f: X \rightarrow S$ de Def_S , les éléments du semi-groupe $\text{I}_S C_+(X)$ sont appelés les fonctions *S-intégrables positives* ou *f-intégrables positives*.

Mesure motivique. Lorsque $S = \{*\}$, pour tout objet Z de Def_S muni du morphisme final $f: Z \rightarrow S$, on notera simplement $\text{IC}_+(Z)$ le semi-groupe $\text{I}_S C_+(Z)$. Par ailleurs, pour une fonction $\varphi \in \text{IC}_+(S)$, sa *mesure motivique* est l'élément

$$\mu(\varphi) := f_!(\varphi) \in \text{IC}_+(S) \simeq \text{SK}_0(\text{RDef}_S) \otimes_{\mathbf{N}[\mathbf{L}-1]} \mathbf{A}_+$$

avec $\mathbf{A}_+ := \{a \in \mathbf{A} \mid \forall q > 1, \vartheta_q(a) \geq 0\}$. Maintenant, pour un sous-assignement définissable $Z \subset h[m, n, 0]$ tel que $[1_Z] \in \text{IC}_+(S)$, on pose $\mu(Z) := \mu([1_Z] \otimes 1)$.

Remarque. Quand on parle d'une constante d'un sous-assignement $Y \subset h[n, m, r]$, il s'agit de l'image du neutre par un morphisme définissable $c: \{*\} \rightarrow Y$. Comme ce dernier est définissable, tous les éléments $c_{\mathbf{K}}(*)$ avec $\mathbf{K} \in \text{Field}_{\mathbf{k}}$ sont égaux (cf. paragraphe suivant) : il s'agit donc d'un élément de l'ensemble $Y(\mathbf{k}) \subset \mathbf{k}((t))^m \times \mathbf{k}^n \times \mathbf{Z}^r$. On notera $c \in Y$. Attention à ne pas confondre avec la notation $c \in |Y|$ qui ne désigne pas la même chose.

En effet, montrons que $c_{\mathbf{k}}(*) = c_{\mathbf{K}}(*)$ pour tout corps \mathbf{K} de $\text{Field}_{\mathbf{k}}$. Le morphisme c étant définissable, il existe une formule $\varphi(x, y)$ du langage $\mathcal{L}_{\text{DP}}(\mathbf{k})$ telle que

$$\{(x, y) \in \{*\} \times Y \mid f(x) = y\} = \{(x, y) \in \{*\} \times Y \mid \varphi(x, y)\}.$$

Mais la source $\{*\}$ du morphisme c étant un singleton, l'ensemble précédent est aussi un singleton. L'élément $c_{\mathbf{k}}(*)$ est l'unique élément $y \in Y(\mathbf{k})$ vérifiant la formule $\varphi(*, y)$. De même, l'élément $c_{\mathbf{K}}(*)$ est l'unique élément $y' \in Y(\mathbf{K})$ vérifiant la formule $\varphi(*, y')$. Mais comme $Y(\mathbf{k}) \subset Y(\mathbf{K})$, l'unicité force à avoir $c_{\mathbf{k}}(*) = c_{\mathbf{K}}(*)$.

Exemple (volume d'une boule). Soient $\alpha \in h[0, 0, 1]$, $c \in h[1, 0, 0]$ et $\xi \in h[0, 1, 0] \setminus \{0\}$ trois éléments. Alors l'axiome (A7) avec $Y = \{*\}$ donne

$$\mu(\{z \in h[1, 0, 0] \mid \text{ord}(z - c) = \alpha, \bar{\text{ac}}(z - c) = \xi\}) = \mathbf{L}^{-\alpha-1}.$$

Notons que l'ensemble mesuré est bien la boule

$$\{z \in h[1, 0, 0] \mid \text{ord}(z - c - \xi t^\alpha) \geq \alpha + 1\}.$$

En particulier, la mesure de la boule de centre c et de rayon valuatif α

$$\text{B}(c, \alpha) := \{z \in h[1, 0, 0] \mid \text{ord}(z - c) \geq 0\}$$

veut $\mathbf{L}^{-\alpha}$. De même, la mesure du sous-assignement \mathcal{O} défini par l'égalité $\mathcal{O}(\mathbf{K}) := \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ pour tout corps \mathbf{K} de $\text{Field}_{\mathbf{k}}$ vaut 1 et la mesure du sous-assignement \mathbf{m} est \mathbf{L}^{-1} .

Intégration des fonctions motiviques constructibles générales. Soient S un objet de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ et X un objet de Def_S . Notons $\iota: C_+(X) \rightarrow C(X)$ l'injection canonique. On dira qu'une fonction $\varphi \in C(X)$ est *S-intégrable* si elle peut s'écrire sous la forme $\varphi = \iota(\varphi_+) - \iota(\varphi_-)$ pour deux fonctions $\varphi_+, \varphi_- \in \text{I}_S C_+(X)$. Dans ce contexte, un théorème analogue au théorème 1.8 existe.

Théorème 1.9 (*Cluckers-Loeser*). Soit S un sous-assignement définissable. Alors il existe un unique foncteur de la catégorie Def_S dans la catégorie des semi-groupes abéliens

$$Z \mapsto I_S C(Z)$$

vérifiant les axiomes (A0) à (A8) en remplaçant les bonnes notations.

1.9. Intégration relative

Soient Λ un objet de Def_k et $Z \rightarrow \Lambda$ un objet de Def_Λ . Comme précédemment, on définit les sous-groupes $\mathcal{C}^{\leq d}(Z \rightarrow \Lambda)$ en remplaçant la dimension par la dimension relativement au sous-assignement Λ . Ainsi on obtient des quotients $C^d(Z \rightarrow \Lambda)$ et des groupes abéliens gradués $C(Z \rightarrow \Lambda)$. Notons que $C(\Lambda \rightarrow \Lambda) = \mathcal{C}(\Lambda)$.

Dans ce cas, un théorème analogue au théorème 1.9 existe : pour tout objet S de Def_Λ , on peut construire un foncteur de la catégorie Def_S dans la catégorie des groupes abéliens

$$Z \mapsto I_S C(Z \rightarrow \Lambda)$$

satisfaisant les axiomes (A0) à (A8) où l'ordre du jacobien de l'axiome (A8) est remplacé par l'ordre du jacobien relativement au sous-assignement Λ .

2. Intégration des fonctions motiviques constructibles exponentielles

Les deux prochaines parties reposent sur l'article [1].

2.1. Groupe de Grothendieck exponentiel

Soit Z un objet de Def_k . On souhaite enrichir la catégorie RDef_Z en rajoutant des « fonctions exponentielles ». On considère la catégorie $\text{RDef}_Z^{\text{exp}}$ où

- les objets sont les triplets $(Y \rightarrow Z, \xi, g)$ pour un objet $Y \rightarrow Z$ de RDef_Z et deux morphismes $\xi: Y \rightarrow h[0, 1, 0]$ et $g: Y \rightarrow h[1, 0, 0]$ de Def_k ;
- un morphisme entre deux objets $(Y' \rightarrow Z, \xi', g')$ et $(Y \rightarrow Z, \xi, g)$ de cette nouvelle catégorie est un morphisme $h: Y' \rightarrow Y$ de RDef_Z tel que

$$\xi' = \xi \circ h \quad \text{et} \quad g' = g \circ h.$$

Le foncteur $\text{RDef}_Z \rightarrow \text{RDef}_Z^{\text{exp}}$ envoyant un objet Y sur l'objet $(Y, 0, 0)$ et envoyant un morphisme sur lui-même est pleinement fidèle. On peut donc considérer la catégorie RDef_Z comme une sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{RDef}_Z^{\text{exp}}$.

On définit maintenant le *groupe de Grothendieck exponentiel*, noté $K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$, comme le groupe libre abélien engendré par les symboles

$$[Y \rightarrow Z, \xi, g]$$

pour chaque objet $(Y \rightarrow Z, \xi, g)$ de $\text{RDef}_Z^{\text{exp}}$ et soumis aux relations deux relations suivantes :

(R1) pour tous objets isomorphes $(Y \rightarrow Z, \xi, g)$ et $(Y' \rightarrow Z, \xi', g')$, on a

$$[Y \rightarrow Z, \xi, g] = [Y' \rightarrow Z, \xi', g'] ;$$

(R2) pour tout objet X de RDef_Z , tous sous-assignements définissables Y et Y' de X et tous morphismes $\xi: Y \cup Y' \rightarrow h[0, 1, 0]$ et $g: Y \cap Y' \rightarrow h[1, 0, 0]$, on a

$$\begin{aligned} [Y \cup Y' \rightarrow Z, \xi, g] + [Y \cap Y' \rightarrow Z, \xi|_{Y \cap Y'}, g|_{Y \cap Y'}] \\ = [Y \rightarrow Z, \xi|_Y, g|_Y] + [Y' \rightarrow Z, \xi|_{Y'}, g|_{Y'}] ; \end{aligned}$$

(R3) pour tout objet $(Y \rightarrow Z, \xi, g)$ et tout morphisme $h: Y \rightarrow h[1, 0, 0]$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ vérifiant

$$\forall (y, \mathbf{K}) \in |Y|, \quad \text{ord } h_{\mathbf{K}}(y) \geq 0,$$

en notant $\bar{h}: Y \rightarrow h[0, 1, 0]$ le morphisme induit sur le corps résiduel, on a

$$[Y \rightarrow Z, \xi, g + h] = [Y \rightarrow Z, \xi + \bar{h}, g];$$

(R4) pour tout objet $(Y[0, 1, 0] \rightarrow Z, \xi, g)$, avec $p: Y[0, 1, 0] \rightarrow h[0, 1, 0]$ et $Y[0, 1, 0] \rightarrow Y$ les projections, si les morphismes $\pi: Y[0, 1, 0] \rightarrow Z, \xi$ et g se factorisent sous les formes

$$\begin{array}{ccc} Y[0, 1, 0] & \xrightarrow{\pi, \xi \text{ ou } g} & X \\ \downarrow p & \searrow & \\ Y & & \end{array}$$

avec $X \in \{Z, h[0, 1, 0], h[1, 0, 0]\}$, alors

$$[Y[0, 1, 0] \rightarrow Z, \xi + p, g] = 0.$$

On peut munir (voir [1, Lemma 3.1.1]) le groupe $K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$ d'une structure d'anneau de la manière suivante.

Lemme 2.1. Soient $[Y \rightarrow Z, \xi, g]$ et $[Y' \rightarrow Z, \xi', g']$ deux éléments de $K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$. Notons $p: Y \otimes_Z Y' \rightarrow Y$ et $p': Y \otimes_Z Y' \rightarrow Y'$ les projections. On pose

$$[Y \rightarrow Z, \xi, g] \times [Y' \rightarrow Z, \xi', g'] := [Y \otimes_Z Y' \rightarrow Z, \xi \circ p + \xi' \circ p', g \circ p + g' \circ p'].$$

Alors cette multiplication est bien définie et son élément neutre de cette opération est la classe $[\text{id}_Z: Z \rightarrow Z, 0, 0]$.

De même, en utilisant les relations (i), (ii) et (iv), on définit le sous-anneau $K_0(\text{RDef}_Z^{\text{e}})$ de l'anneau $K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$.

Notations. Tout élément $[Y \rightarrow Z, \xi, g]$ sera noté sous la forme

$$\mathbf{e}^{\xi} \mathbf{E}(g)[Y \rightarrow Z].$$

Lorsque $\xi = 0$, on le notera $\mathbf{E}(g)[Y \rightarrow Z]$. Lorsque $g = 0$, on le notera $\mathbf{e}^{\xi}[Y \rightarrow Z]$. Lorsque $Y = Z$ et le morphisme $Z \rightarrow Z$ est l'identité, on le notera $\mathbf{e}^{\xi} \mathbf{E}(g)$. On fera aussi les simplifications de notations lorsqu'on se trouve dans plusieurs des cas précédents. De la sorte, l'élément $[Z \rightarrow Z]$ est l'élément neutre multiplicatif de l'anneau $K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$.

Remarque. Les objets \mathbf{e}^{ξ} et $\mathbf{E}(g)$ s'interprètent respectivement comme des caractères additifs universels sur le corps résiduel et le corps valué. L'axiome (R3) exprime la compatibilité entre ces deux derniers modulo t et il force à ce que le caractère sur le corps valué soit trivial sur l'idéal maximal $\{\text{ord } x > 0\}$. Quant à l'axiome (R4) pour $Z = Y = \{*\}$ avec $\xi = 0$ et $g = 0$, il se réécrit sous la forme

$$[h[0, 1, 0] \rightarrow \{*\}, p, 0] = 0$$

qui traduit l'égalité

$$\sum_{x \in \mathbf{F}_p} \psi(x) = 0$$

que l'on a pour tout caractère additif non trivial $\psi: \mathbf{F}_p^{\times} \rightarrow \mathbf{C}^{\times}$ prolongé sur tous le corps \mathbf{F}_p en posant $\psi(0) = 0$.

Lemme 2.2. Les morphismes d'anneaux naturels

$$K_0(\text{RDef}_Z) \rightarrow K_0(\text{RDef}_Z^{\text{e}}) \rightarrow K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$$

sont injectifs.

Tiré en arrière et poussé en avant. Un morphisme $f: Z \rightarrow Z'$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ induit deux morphismes d'anneaux

$$f^*: K_0(\text{RDef}_{Z'}^{\text{exp}}) \rightarrow K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}}) \quad \text{et} \quad f_!: K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}}) \rightarrow K_0(\text{RDef}_{Z'}^{\text{exp}}).$$

respectivement grâce au produit fibré et à la composition par le morphisme f .

2.2. Fonctions motiviques constructibles exponentielles

Soit Z un objet de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Le morphisme d'anneaux canonique $K_0(\text{RDef}_Z) \rightarrow \mathcal{C}(Z)$ envoyant un motif a sur le produit $a \otimes 1$ munit l'anneau $\mathcal{C}(Z)$ d'une structure de $K_0(\text{RDef}_Z)$ -module. Le morphisme d'anneaux canonique $K_0(\text{RDef}_Z) \rightarrow K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$ envoyant une classe $[Y]$ sur la classe $[Y, 0, 0]$ muni l'anneau $K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}})$ d'une structure de $K_0(\text{RDef}_Z)$ -module. On définit alors l'anneau des *fonctions motiviques constructibles exponentielles*

$$\mathcal{C}(Z)^{\text{exp}} := \mathcal{C}(Z) \otimes_{K_0(\text{RDef}_Z)} K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}}).$$

Comme dans la section 1.6.2, on définit le groupe abélien gradué des *Fonctions motiviques constructibles exponentielles*

$$C(Z)^{\text{exp}} := \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{C}^{\leq d}(Z)^{\text{exp}} / \mathcal{C}^{\leq d-1}(Z)^{\text{exp}}$$

où les idéaux $\mathcal{C}^{\leq d}(Z)^{\text{exp}}$ de $\mathcal{C}(Z)^{\text{exp}}$ sont ceux engendrés par les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_Z$ de sous-assignements Z' de Z de dimension au plus d .

Tiré en arrière. Soit $f: Z \rightarrow Z'$ un morphisme de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Les morphismes f^* définis précédemment sur les anneaux $K_0(\text{RDef}_{Z'}^{\text{exp}})$ et $\mathcal{C}(Z')$ sont compatibles avec la structure de $K_0(\text{RDef}_Z)$ -module et induisent donc un morphisme de $K_0(\text{RDef}_Z)$ -modules

$$f^*: \mathcal{C}(Z')^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{C}(Z)^{\text{exp}}.$$

Fonctions intégrables. Soient S un objet de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ et Z un objet de Def_S . On définit le groupe abélien gradué des *Fonctions motiviques exponentielles S -intégrables*

$$I_S C(Z)^{\text{exp}} := I_S C(Z) \otimes_{K_0(\text{RDef}_Z)} K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}}).$$

Lemme 2.3. Les morphismes de groupes gradués naturels

$$C(Z) \rightarrow C(Z)^{\text{exp}} \quad \text{et} \quad I_S C(Z) \rightarrow I_S C(Z)^{\text{exp}}$$

sont injectifs.

Poussés en avant. Soit $i: Z \hookrightarrow Z'$ une inclusion entre deux objets de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. On dispose déjà d'un morphisme $i_!: K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}}) \rightarrow K_0(\text{RDef}_{Z'}^{\text{exp}})$ induit par la composition. Comme il est compatible avec la structure de $K_0(\text{RDef}_Z)$ -modules, on peut définir le morphisme

$$i_!: \mathcal{C}(Z)^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{C}(Z')^{\text{exp}}$$

ce qui donne des morphismes de groupes $i_!: \mathcal{C}^{\leq d}(Z)^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{C}^{\leq d}(Z')^{\text{exp}}$. On obtient ainsi le morphisme de groupes gradués

$$i_!: C(Z)^{\text{exp}} \rightarrow C(Z')^{\text{exp}}.$$

Si les objets Z et Z' appartiennent à Def_S , alors une restriction donne aussi un morphisme de groupes gradués

$$i_!: I_S C(Z)^{\text{exp}} \rightarrow I_S C(Z')^{\text{exp}}.$$

Soient Y un objet de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$ et Z un sous-assignement définissable de $Y[0, n, 0]$. Notons $\pi: Z \rightarrow Y$ la projection. On dispose déjà de morphismes

$$\pi_!: K_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}}) \rightarrow K_0(\text{RDef}_Y^{\text{exp}}) \quad \text{et} \quad \pi_!: \mathcal{C}(Z) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$$

ce qui fournit le morphisme $\pi_!: \mathcal{C}(Z)^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{C}(Y)^{\text{exp}}$ et, comme précédemment, le morphisme de groupes

$$\pi_!: C(Z)^{\text{exp}} \rightarrow C(Y)^{\text{exp}}$$

et aussi le morphisme de groupes gradués

$$\pi_! : \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}} \longrightarrow \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Y)^{\mathrm{exp}}.$$

Soit Z un objet de Def_S . Notons $f : Z[0, 0, r] \longrightarrow Z$ la projection. On dispose déjà d'un morphisme $f_! : \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z[0, 0, r]) \longrightarrow \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)$. Avec l'isomorphisme

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{RDef}_{Z[0,0,r]}^{\mathrm{exp}}) \simeq \mathrm{K}_0(\mathrm{RDef}_Z^{\mathrm{exp}}) \otimes_{\mathcal{P}^0(Z)} \mathcal{P}^0(Z[0, 0, r]),$$

on obtient alors un morphisme de groupes gradués

$$f_! : \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z[0, 0, r])^{\mathrm{exp}} \longrightarrow \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}}.$$

2.3. Le foncteur d'intégration motivique exponentielle

On suppose toujours que la caractéristique du corps \mathbf{k} est nulle.

Théorème 2.4 (*Cluckers-Loeser*). Soit S un sous-assignement définissable. Alors il existe un unique foncteur de la catégorie Def_S dans la catégorie des semi-groupes abéliens, envoyant un objet Z de Def_S sur un semi-groupe $\mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$ et envoyant un morphisme f de Def_S sur un morphisme de semi-groupes $f_!$, vérifiant les points suivants.

(A1) Pour tout morphisme $f : Z \longrightarrow Y$ de Def_S , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Y)^{\mathrm{exp}} & \xrightarrow{f_!} & \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Y) & \xrightarrow{f_!} & \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z) \end{array}$$

commute où les morphismes sont ceux donnés par le lemme 2.3 et le théorème 1.8.

(A2) Soient Z et Y deux objets de Def_S . On suppose que $Z = Z_1 \sqcup Z_2$ pour deux sous-assignements Z_1 et Z_2 de Z et que $Y = Y_1 \sqcup Y_2$ pour deux sous-assignements Y_1 et Y_2 de Y . Soit $f : Z \longrightarrow Y$ un morphisme de Def_S tel que $f(Z_i) \subset Y_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, avec l'isomorphisme

$$\Phi : \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}} \longrightarrow \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z_1)^{\mathrm{exp}} \oplus \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z_2)^{\mathrm{exp}},$$

pour toutes fonctions $\pi_i \in \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z_i)^{\mathrm{exp}}$ avec $i \in \{1, 2\}$, on a

$$f_!(\Phi^{-1}(\varphi_1 \oplus \varphi_2)) = (f_1)_!(\varphi_1) \oplus (f_1)_!(\varphi_2)$$

où les morphismes $f_i : Z_i \longrightarrow Y_i$ avec $i \in \{1, 2\}$ sont les restrictions du morphisme f .

(A3) Soit $f : Z \longrightarrow Y$ un morphisme dans Def_S . Soient $\alpha \in \mathcal{C}(Y)^{\mathrm{exp}}$ et $\beta \in \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$. Si $f^*(\alpha)\beta \in \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$, alors

$$f_!(f^*(\alpha)\beta) = \alpha f_!(\beta).$$

(A4) La construction des morphismes $f_!$ coïncide avec la construction des poussés en avant de la section précédente dans ces trois cas particuliers.

(A5) Soient Y un objet de Def_S . Soient $\alpha : Y \longrightarrow h[0, 0, 1]$ et $\xi : Y \longrightarrow h[0, 1, 0] \setminus \{0\}$ deux morphismes de Def_S tels que

$$\forall (y, \mathbf{K}) \in |Y|, \quad \alpha_{\mathbf{K}}(y) < 0.$$

On considère la boule

$$Z := \{(y, z) \in Y[1, 0, 0] \mid \mathrm{ord} z = \alpha(y), \overline{\mathrm{ac}} z = \xi(y)\}.$$

Notons $f : Z \longrightarrow Y$ le morphisme induit par la projection $Y[1, 0, 0] \longrightarrow Y$. On suppose que $[\mathbf{1}_Z] \otimes 1 \in \mathrm{I}_S\mathrm{C}(Z)^{\mathrm{exp}}$. Alors

$$f_!([\mathbf{1}_Z] \otimes \mathbf{E}(p)) = 0$$

où le morphisme $p : Z \longrightarrow h[1, 0, 0]$ est celui induit la projection $Y[1, 0, 0] \longrightarrow h[1, 0, 0]$.

Mesure motivique exponentielle. Lorsque $S = \{*\}$, pour tout objet Y de Def_S muni du morphisme final $f: Y \rightarrow S$, on notera simplement $\text{IC}(Y)^{\text{exp}}$ le groupe $\text{I}_S C(Y)^{\text{exp}}$ et on notera μ le morphisme de groupes

$$f_!: \text{IC}(Y)^{\text{exp}} \rightarrow \text{IC}(S)^{\text{exp}} = \text{K}_0(\text{RDef}_S^{\text{exp}}) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]} \mathbf{A}.$$

2.4. Intégration relative

Soit Z un objet de Def_Λ . Pour un entier $d \geq 0$, on définit l'idéal $\mathcal{C}^{\leq d}(Z \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}$ de $\mathcal{C}(Z)^{\text{exp}}$ engendré par les fonctions indicatrices d'objets Z de Def_Λ vérifiant l'inégalité $\text{Kdim}_\Lambda Z \leq d$. Comme précédemment, on définit le groupe abélien gradué $\text{C}(Z \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}$. Pour un morphisme $Z \rightarrow S$ de Def_Λ , on définit également le groupe abélien gradué

$$\text{I}_S \text{C}(Z \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}} := \text{I}_S \text{C}(Z \rightarrow \Lambda) \otimes_{\text{K}_0(\text{RDef}_Z)} \text{K}_0(\text{RDef}_Z^{\text{exp}}).$$

Dans ce contexte, un théorème analogue au théorème 2.4 existe : pour tout objet S de Def_Λ , on peut construire un foncteur de la catégorie Def_S dans la catégorie des groupes abéliens

$$Z \mapsto \text{I}_S \text{C}(Z \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}$$

envoyant un morphisme f de Def_S sur un morphisme de groupes abéliens $f_{! \Lambda}$ satisfaisant les axiomes (A1) à (A5) en remplaçant les bonnes notations.

Mesure motivique exponentielle relative. Lorsque le sous-assignement S est l'objet final Λ de Def_Λ , pour tout objet $f: Z \rightarrow \Lambda$ de Def_Λ , on note μ_Λ ou μ_f le morphisme

$$f_{! \Lambda}: \text{I}_\Lambda \text{C}(Z \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}} \rightarrow \text{I}_\Lambda \text{C}(\Lambda \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}} = \mathcal{C}(\Lambda)^{\text{exp}}.$$

Comportement avec les fibres. Soit Z un objet de Def_Λ . Soit λ un point de Λ . On note Z_λ sa fibre en ce point. Alors l'inclusion $i_\lambda: Z_\lambda \hookrightarrow Z$ induit un morphisme de groupes gradués

$$i_\lambda^*: \text{C}(Z \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}} \rightarrow \text{C}(Z_\lambda)^{\text{exp}}.$$

Proposition 2.5. Soit $f: Z \rightarrow Y$ un morphisme de Def_Λ . Notons $f_\lambda: Z_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ ses restrictions sur les fibres en un point λ de Λ . Soit $\varphi \in \text{C}(Z \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}$. Alors la fonction φ est Y -intégrable sur Z si et seulement si, pour tout point λ de Λ , la fonction $i_\lambda^*(\varphi)$ est Y_λ -intégrable sur Z_λ . Dans ce cas, on a

$$i_\lambda^*(f_{! \Lambda}(\varphi)) = f_{! \lambda}(i_\lambda^*(\varphi)).$$

2.5. Théorème de changement de variables

On énonce juste un théorème central de la théorie. On ne définira pas l'ordre du jacobien pour un morphisme quelconque. Dans la pratique, on se servira de cette notation lorsque le morphisme sera défini sur le corps valué, auquel cas on utilisera la définition donnée à la sous-section 1.7.

Théorème 2.6. Soit $f: X \rightarrow Y$ un isomorphisme entre deux sous-assignements définissables de même dimension d . Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{\leq d}(Y)^{\text{exp}}$ une fonction dont la classe dans $\text{C}^d(Y)^{\text{exp}}$ est non nulle. Alors la classe $[f^* \varphi]$ appartient à $\text{I}_Y \text{C}^d(X)^{\text{exp}}$ et

$$f_!([f^* \varphi]) = \mathbf{L}^{\text{ordjac } f \circ f^{-1}}[\varphi].$$

3. Transformation de Fourier

Soit $p: X \rightarrow \Lambda$ un objet de Def_Λ dont toutes les fibres sont de dimension d relativement au définissable Λ . On note $\mathcal{S}_\Lambda(X)^{\text{exp}}$ ou $\mathcal{S}_p(X)^{\text{exp}}$ le $\mathcal{C}(\Lambda)^{\text{exp}}$ -module des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(X)^{\text{exp}}$ dont la classe $[\varphi] \in \text{C}^d(X \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}$ appartient à $\text{I}_\Lambda \text{C}(X \rightarrow \Lambda)$. Dans ce cas, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(X)^{\text{exp}}$, on notera $\mu_\Lambda(\varphi)$ ou $\mu_p(\varphi)$ la fonction $\mu_\Lambda([\varphi]) \in \mathcal{C}(\Lambda)^{\text{exp}}$.

3.1. Transformation de Fourier sur le corps résiduel

Notation. Soit Z un objet de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Pour un morphisme $\xi: Z \rightarrow h[0, 1, 0]$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$, on note $\mathbf{e}(\xi)$ le motif exponentiel $\mathbf{e}^\xi = \mathbf{e}^\xi \mathbf{E}(0)[Z \rightarrow Z] \in K_0(\text{RDef}_Z)$.

Soit $d \geq 0$ un entier. On considère les deux projections $p_1, p_2: \Lambda[0, 2d, 0] \rightarrow \Lambda[0, d, 0]$ respectivement sur les d premières et derniers coordonnées. On considère la somme $\sum_{i=1}^d x_i y_i$ comme un morphisme $(x | y): \Lambda[0, 2d, 0] \rightarrow h[0, 1, 0]$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Ensuite, on considère son exponentielle $\mathbf{e}(x | y) \in \mathcal{C}(\Lambda[0, 2d, 0])^{\text{exp}}$.

La *transformation de Fourier sur le corps résiduel* est l'application $\mathcal{C}(\Lambda)^{\text{exp}}$ -linéaire

$$\mathfrak{f}: \begin{cases} \mathcal{C}(\Lambda[0, d, 0])^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda[0, d, 0])^{\text{exp}}, \\ \varphi \mapsto \mu_{p_1}([\mathbf{e}(x | y)p_2^*(\varphi)]). \end{cases}$$

Notation. Notons $\iota: \Lambda[0, d, 0] \rightarrow \Lambda[0, d, 0]$ le morphisme envoyant la variable x du corps résiduel sur son opposé $-x$. Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\Lambda[0, d, 0])^{\text{exp}}$, on pose

$$\check{\varphi} := \iota^*(\varphi) \in \mathcal{C}(\Lambda[0, d, 0])^{\text{exp}}.$$

Remarque. Soit $x: X \rightarrow Y$ un morphisme de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(Y)^{\text{exp}}$, on notera sous la forme $\varphi(x)$ la fonction $x^*\varphi \in \mathcal{C}(X)^{\text{exp}}$. On voit donc ici la fonction φ comme une « vraie fonction » au sens usuel. Avec cette notation, voici alors un corollaire du théorème de changement de variables.

Soit $x: X \rightarrow Y$ un morphisme entre deux sous-assignements de même dimension d . Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{\leq d}(Y)^{\text{exp}}$ une fonction dont la classe dans $\mathbb{C}^d(Y)^{\text{exp}}$ est non nulle. Alors la classe $[\varphi(x)]$ appartient à $\text{I}_Y \mathbb{C}^d(X)^{\text{exp}}$ et

$$\mu([\varphi(x)]) = \mu(\mathbf{L}^{\text{ordjac } x \circ x^{-1}}[\varphi]).$$

En particulier, si $X = Y$ et le morphisme x est affine, c'est-à-dire de la forme

$$x(z) = \xi z + y, \quad z \in X$$

avec $y \in \mathbf{k}((t))$ et $\xi \in \mathbf{k}$, on peut écrire

$$\mu([\varphi(x)]) = \mu([\varphi])$$

puisque $\text{ordjac } x = \text{ord } \xi = 0$.

Sur le corps résiduel, on dispose d'une formule d'inversion de Fourier donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\Lambda[0, d, 0])^{\text{exp}}$. Alors

$$\mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}(\varphi) = \mathbf{L}^d \check{\varphi}.$$

Démonstration. En effectuant une récurrence sur l'entier d et en utilisant le théorème de Fubini, il suffit de montrer le résultat lorsque $d = 1$. Dans ce cas, on notera $\mathbf{e}(xy)$ la fonction $\mathbf{e}(x | y)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\Lambda[0, 1, 0])^{\text{exp}}$ une fonction. Notons $x, y, z: \Lambda[0, 3, 0] \rightarrow \Lambda[0, 1, 0]$ les projections sur les premières, deuxièmes et troisièmes d coordonnées. Avec ces notations, on trouve

$$\mathfrak{f}(\varphi) = \mu_x([\mathbf{e}(xy)\varphi(y)]).$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}(\varphi) &= \mu_x([\mathbf{e}(xy)\mathfrak{f}(\varphi)(y)]) \\ &= \mu_x([\mathbf{e}(xy)\mu_y([\mathbf{e}(yz)\varphi(z)])(y)]) \\ &= \mu_x([\mathbf{e}(xy)\mathbf{e}(yz)\varphi(z)]) && \text{par le théorème de Fubini} \\ &= \mu_x([\mathbf{e}(xy + yz)\varphi(z)]) && \text{par le lemme 2.1} \\ &= \mu_x([\mathbf{e}(y(x + z))\varphi(z)]) \end{aligned}$$

$$= \mu_x([\mathbf{e}(yu)\varphi(u-x)]). \quad \text{par le changement de variables } u = x + z$$

Par ailleurs, on peut écrire $\mathbf{L} = \mu_x(\mathbf{1}_{u=0}\mathbf{1}_{y=y})$ en utilisant le théorème de Fubini ainsi que les égalités $1 = \mu_x(\mathbf{1}_{u=0})$ et $\mathbf{L} = \mu_x([\mathbf{1}_{y=y}])$. On obtient alors

$$\mathbf{L}\check{\varphi} = \mu_x([\mathbf{1}_{u=0}\mathbf{1}_{y=y}\varphi(-x)]).$$

En faisant la différence, on trouve ainsi

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{f}(\varphi) - \mathbf{L}\check{\varphi} = \mu_x([\mathbf{1}_{u \neq 0}\mathbf{e}(yu)\varphi(u-x)]).$$

Après le changement de variables $w = yu$, cette différence se réécrit sous la forme

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{f}(\varphi) - \mathbf{L}\check{\varphi} = \mu_x([\mathbf{1}_{u \neq 0}\mathbf{e}(w)\varphi(u-x)])$$

qui est nulle puisque, par le point (R3), le motif exponentiel $\mathbf{e}(w)$ est nul. \diamond

3.2. Transformation de Fourier sur le corps valué

Maintenant, on considère les deux projections $p_1, p_2: \Lambda[2d, 0, 0] \rightarrow \Lambda[d, 0, 0]$ et l'exponentielle $\mathbf{E}(x | y) \in \mathcal{C}(\Lambda[2d, 0, 0])^{\text{exp}}$.

Lemme 3.2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$. Alors la classe de la fonction

$$\mathbf{E}(x | y)p_2^*(\varphi) \in \mathcal{C}(\Lambda[2d, 0, 0])^{\text{exp}}$$

dans le quotient $C^d(p_1)^{\text{exp}}$ est intégrable relativement à la projection p_1 , c'est-à-dire appartient à l'ensemble $I_\Lambda C(p_1)^{\text{exp}}$.

Démonstration. Comme $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, la classe $[\varphi] \in C^d(\Lambda[d, 0, 0] \rightarrow \Lambda)$ appartient à l'ensemble $I_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0] \rightarrow \Lambda)$, donc la classe

$$p_2^*([\varphi]) = [p_2^*(\varphi)] \in C^d(p_1: \Lambda[2d, 0, 0] \rightarrow \Lambda[d, 0, 0])$$

est intégrable relativement à la projection p_1 et il en va de même pour la classe considérée par définition même du groupe $I_\Lambda C(p_1)^{\text{exp}}$. \diamond

Grâce à ce lemme, on peut alors définir la *transformation de Fourier sur le corps valué* comme l'application $\mathcal{C}(\Lambda)^{\text{exp}}$ -linéaire

$$\mathfrak{F}: \begin{cases} \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0]^{\text{exp}}) \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda[d, 0, 0]^{\text{exp}}), \\ \varphi \mapsto \mu_{p_1}([\mathbf{E}(x | y)p_2^*(\varphi)]). \end{cases}$$

Lemme 3.3. On considère le sous-assignement $Z \subset h[1, 0, 0]$ défini par l'inégalité $\text{ord } z \geq 0$. On note $g: Z \rightarrow h[1, 0, 0]$ l'injection. Alors

$$\mu(\mathbf{E}(g)) = 0.$$

Démonstration. On définit le sous-assignement $V \subset Z$ par l'inégalité $\text{ord } z > 0$, c'est-à-dire $\text{ord } z \geq 1$, et on considère le projection $h: V \rightarrow h[1, 0, 0]$. Montrons que

$$\mu(\mathbf{E}(h)) = \mathbf{L}^{-1}. \quad (3.1)$$

Avec l'axiome (R3), la projection \bar{h} modulo t est nulle ce qui donne $\mathbf{E}(h) = \mathbf{e}(\bar{h}) = \mathbf{e}(0) = \mathbf{1}_V$ et l'axiome (A7) du théorème 1.8 fournit alors

$$\mu(\mathbf{E}(h)) = \mu(V) = \mathbf{L}^{-1}.$$

On définit maintenant le sous-assignement $W \subset Z$ par l'égalité $\text{ord } z = 0$ et on considère le projection $i: W \rightarrow h[1, 0, 0]$. Montrons que

$$\mu(\mathbf{E}(i)) = -\mathbf{L}^{-1}. \quad (3.2)$$

On dispose d'un isomorphisme définissable

$$\lambda: W \rightarrow \tilde{W} := \{(z, \xi) \in W[0, 1, 0] \mid \bar{a}c z = \xi\}$$

donné par l'application qui à un point z associe le couple $(z, \bar{\alpha}z)$ et dont l'inverse est l'application qui à un couple (z, ξ) associe le point z . On considère le diagramme de projections

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\lambda} & \tilde{W} \\ & \searrow p & \downarrow \xi \\ & & \mathbf{G}_m := h[0, 1, 0] \setminus \{0\} \\ & & \downarrow q \\ & & \{0\}. \end{array}$$

On note $\tilde{\iota}: \tilde{W} \rightarrow h[1, 0, 0]$ la projection. Montrons que $\lambda_!(\mathbf{E}(i)) = \mathbf{E}(\tilde{\iota})$. En effet, la définition du poussé en avant $\lambda_!: K_0(\mathbf{RDef}_W^{\text{exp}}) \rightarrow K_0(\mathbf{RDef}_{\tilde{W}}^{\text{exp}})$ fournit

$$\lambda_!(\mathbf{E}(i)) = \lambda_!([W \rightarrow W, 0, i]) = [W \rightarrow \tilde{W}, 0, i]$$

et l'isomorphisme λ de Def_k est aussi un isomorphisme

$$(\tilde{W} \rightarrow \tilde{W}, 0, \tilde{\iota}) \rightarrow (W \rightarrow \tilde{W}, 0, i)$$

de $\mathbf{RDef}_{\tilde{W}}^{\text{exp}}$. Avec l'axiome (R1), on peut donc écrire $\lambda_!(\mathbf{E}(i)) = \mathbf{E}(\tilde{\iota})$ et, avec l'axiome (R3), on trouve alors $\lambda_!(\mathbf{E}(i)) = \mathbf{e}(\xi)$. Par ailleurs, le théorème de Fubini et le diagramme précédent fournissent les égalités

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{E}(i)) &= p_!(\mathbf{E}(i)) \\ &= q_! \circ \xi_! \circ \lambda_!(\mathbf{E}(i)) \\ &= q_! \circ \xi_!(\mathbf{e}(\xi)). \end{aligned}$$

Maintenant, on dispose d'un isomorphisme

$$\tilde{W} \cong \tilde{W}' := B_1 \otimes_{\{*\}} \mathbf{G}_m$$

de $\mathbf{RDef}_{\{*\}}^{\text{exp}}$ avec $B_1 := \{z \in h[1, 0, 0] \mid \text{ord } z_1 \geq 1\}$. En notant $\xi': \mathbf{G}_m \rightarrow h[0, 1, 0]$ la projection, avec l'axiome (A7) du théorème 1.8, on trouve alors

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{E}(i)) &= q_!(\mathbf{L}^{-1} \otimes \mathbf{e}(\xi')) \\ &= \mathbf{L}^{-1} \otimes [\mathbf{G}_m \rightarrow \{0\}, \mathbf{G}_m \rightarrow h[0, 1, 0], 0] \\ &= -\mathbf{L}^{-1} \end{aligned}$$

puisque

$$[\mathbf{G}_m \rightarrow \{0\}, \mathbf{G}_m \rightarrow h[0, 1, 0], 0] = -1$$

En effet, cette égalité s'obtient à partir des axiomes (R2) et (R4) car ils permettent d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= [h[0, 1, 0] \rightarrow \{0\}, h[0, 1, 0] \rightarrow h[0, 1, 0], 0] \\ &= [\mathbf{G}_m \rightarrow \{0\}, \mathbf{G}_m \rightarrow h[0, 1, 0], 0] + [\{0\} \rightarrow \{0\}, 0, 0] \\ &= [\mathbf{G}_m \rightarrow \{0\}, \mathbf{G}_m \rightarrow h[0, 1, 0], 0] + 1. \end{aligned}$$

Les égalités (3.1) et (3.2) et l'axiome (R2) permettent de conclure. \diamond

Lemme 3.4. Soient $\alpha \in h[0, 0, 1]$ et $y \in h[1, 0, 0] \setminus \{0\}$ deux éléments. On considère le sous-assiement $Z \subset h[1, 0, 0]$ défini par l'inégalité $\text{ord } z \geq \alpha$. On note $g: Z \rightarrow h[1, 0, 0]$ l'injection. Alors

$$\mu(\mathbf{E}(yg)) = \begin{cases} \mathbf{L}^{-\alpha} & \text{si } \text{ord } y \geq -\alpha + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On suppose d'abord que $\text{ord } y \geq 1 - \alpha$. Dans ce cas, pour tout point z de Z , on trouve $\text{ord}(yz) = \text{ord } y + \text{ord } z \geq \text{ord } y + \alpha \geq 1$. Ceci donne $\mathbf{E}(yg) = 1$ et donc

$$\mu(\mathbf{E}(yg)) = \mu(\mathbf{1}_Z) = \mathbf{L}^{-\alpha}.$$

On suppose désormais que $\text{ord } y < 1 - \alpha$. On considère les deux sous-assignements Z_1 et Z_2 de Z définis respectivement par les inégalités $\text{ord } z \geq -\text{ord } y$ et $-\text{ord } y > \text{ord } z \geq \alpha$. Ceci permet d'écrire $Z = Z_1 \sqcup Z_2$. Avec le point (R2), on obtient alors

$$\mu(\mathbf{E}(yg)) = \mu(\mathbf{E}(yg|_{Z_1})) + \mu(\mathbf{E}(yg|_{Z_2})).$$

D'une part, en notant $g_1: \{\text{ord } z \geq 0\} \rightarrow h[1, 0, 0]$ la projection, le changement de variables $z_1 = yz$ et le lemme précédent permettent d'écrire

$$\mu(\mathbf{E}(yg|_{Z_1})) = \mathbf{L}^{-\text{ord } y} \mu(\mathbf{E}(g_1)) = 0.$$

D'autre part, en notant $X \subset h[1, 0, 0]$ le sous-assignement défini par l'inégalité

$$\alpha + \text{ord } y \leq \text{ord } x < 0$$

et en notant $h: X \rightarrow h[1, 0, 0]$ la projection, le changement de variables $x = yz$ donne

$$\mu(\mathbf{E}(yg|_{Z_2})) = \mathbf{L}^{-\text{ord } y} \mu(\mathbf{E}(h)).$$

Pour chaque entier ℓ entre $p := \alpha + \text{ord } y$ et -1 , on note $X_\ell \subset X$ le sous-assignement défini par l'égalité $\text{ord } x = \ell$ et $h_\ell: X_\ell \rightarrow h[1, 0, 0]$ la projection. Alors en procédant comme dans la preuve du lemme 3.3, les axiomes (R2) et (A5) donnent successivement

$$\mu(\mathbf{E}(yg|_{Z_2})) = \mathbf{L}^{-\text{ord } y} \sum_{\ell=p}^{-1} \mu(\mathbf{E}(h_\ell)) = 0.$$

Ceci conclut l'égalité $\mu(\mathbf{E}(yg)) = 0$. \diamond

Lemme 3.5. Soient $\alpha \in h[0, 0, 1]$, $y \in h[1, 0, 0]$ et $\xi \in h[0, 1, 0]$ des éléments avec $y \neq 0$ et $\xi \neq 0$. On considère la boule $Z \subset h[1, 0, 0]$ définie par les égalités

$$\text{ord } z = \alpha \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} z = \xi.$$

On note $g: Z \rightarrow h[1, 0, 0]$ l'injection. Alors

$$\mu(\mathbf{E}(yg)) = \begin{cases} \mathbf{L}^{-\alpha-1} & \text{si } \text{ord } y \geq -\alpha + 1, \\ \mathbf{L}^{-\alpha-1} \mathbf{e}(\xi \bar{\alpha} y) & \text{si } \text{ord } y = -\alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Les deux constantes y et ξ sont considérées respectivement comme des morphismes $y: \{*\} \rightarrow h[1, 0, 0]$ et $\xi: \{*\} \rightarrow h[0, 1, 0]$ de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$, donc on peut bien considérer le motif exponentiel

$$\mathbf{e}(\xi \bar{\alpha} y) \in \mathbf{K}_0(\text{RDef}_{\{*\}}^{\text{exp}}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\{*\})^{\text{exp}}.$$

Démonstration. On suppose d'abord $\text{ord } y \geq -\alpha + 1$. Alors tout point z de Z vérifie l'inégalité $\text{ord}(yz) = \text{ord } y + \text{ord } z \geq 1$ si bien que $\mathbf{E}(yg) = \mathbf{1}_Z$. L'axiome (A7) du théorème 1.8 donne alors $\mu(\mathbf{E}(yg)) = \mu(Z) = \mathbf{L}^{-\alpha-1}$.

On suppose que $\text{ord } y = -\alpha$. Alors tout point z de Z vérifie l'égalité $\text{ord}(yz) = 0$. En notant $\xi: Z \rightarrow h[0, 1, 0]$ la projection, on obtient alors $\mathbf{E}(yg) = \mathbf{e}(\bar{y}z) = \mathbf{e}(\xi \bar{\alpha} y)$.

On suppose que $\text{ord } y < -\alpha$. Dans ce cas, tout point z de Z vérifie $\text{ord}(yz) = \text{ord } y + \alpha < 0$ et l'axiome (A5) du théorème 2.4 donne alors $\mu(\mathbf{E}(yg)) = 0$ ce qui conclut le lemme. \diamond

Soient $\alpha: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d): \Lambda \rightarrow h[0, d, 0] \setminus \{0\}$ deux morphismes définissables. On considère les sous-assignements

$$\begin{aligned} Z_\alpha &:= \{(\lambda, x_1, \dots, x_d) \in \Lambda[d, 0, 0] \mid \text{ord } x_i \geq \alpha(\lambda)\}, \\ W_\alpha &:= \{(\lambda, x_1, \dots, x_d) \in \Lambda[d, 0, 0] \mid \text{ord } x_i = \alpha(\lambda)\}, \\ W_{\alpha, \xi} &:= \{(\lambda, x_1, \dots, x_d) \in \Lambda[d, 0, 0] \mid \text{ord } x_i = \alpha(\lambda), \bar{\alpha} x_i = \xi_i(\lambda)\}. \end{aligned}$$

et leurs fonctions indicatrices φ_α , ψ_α et $\psi_{\alpha, \xi}$ qui appartiennent à l'anneau $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$.

Proposition 3.6. Considérons le morphisme

$$i: \begin{cases} \Lambda[d, 0, 0] \longrightarrow h[0, 1, 0], \\ (\lambda, x) \longmapsto \xi_1(\lambda) \overline{\alpha c} x_1 + \cdots + \xi_d(\lambda) \overline{\alpha c} x_d. \end{cases}$$

Alors

1. $\mathfrak{F}(\varphi_\alpha) = \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi_{-\alpha+1}$;
2. $\mathfrak{F}(\psi_\alpha) = \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi_{-\alpha+1} - \mathbf{L}^{-d\alpha-d} \varphi_{-\alpha}$;
3. $\mathfrak{F}(\psi_{\alpha,\xi}) = \mathbf{L}^{-d\alpha-d} (\varphi_{-\alpha+1} + \mathbf{e}(i)\psi_{-\alpha})$.

Démonstration. En effectuant une récurrence et en utilisant le théorème de Fubini, il suffit de traiter le cas $d = 1$. De plus, on va traiter le cas $\Lambda = \{*\}$. Le premier point découle alors du lemme 3.4. Pour le deuxième point, on remarque que $\psi_\alpha = \varphi_\alpha - \varphi_{\alpha+1}$ et les différentes linéarités donnent

$$\mathfrak{F}(\psi_\alpha) = \mathfrak{F}(\varphi_\alpha) - \mathfrak{F}(\varphi_{\alpha+1}) = \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi_{-\alpha+1} - \mathbf{L}^{-d(\alpha+1)} \varphi_{-(\alpha+1)+1}.$$

Le troisième point découle du lemme 3.5. ◇

On dispose alors d'une formule d'inversion de Fourier pour les fonctions constructibles exponentielles φ_α et ψ_α .

Corollaire 3.7. Sous les mêmes hypothèses, on a

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}(\varphi_\alpha) = \mathbf{L}^{-d} \varphi_\alpha \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}(\psi_\alpha) = \mathbf{L}^{-d} \psi_\alpha$$

On souhaite avoir une formule similaire pour la fonction constructible exponentielle $\psi_{\alpha,\xi}$.

Lemme 3.8. Soient $\alpha \in h[0, 0, 1]$, $y \in h[1, 0, 0]$ et $\xi \in h[0, 1, 0]$ trois éléments avec $y \neq 0$ et $\xi \neq 0$. On considère le sous-assignement $Z \subset h[1, 0, 0]$ défini par l'égalité $\text{ord } z = -\alpha$. On note $g: Z \longrightarrow h[1, 0, 0]$ l'injection. Alors

$$\mu(\mathbf{e}(\xi \overline{\alpha c}) \mathbf{E}(yg)) = \begin{cases} \mathbf{L}^\alpha (1 - \mathbf{L}^{-1}) & \text{si } \text{ord } y = \alpha \text{ et } \overline{\alpha c} y = -\xi, \\ -\mathbf{L}^{\alpha-1} & \text{si } (\text{ord } y = \alpha \text{ et } \overline{\alpha c} y \neq -\xi) \text{ ou } \text{ord } y \geq \alpha + 1, \\ 0 & \text{si } \text{ord } y \leq \alpha - 1 \end{cases}$$

Démonstration. On suppose d'abord $\text{ord } y = \alpha$ et $\overline{\alpha c} y = -\xi$. Alors pour tout point z de Z , on peut écrire $\text{ord}(yz) = 0$ et donc $\mathbf{E}(yg) = \mathbf{e}(\overline{y}g) = \mathbf{e}(\overline{\alpha c} y \overline{\alpha c} g) = \mathbf{e}(-\xi \overline{\alpha c})$ si bien que

$$\mathbf{e}(\xi \overline{\alpha c}) \mathbf{E}(yg) = \mathbf{e}(\xi \overline{\alpha c} - \xi \overline{\alpha c}) = 1.$$

On trouve alors $\mu(\mathbf{e}(\xi \overline{\alpha c}) \mathbf{E}(yg)) = \mu(Z)$. Or $Z = \{\text{ord } z \geq -\alpha\} \setminus \{\text{ord } z \geq -\alpha + 1\}$, donc

$$\begin{aligned} \mu(Z) &= \mu(\{\text{ord } z \geq -\alpha\}) - \mu(\{\text{ord } z \geq -\alpha + 1\}) \\ &= \mathbf{L}^\alpha - \mathbf{L}^{\alpha-1} = \mathbf{L}^\alpha (1 - \mathbf{L}^{-1}). \end{aligned}$$

On suppose $\text{ord } y \geq \alpha + 1$. Alors pour tout point z de Z , on peut écrire $\text{ord}(yz) \geq 1$ et donc $\mathbf{E}(yg) = 1$. En effectuant le changement de variables $z' = \xi z$ qui est bijectif puisque $\xi \neq 0$ et le corps \mathbf{k} est de caractéristique nulle, on est ramené à calculer l'intégrale $\mu(\mathbf{e}(\overline{\alpha c}))$. Mais on dispose d'un isomorphisme

$$Z \cong \{\text{ord } z \geq -\alpha + 1\} \otimes_{\{*\}} \mathbf{G}_m$$

envoyant un point z sur le couple $(z - \overline{\alpha c} z, \overline{\alpha c} z)$. Comme dans la preuve du lemme 3.5, on obtient alors $\mu(\mathbf{e}(\overline{\alpha c})) = \mu(\{\text{ord } z \geq -\alpha + 1\}) \otimes \mu(\mathbf{G}_m) = -\mathbf{L}^{-(\alpha+1)} = -\mathbf{L}^{\alpha-1}$.

On suppose que $\text{ord } y = \alpha$ et $\overline{\alpha c} y \neq -\xi$. Comme au premier paragraphe, on trouve

$$\mathbf{e}(\xi \overline{\alpha c}) \mathbf{E}(yg) = \mathbf{e}((\xi - \overline{\alpha c} y) \overline{\alpha c})$$

avec $\eta := \xi - \overline{\alpha c} y \neq 0$. En effectuant le changement de variables $z' = \eta z$, on se ramène au calcul du paragraphe précédent.

On suppose enfin que $\text{ord } y \leq \alpha - 1$. Alors pour tout point z de Z , on peut maintenant écrire $\text{ord}(yz) = \text{ord } y + 1 < 0$. En procédant comme dans la preuve du lemme 3.3 et en utilisant l'axiome (A5) du théorème 2.4, on obtient $\mu(\mathbf{e}(\xi \bar{\alpha})\mathbf{E}(yg)) = 0$. \diamond

Corollaire 3.9. Sous les mêmes hypothèses, on trouve

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}(\psi_{\alpha, \xi}) = \mathbf{L}^{-d}\psi_{\alpha, -\xi}.$$

Démonstration. De même, il suffit de traiter le cas $d = 1$. En notant $i: \Lambda[1, 0, 0] \rightarrow h[0, 1, 0]$ le morphisme de la proposition 3.6. Alors le lemme 3.8 donne

$$\mathfrak{F}(\mathbf{e}(i)\psi_{-\alpha}) = \mathbf{L}^{\alpha}(\psi_{\alpha, -\xi} - \mathbf{L}^{-1}\varphi_{\alpha}).$$

Avec les points (i) et (iii) de la proposition 3.6, on trouve alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}(\psi_{\alpha, \xi}) &= \mathbf{L}^{-\alpha-1}(\mathfrak{F}(\varphi_{-\alpha+1}) + \mathfrak{F}(\mathbf{e}(i)\psi_{-\alpha})) \\ &= \mathbf{L}^{-\alpha-1}\mathbf{L}^{-(-\alpha+1)}\varphi_{-(-\alpha+1)+1} + \mathbf{L}^{-\alpha-1}\mathfrak{F}(\mathbf{e}(i)\psi_{-\alpha}) \\ &= \mathbf{L}^{-2}\varphi_{\alpha} + \mathbf{L}^{-\alpha-1}\mathfrak{F}(\mathbf{e}(i)\psi_{-\alpha}) \\ &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\varphi_{\alpha} + \mathbf{L}^{-\alpha}\mathfrak{F}(\mathbf{e}(i)\psi_{-\alpha})) \\ &= \mathbf{L}^{-1}\psi_{\alpha, -\xi}. \end{aligned} \quad \diamond$$

3.3. Produit de convolution

Soit Λ un objet de $\text{Def}_{\mathbf{k}}$. On note $x, y: \Lambda[2d, 0, 0] \rightarrow \Lambda[d, 0, 0]$ les projections sur les premières et secondes d composantes. On note $x + y: \Lambda[2d, 0, 0] \rightarrow \Lambda[d, 0, 0]$ le morphisme envoyant chaque point $(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d)$ sur le point $(x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$. Lorsqu'on travaillera sur le sous-assignement $\Lambda[3d, 0, 0]$, on note z la projection sur les troisièmes d coordonnées, etc.

Lemme 3.10. Soient $f, g \in \mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ deux fonctions. Alors la fonction $f(x)g(y)$, c'est-à-dire la fonction $x^*(f)y^*(g)$, appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_{x+y}(\Lambda[2d, 0, 0])^{\text{exp}}$.

Démonstration. Comme $f, g \in \mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, les classes $[f], [g] \in \mathbf{C}^d(\Lambda[d, 0, 0] \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}$ appartiennent à l'ensemble $\mathbf{I}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0] \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}$ si bien que

$$[f(x)g(y)] = [f(x)][g(y)] \in \mathbf{I}_{\Lambda}(\Lambda[2d, 0, 0] \rightarrow \Lambda)^{\text{exp}}.$$

On en déduit que la fonction $f(x)g(y)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[2d, 0, 0])^{\text{exp}}$ et donc à l'ensemble $\mathcal{S}_{x+y}(\Lambda[2d, 0, 0])^{\text{exp}}$ grâce au théorème de Fubini. \diamond

Definition-proposition 3.11. Avec les mêmes notations, on définit la fonction

$$f * g := \mu_{x+y}(f(x)g(y)) \in \mathcal{C}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}.$$

Elle appartient même à l'ensemble $\mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$.

Démonstration. Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\mu_{\Lambda}(f(x)g(y)) = \mu_{\Lambda}(\mu_{x+y}(f(x)g(y)))$$

ce qui assure $f(x)g(y) \in \mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$. \diamond

Proposition 3.12. L'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}} \times \mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}, \\ (f, g) \longmapsto f * g \end{array} \right.$$

est $\mathcal{C}(\Lambda)^{\text{exp}}$ -linéaire et munit le groupe $\mathcal{S}_{\Lambda}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ d'une structure d'anneau commutatif.

Démonstration. La linéarité et la commutativité sont claires. Pour l'associativité, on remarque que le théorème de Fubini donne

$$(f * g) * h = \mu_{x+y+z}(f(x)g(y)h(z))$$

pour trois fonctions $f, g, h \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$. \diamond

Proposition 3.13. Soient $f, g \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ deux fonctions. Alors

$$\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}(f)\mathfrak{F}(g).$$

Démonstration. Comme $f, g \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, la fonction $\mathbf{E}(x | y + z)f(y)g(z)$ est intégrable relativement à la projection x et, grâce au théorème de Fubini, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mu_x(\mathbf{E}(x | y + z)f(y)g(z)) &= \mu_x(\mathbf{E}(x | y)f(y) \times \mathbf{E}(x | z)g(z)) \\ &= \mu_x(\mathbf{E}(x | y)f(y)) \times \mu_x(\mathbf{E}(x | z)g(z)) \\ &= \mathfrak{F}(f) \times \mathfrak{F}(g). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en effectuant le changement de variables $u = y + z$, on trouve

$$\begin{aligned} \mu_x(\mathbf{E}(x | y + z)f(y)g(z)) &= \mu_x(\mathbf{E}(x | u)f(u - z)g(z)) \\ &= \mu_x(\mu_{(x,u)}(\mathbf{E}(x | u)f(u - z)g(z))) \\ &= \mu_x(\mathbf{E}(x | u)\mu_{(x,u)}(f(u - z)g(z))) \\ &= \mathfrak{F}(f * g). \end{aligned} \quad \diamond$$

Notation. Notons $\iota: \Lambda[d, 0, 0] \rightarrow \Lambda[d, 0, 0]$ le morphisme envoyant la variable du corps valué sur son opposé. Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, on note $\check{\varphi}$ la fonction $\iota^*\varphi$.

Proposition 3.14. Soient $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ une fonction et $\alpha: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ un morphisme définissable. Alors la fonction $\varphi_\alpha \mathfrak{F}(\varphi)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ et

$$\mathfrak{F}(\varphi_\alpha \mathfrak{F}(\varphi)) = \mathbf{L}^{-d\alpha} \check{\varphi} * \varphi_{-\alpha+1}.$$

Démonstration. Comme les fonctions φ et φ_α appartiennent à l'ensemble $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, la fonction $\mathbf{E}(y | z)\varphi_\alpha(y)\varphi(z)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[2d, 0, 0])^{\text{exp}}$ ce qui implique que la fonction $\varphi_\alpha \mathfrak{F}(\varphi) = \mu_y(\varphi_\alpha(y)\mu_z(\mathbf{E}(y | z)\varphi(z)))$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$.

On considère la fonction $\mathbf{E}(y | x + z)\varphi_\alpha(y)\varphi(z)$ qui est relativement intégrable par rapport à la variable x . D'une part, on calcule

$$\begin{aligned} \mu_x(\mathbf{E}(y | x + z)\varphi_\alpha(y)\varphi(z)) &= \mu_x(\mu_{(x,y)}(\mathbf{E}(y | x + z)\varphi_\alpha(y)\varphi(z))) \\ &= \mu_x(\mathbf{E}(y | x)\varphi_\alpha(y)\mu_{(x,y)}(\mathbf{E}(y | z)\varphi(z))) \\ &= \mu_x(\mathbf{E}(y | x)\varphi_\alpha(y)\mu_y(\mathbf{E}(y | z)\varphi(z))) \\ &= \mu_x(\mathbf{E}(y | x)\varphi_\alpha(y)\mathfrak{F}(\varphi)(y)) \\ &= \mathfrak{F}(\varphi_\alpha \mathfrak{F}(\varphi)). \end{aligned}$$

D'autre part, le changement de variables $u = x + z$ donne

$$\begin{aligned} \mu_x(\mathbf{E}(y | x + z)\varphi_\alpha(y)\varphi(z)) &= \mu_x(\mu_{(x,z)}(\mathbf{E}(y | x + z)\varphi_\alpha(y)\varphi(z))) \\ &= \mu_{u-z}(\mu_{(u,z)}(\mathbf{E}(y | u)\varphi_\alpha(y)\varphi(z))) \\ &= \mu_{u-z}(\varphi(z)\mu_{(u,z)}(\mathbf{E}(y | u)\varphi_\alpha(y))) \\ &= \mu_{u-z}(\varphi(z)\mathfrak{F}(\varphi_\alpha)(u)) \\ &= \mu_{u+z}(\check{\varphi}(z)\mathfrak{F}(\varphi_\alpha)(u)) \\ &= \check{\varphi} * \mathfrak{F}(\varphi_\alpha). \end{aligned}$$

La proposition 3.6 permet alors de conclure puisqu'elle donne $\mathfrak{F}(\varphi) = \mathbf{L}^{-d\alpha}\varphi_{-\alpha+1}$. \diamond

3.4. Fonctions de Schwartz-Bruhat et formule d'inversion

Soit Λ un objet de Def_k . On souhaite maintenant obtenir une formule d'inversion de Fourier sur $\Lambda[d, 0, 0]$ pour une certaine classe de fonctions. Pour un morphisme $\alpha: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$, on note $B(\alpha) \subset \Lambda[d, 0, 0]$ le polydisque de centre 0 et de rayon valuatif $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$ et on rappelle que l'on note φ_α sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_{B(\alpha)}$.

Définition 3.15. Une fonction $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ est une *fonction de Schwartz-Bruhat* s'il existe deux morphismes définissables $\alpha^-, \alpha^+: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ tels que

- pour tout morphisme définissable $\alpha: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ tel que $\alpha \leq \alpha^-$, on ait

$$\varphi \mathbf{1}_{B(\alpha)} = \varphi ;$$

- pour tout morphisme définissable $\alpha: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ tel que $\alpha \geq \alpha^+$, on ait

$$\varphi * \mathbf{1}_{B(\alpha)} = \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi.$$

Remarque. Les deux points peuvent respectivement s'interpréter de la manière suivante : le premier dit que la fonction est à support bornée (l'analogue à la notion de support compact dans le cas réel) et le second qu'elle est localement constante (l'analogue à la régularité \mathcal{C}^∞).

Remarque. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, en effectuant le changement de variables $z' = -z$, on a aussi $\check{\varphi} \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ avec les mêmes morphismes α^- et α^+ .

On note $\mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ le $\mathcal{C}(\Lambda)^{\text{exp}}$ -module des fonctions de Schwartz-Bruhat sur le sous-assignement $\Lambda[d, 0, 0]$. Lorsque $\Lambda = \{*\}$, on le notera simplement $\mathcal{S}(h[d, 0, 0])$. On peut maintenant énoncer le théorème principale concernant la transformation de Fourier sur le corps valué.

Théorème 3.16. La transformation de Fourier induit un isomorphisme

$$\mathfrak{F}: \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}} \rightarrow \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}.$$

Plus précisément, pour toute fonction de Schwartz-Bruhat $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, on dispose de la formule d'inversion

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}(\varphi) = \mathbf{L}^{-d} \check{\varphi}. \quad (3.3)$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ une fonction. On prend les deux morphismes définissables α^- et α^+ comme dans la définition 3.15. Montrons d'abord qu'il existe un morphisme définissable $\beta^-: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ tels que

$$\forall \beta \leq \beta^-, \quad \mathfrak{F}(\varphi) \varphi_\beta = \mathfrak{F}(\varphi). \quad (3.4)$$

Pour tout morphisme définissable $\alpha: \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ avec $\alpha \geq \alpha^+$, les propositions 3.13 et 3.6 ainsi que le second point de la définition 3.15 permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\varphi) &= \mathbf{L}^{d\alpha} \mathfrak{F}(\varphi * \varphi_\alpha) \\ &= \mathbf{L}^{d\alpha} \mathfrak{F}(\varphi) \mathfrak{F}(\varphi_\alpha) \\ &= \varphi_{-\alpha+1} \mathfrak{F}(\varphi). \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $\beta^- := -\alpha^+ + 1$ pour obtenir l'assertion (3.4). Cela donne le premier point de la définition 3.15 pour la fonction $\mathfrak{F}(\varphi)$.

Montrons maintenant la relation (3.3). Comme $\mathfrak{F}(\varphi) \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$, la proposition 3.14 et la relation (3.4) donnent

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}(\varphi) = \mathbf{L}^{-d\beta} \check{\varphi} * \varphi_{-\beta+1} \quad (3.5)$$

pour tout $\beta \leq \beta^-$ et, comme $-\beta + 1 \geq \alpha^+$, le second point de la définition 3.15 pour la fonction $\check{\varphi}$ donne

$$\check{\varphi} * \varphi_{-\beta+1} = \mathbf{L}^{-d(-\beta+1)} \check{\varphi}$$

ce qui donne, avec l'égalité (3.5), la formule (3.3).

Il reste à montrer que le second point de la définition 3.15 pour la fonction $\mathfrak{F}(\varphi)$ afin de conclure que $\mathfrak{F}(\varphi) \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$. On pose $\beta^+ := -\alpha^- + 1$. Montrons que

$$\forall \beta \geq \beta^+, \quad \mathfrak{F}(\varphi) * \varphi_\beta = \mathbf{L}^{-d\beta} \mathfrak{F}(\varphi).$$

Cela revient à montrer que

$$\forall \alpha \leq \alpha^-, \quad \mathfrak{F}(\varphi) * \varphi_{-\alpha+1} = \mathbf{L}^{-d(-\alpha+1)} \mathfrak{F}(\varphi).$$

Soit $\alpha \leq \alpha^-$ un morphisme définissable. D'une part, la formule d'inversion (3.3), le premier point de la définition 3.15 et la proposition 3.14 permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\varphi))) &= \mathfrak{F}(\mathbf{L}^{-d}\check{\varphi}) \\ &= \mathfrak{F}(\mathbf{L}^{-d}\check{\varphi}_\alpha) \\ &= \mathfrak{F}(\varphi_\alpha \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\varphi))) \\ &= \mathbf{L}^{-d\alpha} \iota^* \mathfrak{F}(\varphi) * \varphi_{-\alpha+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, la formule d'inversion (3.3) donne aussi

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(\varphi))) = \mathbf{L}^{-d} \iota^* \mathfrak{F}(\varphi)$$

Les deux dernières égalités fournissent alors

$$\iota^* \mathfrak{F}(\varphi) * \varphi_{-\alpha+1} = \mathbf{L}^{-d(-\alpha+1)} \iota^* \mathfrak{F}(\varphi).$$

On en déduit que $\iota^* \mathfrak{F}(\varphi) \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ et donc $\mathfrak{F}(\varphi) \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$. \diamond

Grâce à la formule d'inversion, on peut donner une caractérisation un peu plus simple des fonctions de Schwartz-Bruhat.

Proposition 3.17. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ une fonction. On suppose qu'il existe deux morphismes définissables $\alpha^-, \alpha^+ : \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ tels que

$$\varphi \varphi_{\alpha^-} = \varphi \quad \text{et} \quad \varphi * \varphi_{\alpha^+} = \mathbf{L}^{-d\alpha^+} \varphi.$$

Alors la fonction φ est une fonction de Schwartz-Bruhat

Démonstration. Soit $\alpha : \Lambda \rightarrow h[0, 0, 1]$ un morphisme définissable. Si $\alpha \leq \alpha^-$, alors on remarque que $Z_{\alpha^-} \subset Z_\alpha$ si bien que $\varphi_{\alpha^-} \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha^-}$ ce qui donne $\varphi \varphi_\alpha = \varphi$ puisque $\varphi \varphi_{\alpha^-} = \varphi$. Si $\alpha \geq \alpha^+$, alors on remarque que

$$\varphi_{\alpha^+} * \varphi_\alpha = \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi_{\alpha^+} \tag{3.6}$$

ce qui donne $\varphi_{\alpha^+} * \varphi_\alpha * \varphi = \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi_{\alpha^+} * \varphi$ et donc $\varphi * \varphi_\alpha = \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi$ en utilisant l'associativité et la commutativité du produit de convolution.

Justifions l'égalité (3.6). Si $\alpha \geq \alpha^+$, avec les propositions 3.13 et 3.6, on calcule

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\varphi_{\alpha^+} * \varphi_\alpha) &= \mathfrak{F}(\varphi_{\alpha^+}) \mathfrak{F}(\varphi_\alpha) \\ &= \mathbf{L}^{-d\alpha^+} \varphi_{-\alpha^++1} \mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi_{-\alpha+1} \\ &= \mathbf{L}^{-d\alpha} \mathbf{L}^{-d\alpha^+} \varphi_{-\alpha^++1} \\ &= \mathfrak{F}(\mathbf{L}^{-d\alpha} \varphi_{\alpha^+}) \end{aligned}$$

et on utilise l'injectivité de la transformation de Fourier donnée par le théorème 3.16. \diamond

Remarque. Au passage, on a montré que

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta = \mathbf{L}^{-d \max(\alpha, \beta)} \varphi_{\min(\alpha, \beta)}.$$

En particulier, cette dernière égalité pour $\alpha = \beta$ implique que la fonction φ_α est une fonction de Schwartz-Bruhat. Comme la somme et la différence de deux fonctions de Schwartz-Bruhat est encore une fonction de Schwartz-Bruhat, la fonction ψ_α en est aussi une.

Proposition 3.18. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ deux fonctions de Schwartz-Bruhat. Alors leur produit de convolution $\varphi * \psi$ est une fonction de Schwartz-Bruhat.

Démonstration. Notons $\alpha^-(\varphi)$ et $\alpha^+(\varphi)$ (respectivement $\alpha^-(\psi)$ et $\alpha^+(\psi)$) les morphismes définissables de la définition 3.15 pour la fonction φ (respectivement ψ). Pour tout morphisme définissable $\beta \geq \max(\alpha^+(\varphi), \alpha^+(\psi))$, on trouve

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi) * \varphi_\beta &= \varphi * (\psi * \varphi_\beta) \\ &= \varphi * \mathbf{L}^{-d\beta} \psi \\ &= \mathbf{L}^{-d\beta} \varphi * \psi \end{aligned}$$

ce qui donne le second point de la définition 3.15.

Par ailleurs, pour tout morphisme définissable $\beta \leq \min(\alpha^-(\varphi), \alpha^-(\psi))$, l'axiome (A3) du théorème 2.4 permet d'écrire

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)\varphi_\beta &= \mu_{x+y}(\varphi(x)\psi(y)\varphi_\beta(x+y)) \\ &= \mu_{x+y}(\varphi(x)\varphi_{\alpha^-(\varphi)}(x)\psi(y)\varphi_{\alpha^-(\psi)}(y)\varphi_\beta(x+y)). \end{aligned}$$

Mais si $x \in B(\alpha^-(\varphi))$ et $y \in B(\alpha^-(\psi))$, alors $x+y \in B(\beta)$. Ceci permet d'écrire

$$\varphi_{\alpha^-(\varphi)}(x)\varphi_{\alpha^-(\psi)}(y)\varphi_\beta(x+y) = \varphi_{\alpha^-(\varphi)}(x)\varphi_{\alpha^-(\psi)}(y)$$

et on obtient alors

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)\varphi_\beta &= \mu_{x+y}(\varphi(x)\varphi_{\alpha^-(\varphi)}(x)\psi(y)\varphi_{\alpha^-(\psi)}(y)) \\ &= \mu_{x+y}(\varphi(x)\psi(y)) = \varphi * \psi \end{aligned}$$

ce qui donne le premier point et conclut. \diamond

Corollaire 3.19. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ deux fonctions de Schwartz-Bruhat. Alors leur produit $\varphi\psi$ est une fonction de Schwartz-Bruhat.

Démonstration. Grâce au théorème 3.16, il existe deux fonctions $\varphi', \psi' \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])^{\text{exp}}$ telles que $\varphi = \mathfrak{F}(\varphi')$ et $\psi = \mathfrak{F}(\psi')$. La proposition 3.13 donne alors $\varphi\psi = \mathfrak{F}(\varphi' * \psi')$. Or la proposition 3.18 assure que la fonction $\varphi' * \psi'$ est de Schwartz-Bruhat et le théorème 3.16 dit donc que la fonction $\varphi\psi$ l'est aussi. \diamond

Proposition 3.20. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(\Lambda[d, 0, 0])$ une fonction de Schwartz-Bruhat. On considère les projections $x, \xi: \Lambda[2d, 0, 0] \rightarrow \Lambda[d, 0, 0]$ sur les premières et secondes d coordonnées. Alors la fonction

$$\psi := \varphi \mathbf{E}(x \mid \xi) \in \mathcal{S}_{\Lambda[d, 0, 0]}(\Lambda[2d, 0, 0])$$

est une fonction de Schwartz-Bruhat.

Démonstration. D'abord, elle a le même support que la fonction φ : il suffit simplement de multiplier par l'exponentiel $\mathbf{E}(x \mid \xi)$. On considère le morphisme $\beta: \Lambda[1, 0, 0] \rightarrow h[0, 0, 1]$ définie par l'égalité

$$\beta(\lambda, \xi_1, \dots, \xi_d) := \max(\alpha(\lambda), -\text{ord } \xi_1 + 1, \dots, -\text{ord } \xi_d + 1).$$

Montrons que $\psi * \varphi_\beta = \mathbf{L}^{-d\beta} \psi$. On trouve

$$\begin{aligned} \psi * \varphi_\beta &= \mu_{x+y}(\psi(x)\varphi_\beta(y)) \\ &= \mu_{x+y}(\varphi(x)\mathbf{E}(x \mid \xi)\varphi_\beta(y)). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $z = x + y$, on obtient

$$\begin{aligned} \psi * \varphi_\beta &= \mu_z(\varphi(z-y)\mathbf{E}(z-y \mid \xi)\varphi_\beta(y)) \\ &= \mathbf{E}(z \mid \xi)\mu_z(\varphi(z-y)\mathbf{E}(-y \mid \xi)\varphi_\beta(y)). \end{aligned}$$

Mais si $\text{ord } y_i \geq \beta(\lambda, \xi)$ pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, alors $\text{ord } y \geq -\text{ord } \xi_i + 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, donc $\text{ord}(-y \mid \xi) \geq 1$ ce qui donne $\mathbf{E}(-y \mid \xi) = 1$. Avec l'inégalité $\beta(\lambda, \xi) \geq \alpha(\lambda)$, cela fournit

$$\psi * \varphi_\beta = \mathbf{E}(z \mid \xi)\mu_z(\varphi(z-y)\varphi_\beta(y))$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}(z \mid \xi) \varphi * \varphi_\beta \\
&= \mathbf{E}(z \mid \xi) \mathbf{L}^{-d\beta} \varphi \\
&= \mathbf{L}^{-d\beta} \psi
\end{aligned}$$

ce qui conclut. \diamond

À partir de maintenant, on travaillera avec la notation intégrale, c'est-à-dire que, pour toute fonction intégrable $\varphi \in \mathcal{C}(X)^{\text{exp}}$, on posera

$$\int_X \varphi(x) dx := \mu(\varphi) \in \mathcal{C}(\{*\})^{\text{exp}}.$$

4. Intégrales motiviques oscillantes

Les résultats énoncés ici sont inspirés de l'article [6] concernant les intégrales p -adiques oscillantes. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère le sous-assignement définissable

$$\Lambda_n := \{x \in h[1, 0, 0] \mid n \mid \text{ord } x \text{ et } \overline{\alpha}x = 1\} \subset h[1, 0, 0]^\times.$$

Notation. Pour un corps \mathbf{K} de Field_k et un m -uplet $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{K}((t))^m$, on définit son ordre $\text{ord } x$ comme la quantité $\min_{1 \leq i \leq m} \text{ord } x_i$.

4.1. Formule de la phase stationnaire motivique

Soit P un sous-assignement définissable et $m, m' \geq 0$ deux entiers. Soient $X \subset h[m, 0, 0]$ et $V \subset h[m', 0, 0]$ des sous-assignements ouverts définissables. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_P(P \times X)^{\text{exp}}$ une fonction de Schwartz-Bruhat et $g: P \times X \times V \rightarrow h[1, 0, 0]$ un morphisme définissable. On pose $S := P \times X \times \Lambda_n$. On considère le morphisme définissable

$$q: \begin{cases} S \times X \longrightarrow h[1, 0, 0], \\ (p, v, \lambda, x) \longmapsto \lambda g(p, x, v). \end{cases}$$

On note $\pi: S \times X \rightarrow P \times X$ et $\pi': S \times X \rightarrow S$ les projections canoniques. On considère enfin la fonction constructible motivique exponentielle

$$I_\varphi := \pi'_! (\pi^*(\varphi) \mathbf{E}(q)) \in \mathcal{C}(S)^{\text{exp}}.$$

On note α^+ et α^- les morphismes apparaissant dans la définition 3.15 pour la fonction φ .

Théorème 4.1 (formule de la phase stationnaire motivique [7, Proposition 4.2]). Avec les mêmes notations, on suppose les trois points suivants :

- (i) pour tous éléments $p \in P$ et $v \in V$, le morphisme $x \in X \mapsto g(p, x, v)$ est de classe \mathcal{C}^1 et on note $x \mapsto \text{grad}_x g(p, x, v) \in h[m, 0, 0]$ son gradient ;
- (ii) il existe un morphisme définissable $R: P \times X \times h[m, 0, 0] \times V \rightarrow h[m, 0, 0]$ tel que, pour tous éléments $p \in P$, $x \in X$, $y \in h[m, 0, 0]$ et $v \in V$ avec $x + y \in X$, on ait

$$g(p, x + y, v) = g(p, x, v) + (\text{grad}_x g(p, x, v) \mid y) + (R(p, x, y, v) y \mid y) ;$$

- (iii) il existe deux morphismes définissables $N, M: P \rightarrow h[0, 0, 1]$ tels que, pour tous éléments $p \in P$, $x \in X$, $y \in h[m, 0, 0]$ et $v \in V$ avec $\text{ord } x \geq \alpha^-(p)$ et $\text{ord } y > \alpha^+(p)$, on ait

$$\text{ord grad}_x g(p, x, v) \leq N(p) \quad \text{et} \quad \text{ord } R(p, x, y, v) \geq M(p).$$

Alors il existe un morphisme définissable $A: P \rightarrow h[0, 0, 1]$ tel que

$$I_\varphi \mathbf{1}_B = I_\varphi \quad \text{avec} \quad B := \{(p, v, \lambda) \in S \mid \text{ord } \lambda \geq -A(p) - N(p)\}.$$

4.2. Formule exacte de la phase stationnaire motivique

On souhaiterait généraliser la proposition suivante issu du l'article [6].

Proposition 4.2 ([6, Proposition 1.2]). Soit \mathbf{K} un corps valué localement compact de caractéristique nulle et $\Psi: \mathbf{K}^\times \rightarrow \mathbf{C}^\times$ un caractère additif trivial sur $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$ et non trivial sur $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ que l'on prolonge à \mathbf{K} par zéro. Notons dx la mesure de Haar sur le groupe additif \mathbf{K} . Soient $X \subset \mathbf{K}^n$ un ouvert, $p: X \rightarrow \mathbf{K}$ une fonction localement analytique et $\phi: X \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de Schwartz-Bruhat. On note $\{x_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des points critiques de la fonction p dans le support de la fonction ϕ . On suppose que ces points critiques sont non dégénérés. Alors il existe une racine huitième de l'unité $\gamma \in \mathbf{C}$ telle que, pour tout élément $\lambda \in (\mathbf{K}^\times)^{\times 2}$ de valeur absolue assez grande, on ait

$$\int_X \phi(x) \Psi(\lambda p(x)) dx = \gamma \sum_{i \in I} c_i \phi(x_i)$$

avec $c_i := \Psi(p(x_i)) \cdot |\det \text{Hess } p(x_i)|^{-1/2}$.

Pour cela, on aurait besoin d'un lemme de Morse motivique et les valeurs des analogue des intégrales de Gauss dans le cas réel (cf. paragraphe suivant). Avec de tels résultats, on serait en mesure de calculer l'intégrale I_φ . Donnons cependant les définitions nécessaires et illustrons cela avec un cas particulier pour illustrer le résultat. Soient $m \geq 0$ un entier et $X \subset h[m, 0, 0]$ un sous-assignement ouvert définissable.

Définition 4.3. Soit $f: X \rightarrow h[1, 0, 0]$ un morphisme définissable de classe \mathcal{C}^2 . La *matrice hessienne* du morphisme f est le morphisme définissable

$$\text{Hess } f: \begin{cases} X \rightarrow \mathcal{M}_m, \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 f(x) & \cdots & \partial_{1m}^2 f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m1}^2 f(x) & \cdots & \partial_{mm}^2 f(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

où le sous-assignement $\mathcal{M}_m := h[m^2, 0, 0]$ est vu comme le sous-assignement qui à chaque corps \mathbf{K} de $\text{Field}_{\mathbf{k}}$ associe l'ensemble des matrices de taille $m \times m$ à coefficients dans $\mathbf{K}((t))$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(X)$ une fonction de Schwartz-Bruhat et $g: X \rightarrow h[1, 0, 0]$ un morphisme définissable de classe \mathcal{C}^2 . On considère le morphisme définissable

$$q: \begin{cases} \Lambda_n \times X \rightarrow h[1, 0, 0], \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda g(x). \end{cases}$$

On note $\pi: \Lambda_n \times X \rightarrow \Lambda \times X$ et $\pi': \Lambda_n \times X \rightarrow \Lambda_n$ les projections canoniques. On considère enfin la fonction constructible motivique exponentielle

$$I_\varphi := \pi'_! (\pi^* (\varphi) \mathbf{E}(q)) \in \mathcal{C}(\Lambda_n)^{\text{exp}}.$$

Le résultat souhaité permettrait de calculer cette fonction I_φ .

Exemple (*Un cas particulier*). On suppose que le morphisme g peut s'écrire sous la forme

$$g(x) = g(x_0) + a^2 x_1^2, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in X$$

pour un élément $a \in h[1, 0, 0]^\times$. Dans le cas général, une écriture similaire pourrait être obtenue avec un lemme de Morse. Avec la notation intégrale, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} I_\varphi(\lambda') &= \int_X \varphi(x) \mathbf{E}(\lambda' g(x)) dx \\ &= \mathbf{E}(\lambda' g(x_0)) \int_X \varphi(x) \mathbf{E}(a^2 \lambda' x_1^2) dx. \end{aligned}$$

Le changement de variables $y = ax$ donne

$$I_\varphi(\lambda') = \mathbf{E}(\lambda'g(x_0)) \int_X \theta(y) \mathbf{E}(\lambda'y_1^2) dy \quad \text{avec} \quad \theta(y) := \mathbf{L}^{-\text{ord } a} \varphi(a^{-1}y).$$

La fonction θ est encore une fonction de Schwartz-Bruhat. On note α^- l'entier dans la définition 3.15 pour la fonction θ . Alors

$$I_\varphi(\lambda') = \mathbf{E}(\lambda'g(x_0)) \int_{\text{ord } y \geq \alpha^-} \theta(y) \mathbf{E}(\lambda'y_1^2) dy.$$

Pour pouvoir calculer cette intégrale, il faudrait calculer la transformée de Fourier de la fonction $y \mapsto \mathbf{E}(\lambda'y_1^2)$ pour un paramètre fixé $\lambda' \in \Lambda_n$: cela ferait intervenir les sommes et intégrales de Gauss. On utiliserait ensuite encore le transformée de Fourier ce qui permettrait de conclure.

Il reste donc des résultats à trouver pour arriver à un tel résultat comme le lemme de Morse motivique et un théorème spectral motivique pour les matrices symétriques.

Comment calculer les intégrales de Gauss ?

On souhaiterait calculer des intégrales de la forme

$$\int_{\text{ord } y \geq \alpha} \mathbf{E}(\lambda y^2) dy \in \mathcal{C}(\{*\})^{\text{exp}}$$

pour un entier $\alpha \in \mathbf{Z}$ et un élément $\lambda \in h[1, 0, 0] \setminus \{0\}$. Dans le cas p -adique, ces intégrales sont connues [8, Sections V.1 & V.2]. D'abord, commençons par calculer les *sommes de Gauss* sur le corps résiduel

$$g_a = \int_{h[0,1,0]} \mathbf{e}(a\xi^2) d\xi$$

pour un élément $a \in \mathbf{G}_m$. Dans le cas du corps fini \mathbf{F}_p , on peut les relier entre elles. Dans le cas motivique, on souhaiterait avoir la relation

$$g_a = \ell(a)g_1 \tag{4.1}$$

où le morphisme $\ell: h[0, 1, 0] \rightarrow h[0, 0, 1]$ est défini par l'égalité

$$\ell_{\mathbf{K}}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta = 0, \\ 1 & \text{si } \eta \neq 0 \text{ et l'élément } \eta \text{ est un carré dans } \mathbf{K}, \\ -1 & \text{si } \eta \neq 0 \text{ et l'élément } \eta \text{ n'est pas un carré dans } \mathbf{K}. \end{cases}$$

pour chaque point (ξ, \mathbf{K}) de $h[0, 1, 0]$. Le morphisme ℓ est l'analogue du symbole de Legendre sur les corps fini. Cependant, pour avoir la relation (4.1), il faudrait montrer que

$$g_a = \int_{h[0,1,0]} (1 + \ell(\eta)) \mathbf{e}(a\eta) d\eta \tag{4.2}$$

puis utiliser l'axiome (R₄) et faire un changement de variables. Cette dernière égalité (4.2) pourrait se justifier puisque

$$1 + \ell_{\mathbf{K}}(\xi) = \text{Card}\{\eta \in \mathbf{K} \mid \eta^2 = \xi\}.$$

Cependant, on ne peut pas évaluer les fonctions et la preuve de cette égalité, bien qu'intuitive, est pour l'instant non établie. Par ailleurs, la valeur de l'intégrale g_1 n'est pas connue : peut-on la calculer ?

Si la relation (4.1) ainsi qu'une relation similaire sur le corps valué est vérifiée, on serait en mesure de calculer les intégrales de Gauss en utilisant les axiomes de base ainsi que la transformation de Fourier. Avec le morphisme $L: h[1, 0, 0] \rightarrow h[0, 0, 1]$ défini par l'égalité

$$\ell_{\mathbf{K}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta = 0, \\ 1 & \text{si } \eta \neq 0 \text{ et l'élément } x \text{ est un carré dans } \mathbf{K}((t)), \\ -1 & \text{si } \eta \neq 0 \text{ et l'élément } x \text{ n'est pas un carré dans } \mathbf{K}((t)). \end{cases}$$

pour chaque point (x, \mathbf{K}) de $h[1, 0, 0]$, on pourrait énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.4. Soient $\lambda \in h[1, 0, 0] \setminus \{0\}$ un élément non nul et $\alpha \in \mathbf{Z}$ un entier. On considère le sous-assignement définissable

$$B(\alpha) := \{z \in h[1, 0, 0] \mid \text{ord } z \geq \alpha\}.$$

Alors

$$\int_{B(\alpha)} \mathbf{E}(\lambda z^2) dz = \begin{cases} \mathbf{L}^{-\alpha} & \text{si } \text{ord } \lambda > -2\alpha, \\ \mathbf{L}^{(\text{ord } \lambda)/2} [\mathbf{L}^{-1} + L(\lambda)(\mathbf{L}^{-1}(g_1 - 1) + 1) - 1] & \text{si } \text{ord } \lambda \leq -2\alpha \text{ et } \text{ord } \lambda \in 2\mathbf{N}, \\ \mathbf{L}^{(\text{ord } \lambda - 1)/2} & \text{si } \text{ord } \lambda \leq -2\alpha \text{ et } \text{ord } \lambda \in 2\mathbf{N} + 1. \end{cases}$$