

VARIÉTÉS TORIQUES

Téofil ADAMSKI

Janvier 2023

Résumé. Les variétés toriques offrent une large famille d'exemples de variétés algébriques avec lesquelles on peut tester des théorèmes de géométrie algébrique. Dans ce séminaire et à l'aide des références [3, 2], on introduira d'abord les notions de cônes et on construira les variétés toriques affines. Ensuite, on complexifiera la construction en recollant des variétés toriques affines pour obtenir la classe des variétés toriques. Enfin, on formera des variétés toriques à partir de systèmes de racines comme le fait l'article [1].

Je remercie Tobias SCHMIDT du temps qu'il m'a accordé pour répondre à mes diverses questions sur mon sujet de séminaire.

Sommaire

1	Cônes et faces	1
1.1	Définitions et premiers exemples	1
1.2	Propriétés élémentaires des cônes	3
2	Variétés toriques affines	5
2.1	Définitions et premiers exemples	5
2.2	Plongement des faces	5
2.3	L'action du tore et les variétés toriques affines abstraites	6
3	Éventails et variétés toriques	7
3.1	La construction	7
3.2	Séparation et condition de compacité	7
3.3	Quelques exemples de variétés toriques	8
4	Variétés toriques associées à des systèmes de racines	9
4.1	Systèmes de racines et chambres de Weyl	9
4.2	La variété torique associée au système de racines A_n	10

1. Cônes et faces

1.1. Définitions et premiers exemples

Définition 1.1. Un *réseau* est un groupe abélien libre de rang fini.

Remarque. Un réseau de rang $n \in \mathbf{N}$ est toujours isomorphe au groupe \mathbf{Z}^n .

Exemple. En notant (e_1, e_2) la base canonique de \mathbf{R}^2 , le groupe $\mathbf{Z}e_1 \oplus \mathbf{Z}(e_1 + e_2) \subseteq \mathbf{R}^2$ est un réseau de rang deux, qui est donc isomorphe au réseau \mathbf{Z}^2 .

À un réseau N de rang n , on lui associe le \mathbf{R} -espace vectoriel $N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ qui se trouve être isomorphe au \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{R}^n . On considère également son espace dual $M_{\mathbf{R}}$, ainsi que le \mathbf{Z} -module dual $M := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ qui est aussi un réseau.

Définition 1.2. Un *cône* de l'espace $N_{\mathbf{R}}$ est une partie $\sigma \subseteq N_{\mathbf{R}}$ de la forme

$$\sigma = \{r_1 v_1 + \cdots + r_s v_s \mid r_1, \dots, r_s \geq 0\}$$

pour un nombre fini de vecteurs $v_1, \dots, v_s \in N_{\mathbf{R}}$, appelés des *générateurs* du cône σ . Sa *dimension* est alors la dimension du \mathbf{R} -espace vectoriel $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(\sigma) = \sigma + (-\sigma)$.

Exemple. Dans \mathbf{R}^2 , le cône associé aux vecteurs e_1 et e_2 est le premier quadrant. Il est donc de dimension deux.

Définition 1.3. Le *dual* d'un cône $\sigma \subseteq N_{\mathbf{R}}$ est l'ensemble

$$\sigma^\vee := \{u \in M_{\mathbf{R}} \mid \forall v \in \sigma, \langle u, v \rangle \geq 0\}.$$

Une *face* du cône σ est un ensemble de la forme

$$\sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\}$$

pour une forme linéaire $u \in \sigma^\vee$.

Remarquons que le cône σ est une face de lui-même en prenant $u = 0$. Une face du cône σ est *propre* si elle n'est pas égale au cône tout entier.

Exemple. On considère le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur l'espace $N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^2$. Le dual $M_{\mathbf{R}}$ de ce dernier est isomorphe à \mathbf{R}^2 . Notons $\sigma \subseteq \mathbf{R}^2$ le cône de l'exemple précédent. On considère le premier vecteur $u := e_1^* \in M_{\mathbf{R}}$ de la base canonique. Alors il appartient au dual σ^\vee . Ainsi une face du cône σ est l'ensemble

$$\sigma \cap u^\perp = \mathbf{R}_+ e_2.$$

En fait, il n'a que deux faces qui sont les demi-droites $\mathbf{R}_+ e_1$ et $\mathbf{R}_+ e_2$.

Proposition 1.4. Soit σ un cône. Alors le dual σ^\vee est un cône de $M_{\mathbf{R}}$ et $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.

Démonstration. Pour la première assertion, on remarque que les cônes sont exactement les intersections de demi-espaces fermés (admis). On admet également la seconde assertion. \diamond

Proposition 1.5. Soient σ un cône, τ une face de σ et γ une face de τ . Alors

- (i) la face τ est un cône;
- (ii) la face γ est une face du cône σ .

Démonstration. (i) On écrit la face τ du cône σ sous la forme $\tau = \sigma \cap u^\perp$ avec $u \in \sigma^\vee$. Soient $v_1, \dots, v_s \in N_{\mathbf{R}}$ des générateurs du cône σ . On considère le sous-ensemble

$$S := \{v_i \mid i \in \{1, \dots, s\}, \langle u, v_i \rangle = 0\} \subseteq N_{\mathbf{R}}$$

Quitte à réordonner les vecteurs v_i , on suppose que les éléments de ce dernier ensemble sont les vecteurs v_1, \dots, v_t avec $t \leq s$. Montrons que ces derniers vérifient

$$\tau = \{r_1 v_1 + \dots + r_t v_t \mid r_1, \dots, r_t \geq 0\}. \quad (1.1)$$

Soit $w \in \tau$ un élément. Comme $w \in \sigma$, on écrit $w = r_1 v_1 + \dots + r_s v_s$ avec $r_1, \dots, r_s \geq 0$. Comme $w \in u^\perp$, on obtient

$$0 = \langle u, w \rangle = r_{t+1} \langle u, v_{t+1} \rangle + \dots + r_s \langle u, v_s \rangle.$$

Pour tout indice $i \in \{t+1, \dots, s\}$, comme $u \in \sigma^\vee$ et $v_i \in \sigma$, la quantité $\langle u, v_i \rangle$ est positive et même strictement car $v_i \notin S$. Cela donne $r_{t+1} = \dots = r_s = 0$ et montre ainsi l'inclusion \subseteq . Inversement, soient $r_1, \dots, r_t \geq 0$. Les vecteurs v_1, \dots, v_s générant le cône σ , le vecteur $w := r_1 v_1 + \dots + r_t v_t$ appartient à ce dernier. De plus, comme les vecteurs v_1, \dots, v_t appartiennent à l'ensemble S , on trouve $\langle u, w \rangle = 0$, donc $w \in u^\perp$. On en déduit $w \in \tau$ ce qui conclut l'égalité (1.1). La face τ est donc un cône.

- (ii) On écrit les faces τ et γ sous les formes $\tau = \sigma \cap u^\perp$ et $\gamma = \tau \cap u'^\perp$ avec $u \in \sigma^\vee$ et $u' \in \tau^\vee$. Soient $v_1, \dots, v_s \in N_{\mathbf{R}}$ des générateurs du cône σ . Montrons qu'il existe un réel non nul $p \in \mathbf{R}^*$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, \quad \langle u' + pu, v_i \rangle \geq 0. \quad (1.2)$$

Soit $i \in \{1, \dots, s\}$. On va trouver un réel non nul $p_i \in \mathbf{R}^*$ tel que $\langle u', v_i \rangle + p_i \langle u, v_i \rangle \geq 0$. La quantité $\langle u, v_i \rangle$ est positive car $u \in \sigma^\vee$ et on distingue deux cas :

- si $\langle u, v_i \rangle = 0$, alors $v_i \in u^\perp$, donc $v_i \in \tau$, donc $\langle u', v_i \rangle \geq 0$ car $u' \in \tau^\vee$. Dans ce cas, on peut prendre un réel non nul quelconque p_i ;
- sinon on trouve $\langle u, v_i \rangle > 0$ et on prend $p_i \geq -\langle u', v_i \rangle / \langle u, v_i \rangle$.

Le réel $p := \max(p_1, \dots, p_s)$ vérifie alors la condition (1.2). De la sorte, on a trouvé un élément $u' + pu$ du dual σ^\vee . Par ailleurs, comme $p \neq 0$, il vérifie l'égalité

$$\sigma \cap (u' + pu)^\perp = \sigma \cap u'^\perp \cap (pu)^\perp = \sigma \cap u'^\perp \cap u^\perp = \tau \cap u'^\perp = \gamma$$

ce qui conclut que l'ensemble γ est une face du cône σ . \diamond

Définition 1.6. Un cône σ est *fortement convexe* si le cône nul $\{0\}$ en est une face.

Exemples. Le premier quadrant est fortement convexe. Toute demi-droite $\mathbf{R}_+ u$ avec $u \in N_{\mathbf{R}}$ est fortement convexe.

Définition 1.7. Un cône est *rationnel* si les vecteurs v_1, \dots, v_s le définissant appartiennent au réseau N .

Exemple. Le premier quadrant du plan \mathbf{R}^2 est un cône rationnel du réseau \mathbf{Z}^2 .

Proposition 1.8. Le dual d'un cône rationnel est encore rationnel.

1.2. Propriétés élémentaires des cônes

Proposition 1.9 (*lemme de Gordan*). Soit σ un cône rationnel. Alors l'ensemble $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$ est un semi-groupe de type fini.

Démonstration. Il s'agit d'un semi-groupe en utilisant le fait que le dual σ^\vee est un cône. Montrons qu'il est de type fini. Par la proposition précédente, le cône σ^\vee est rationnel et on peut donc prendre des éléments $u_1, \dots, u_s \in M$ tels que

$$\sigma^\vee = \{r_1 u_1 + \dots + r_s u_s \mid r_1, \dots, r_s \geq 0\}.$$

Considérons le compact

$$K := \{t_1 u_1 + \dots + t_s u_s \mid t_1, \dots, t_s \in [0, 1]\}.$$

Comme l'ensemble M est discret, l'intersection $K \cap M$ est finie. Montrons qu'elle génère le semi-groupe S_σ . Soit $u \in S_\sigma$ un élément. On l'écrit sous la forme

$$u = r_1 u_1 + \dots + r_s u_s \quad \text{avec} \quad r_1, \dots, r_s \geq 0.$$

Pour chaque indice $i \in \{1, \dots, s\}$, on pose $m_i := \lfloor r_i \rfloor \in \mathbf{N}$ et $t_i := r_i - m_i \in [0, 1]$ de telle sorte que $r_i = m_i + t_i$. Alors on peut écrire $u = \sum_{i=1}^s m_i u_i + u'$ avec

$$u_i \in K \cap M \quad \text{et} \quad u' := \sum_{i=1}^s t_i u_i = u - \sum_{i=1}^s m_i u_i \in K \cap M. \quad \diamond$$

Exemple. Prenons le premier quadrant $\sigma \subseteq \mathbf{R}^2$. Alors le semi-groupe S_σ est engendré par les vecteurs e_1^* et e_2^* où la famille (e_1^*, e_2^*) désigne la base duale de la base canonique de \mathbf{R}^2 .

Définition 1.10. L'*intérieur relatif* d'un cône $\sigma \subseteq N_{\mathbf{R}}$ est l'intérieur de la partie σ dans l'espace vectoriel normé $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(\sigma) = \sigma + (-\sigma)$, notée $\text{Relint}(\sigma)$.

Exemple. L'intérieur relatif n'est pas l'intérieur. Dans \mathbf{R}^2 , l'intérieur du cône $\mathbf{R}_+ \times \{0\}$ est vide tandis que son intérieur relatif est $\mathbf{R}_+^* \times \{0\}$. En revanche, lorsque $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(\sigma) = N_{\mathbf{R}}$, les deux notions coïncident.

Remarque. Soient $v_1, \dots, v_s \in N_{\mathbf{R}}$ des vecteurs générant un cône σ . Notons d la dimension de ce dernier. Tout élément $v \in \text{Relint}(\sigma)$ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de d vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs v_i .

Lemme 1.11. Soient $\sigma \subseteq N_{\mathbf{R}}$ un cône et $\tau \subseteq \sigma$ une face. Soient $v \in \sigma$ un élément et $u \in M_{\mathbf{R}}$ une forme linéaire. Alors

- (i) si $v \in \text{Relint}(\sigma)$, alors $\langle u, v \rangle > 0$ pour tout élément $u \in \sigma^{\vee} \setminus \sigma^{\perp}$;
- (ii) si $u \in \text{Relint}(\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp})$, alors $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$.

Démonstration. (i) Soit $v \in \text{Relint}(\sigma)$ un élément. D'après la remarque et en reprenant ses notations, quitte à réordonner les vecteurs v_i , il existe des réels $r_1, \dots, r_d > 0$ tels que $v = r_1 v_1 + \dots + r_d v_d$ où la famille (v_1, \dots, v_d) est libre. Soit $u \in \sigma^{\vee} \setminus \sigma^{\perp}$ une forme linéaire. Comme elle appartient au dual du cône σ , on obtient $\langle u, v \rangle \geq 0$. Si on avait $\langle u, v \rangle = 0$, alors on trouverait

$$r_1 \langle u, v_1 \rangle + \dots + r_d \langle u, v_d \rangle = 0$$

donc $\langle u, v_1 \rangle = \dots = \langle u, v_d \rangle = 0$, donc $u = 0$ sur $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(v_1, \dots, v_d) = \text{Vect}_{\mathbf{R}}(\sigma)$ ce qui conduit à une absurdité puisque $u \notin \sigma^{\perp}$. D'où $\langle u, v \rangle > 0$.

- (ii) On suppose $u \in \text{Relint}(\tau^*)$ avec $\tau^* := \sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp}$. Montrons l'égalité $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ par double inclusion. Soit $v \in \tau$ un élément. Comme $u \in \tau^* \subseteq \tau^{\perp}$, on trouve $\langle u, v \rangle = 0$, donc $v \in u^{\perp}$. Mais comme $v \in \tau \subseteq \sigma$, on obtient $v \in \sigma \cap u^{\perp}$. D'où l'inclusion $\tau \subseteq \sigma \cap u^{\perp}$. Comme $u \in \text{Relint}(\tau^*)$, le point (i) appliqué au cône $\tau^* \subseteq \sigma^{\vee}$ donne

$$\forall v \in (\tau^*)^{\vee}, \quad v \notin (\tau^*)^{\perp} \implies \langle u, v \rangle > 0.$$

Or comme $u \in \tau^*$, on a $\langle u, v \rangle \geq 0$ pour tout $v \in (\tau^*)^{\vee}$. La contraposée de l'assertion précédente donne alors

$$\forall v \in (\tau^*)^{\vee}, \quad \langle u, v \rangle = 0 \implies v \in (\tau^*)^{\perp}$$

ce qui traduit l'inclusion $(\tau^*)^{\vee} \cap u^{\perp} \subseteq (\tau^*)^{\perp}$. Il suffit donc de montrer les points

- $\sigma \subseteq (\tau^*)^{\vee}$,
- $(\tau^*)^{\perp} \subseteq \tau$

pour conclure.

- Comme $\tau^* \subseteq \sigma^{\vee}$, on trouve $\sigma = (\sigma^{\vee})^{\vee} \subseteq (\tau^*)^{\vee}$.
- On peut écrire $(\tau^*)^{\perp} = (\sigma^{\vee})^{\perp} + (\tau^{\perp})^{\perp} = (\sigma^{\vee})^{\perp} + \tau$. Montrons que $(\sigma^{\vee})^{\perp} \subseteq \tau$ ce qui conclura l'inclusion. On écrit la face τ sous la forme $\tau = \sigma \cap t^{\perp}$ avec $t \in \sigma^{\vee}$. Comme $t \in \sigma^{\vee}$, on trouve $(\sigma^{\vee})^{\perp} \subseteq t^{\perp}$. Par ailleurs, l'inclusion $(\sigma^{\vee})^{\perp} \subseteq \sigma$ est vérifiée en utilisant la description d'un cône comme une intersection de demi-espaces fermés⁽¹⁾. Cela donne $(\sigma^{\vee})^{\perp} \subseteq \tau$ et donc $(\tau^*)^{\perp} \subseteq \tau + \tau = \tau$.

D'où $\sigma \cap u^{\perp} \subseteq (\tau^*)^{\vee} \cap u^{\perp} \subseteq (\tau^*)^{\perp} \subseteq \tau$ ce qui conclut l'implication. \diamond

Proposition 1.12. Soient σ un cône rationnel et $\tau = \sigma \cap u^{\perp} \subseteq \sigma$ une face. Alors

$$\tau^{\vee} = \sigma^{\vee} - \mathbf{R}_+ u \quad \text{et} \quad S_{\tau} = S_{\sigma} - \mathbf{N}u.$$

Démonstration. Montrons la première égalité. On sait que la face τ est un cône et donc que son dual τ^{\vee} en est encore un. Par ailleurs, comme $u \in \sigma^{\vee}$, l'ensemble $\sigma^{\vee} - \mathbf{R}_+ u$ est aussi un cône. En vertu de la proposition 1.4, il suffit donc de montrer que les cônes τ^{\vee} et $\sigma^{\vee} - \mathbf{R}_+ u$ ont le même dual. Mais d'une part, la même proposition donne $(\tau^{\vee})^{\vee} = \tau$ et, d'autre part, une petite manipulation avec les duals donne

$$(\sigma^{\vee} - \mathbf{R}_+ u)^{\vee} = (\sigma^{\vee})^{\vee} \cap (-\mathbf{R}_+ u)^{\vee} = \sigma \cap u^{\perp} = \tau.$$

Ceci conclut la première égalité.

Pour la seconde égalité, on peut faire en sorte que $u \in S_{\sigma}$ et on prend l'intersection de la première égalité avec l'ensemble M . Justifions le fait qu'on peut prendre $u \in S_{\sigma}$. Le lemme 1.11 donne $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ avec $u \in \text{Relint}(\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp})$. Remarquons maintenant que l'intersection $A := \text{Relint}(\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp}) \cap M$ n'est pas vide puisque, comme le cône σ est rationnel, le cône $\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp}$, dont on note d la dimension, est encore rationnel et on prend la somme de d vecteurs linéairement indépendants parmi ses générateurs qui est bien un élément de l'intersection A . On choisit alors un élément $u \in A \subseteq S_{\sigma}$. \diamond

(1). On peut même montrer l'égalité $(\sigma^{\vee})^{\perp} = \sigma \cap (-\sigma)$.

2. Variétés toriques affines

2.1. Définitions et premiers exemples

Soit S un semi-groupe abélien additif. Détaillons la construction de la \mathbf{C} -algèbre $\mathbf{C}[S]$. Considérons l'ensemble $\mathbf{C}[S]$ des fonctions $S \rightarrow \mathbf{C}$ à support fini. On le munit d'une structure de \mathbf{C} -algèbre grâce au produit de convolution : pour deux fonctions $f, g \in \mathbf{C}[S]$, on définit leur produit fg par l'égalité

$$fg(u) := \sum_{vw=u} f(v)g(w), \quad u \in S.$$

On dispose d'une injection canonique $S \rightarrow \mathbf{C}[S]$ qui à un élément $u \in S$ associe la fonction caractéristique $\chi^u \in \mathbf{C}[S]$ du singleton $\{u\}$. Il s'agit d'un morphisme de semi-groupes. Notons également que la famille $(\chi^u)_{u \in S}$ est alors une base de \mathbf{C} -espace vectoriel $\mathbf{C}[S]$.

Exemple. Le semi-groupe \mathbf{N}^n induit la \mathbf{C} -algèbre $\mathbf{C}[\mathbf{N}^n] \simeq \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Remarque. On suppose que le semi-groupe S est de type fini. Soit $\{u_1, \dots, u_s\} \subseteq S$ une partie génératrice. Alors la \mathbf{C} -algèbre $\mathbf{C}[S]$ est de type fini : un système de générateurs est l'ensemble $\{\chi^{u_1}, \dots, \chi^{u_s}\}$. Elle est donc de la forme $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_r]/I$ pour un entier $r \leq s$ et un idéal $I \subseteq \mathbf{C}[X_1, \dots, X_r]$.

Définition 2.1. La variété torique affine associée à un cône rationnel fortement convexe σ est le schéma affine $U_\sigma := \text{Spec } \mathbf{C}[S_\sigma]$.

Exemple. Le cône nul $\{0\} \subseteq \mathbf{N}_{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{R}^n$ est rationnel et fortement convexe. Il définit le semi-groupe $S_{\{0\}} = M \simeq \mathbf{Z}^n$ et donc la variété torique affine

$$U_{\{0\}} = \text{Spec } \mathbf{C}[M] \simeq \text{Spec } \mathbf{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}].$$

On l'appelle le *tore* associé au réseau N et on la note \mathbf{T}_N . Lorsque $N = \mathbf{Z}^n$, on la note \mathbf{T}^n .

Exemple. Soit $\sigma \subseteq \mathbf{R}^n$ le cône rationnel fortement convexe généré par les k premiers vecteurs e_1, \dots, e_k de la base canonique de \mathbf{R}^n avec $k \leq n$. Notons (e_1^*, \dots, e_n^*) la base duale associée à la base canonique de \mathbf{R}^n . Alors le semi-groupe associé est

$$S_\sigma = \mathbf{N}e_1^* + \dots + \mathbf{N}e_k^* + \mathbf{Z}e_{k+1}^* + \dots + \mathbf{Z}e_n^*$$

et donc la variété torique affine associée est

$$U_\sigma \simeq \text{Spec } \mathbf{C}[X_1, \dots, X_k, X_{k+1}^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^k \times_{\text{Spec } \mathbf{C}} \mathbf{T}^{n-k}$$

où la notation $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^k := \text{Spec } \mathbf{C}[X_1, \dots, X_k]$ désigne l'espace affine complexe de dimension k .

2.2. Plongement des faces

Vocabulaire. À partir de maintenant, sauf mention du contraire, un cône désignera un cône rationnel strictement convexe.

Soient S et S' deux semi-groupes. Un morphisme de semi-groupes $S \rightarrow S'$ induit un morphisme de \mathbf{C} -algèbres $\mathbf{C}[S] \rightarrow \mathbf{C}[S']$ et donc un morphisme de schémas affines

$$\text{Spec } \mathbf{C}[S'] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C}[S].$$

Soient σ un cône et $\tau \subseteq \sigma$ une face. Alors l'inclusion $\tau \rightarrow \sigma$ induit un morphisme de semi-groupes $S_\sigma \rightarrow S_\tau$ et donc un morphisme de schémas affines $U_\tau \rightarrow U_\sigma$.

Proposition 2.2. Soient σ un cône et $\tau \subseteq \sigma$ une face. Alors le morphisme $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ plonge le schéma U_τ comme un ouvert principal du schéma U_σ .

Démonstration. D'après la proposition 1.12, comme le cône τ est une face du cône σ , il existe un élément $u \in S_\sigma$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$ et on trouve alors $S_\tau = S_\sigma - \mathbf{N}u$. Pour chaque élément $v \in S_\tau$, on peut donc écrire $v = w - pu$ avec $w \in S_\sigma$ et $p \in \mathbf{N}$ si bien que

$$\chi^w = \chi^v \times (\chi^u)^p,$$

donc l'élément χ^v appartient à l'anneau localisé $\mathbf{C}[S_\sigma]_{\chi^u}$. Cela donne $\mathbf{C}[S_\tau] \subseteq \mathbf{C}[S_\sigma]_{\chi^u}$. Le même argument permet de montrer l'inclusion inverse ce qui assure l'égalité $\mathbf{C}[S_\tau] = \mathbf{C}[S_\sigma]_{\chi^u}$. On obtient alors un homéomorphisme

$$U_\tau = \text{Spec } \mathbf{C}[S_\sigma]_{\chi^u} \simeq \text{D}(\chi^u) \subseteq U_\sigma$$

on a considéré l'ouvert principal $\text{D}(\chi^u) := U_\sigma \setminus \text{V}(\chi^u)$. \diamond

En particulier, soit $\sigma \subseteq N_{\mathbf{R}}$ un cône fortement convexe. Alors le cône nul $\{0\}$ est une face du cône σ et on obtient alors un plongement $\mathbf{T}_N \rightarrow U_\sigma$.

2.3. L'action du tore et les variétés toriques affines abstraites

Soit $\sigma \subseteq N_{\mathbf{R}}$ un cône. On va faire « agir » le tore \mathbf{T}_N sur la variété torique U_σ . Définissons le morphisme de \mathbf{C} -algèbres

$$\phi: \mathbf{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbf{C}[M] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[S_\sigma]$$

qui envoie chaque élément χ^u avec $u \in S_\sigma$ sur l'élément $\chi^u \otimes \chi^u$. Remarquons qu'il étend le morphisme $\mathbf{C}[M] \rightarrow \mathbf{C}[M] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[M]$ défini de la même manière. Le morphisme ϕ induit donc un morphisme de schémas

$$\mathbf{T}_N \times_{\text{Spec } \mathbf{C}} U_\sigma \rightarrow U_\sigma$$

que l'on appellera *action* du tore \mathbf{T}_N sur la variété torique U_σ .

Définition 2.3. Une *variété torique affine abstraite* est un schéma affine irréductible X contenant un tore \mathbf{T}_N comme ouvert tel que l'action naturelle du tore \mathbf{T}_N sur lui-même s'étend en une action algébrique du tore \mathbf{T}_N sur le schéma X .

Remarque. Dans une variété torique affine abstraite X , le tore $\mathbf{T}_N \subseteq X$ est dense. En effet, soit $U \subseteq X$ un ouvert non vide. Comme l'espace topologique X est irréductible et le tore \mathbf{T}_N est ouvert dans ce dernier, l'intersection $U \cap \mathbf{T}_N$ n'est pas vide ce qui montre la densité du tore \mathbf{T}_N .

Une variété torique affine est donc une variété torique affine abstraite. En fait, on peut montrer une réciproque partielle qui fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.4. Soit X un schéma affine. Alors les points suivants sont équivalents :

- (i) le schéma X est une variété torique affine abstraite ;
- (ii) il existe un réseau M et un semi-groupe $S \subseteq M$ de type fini tels que $X \simeq \text{Spec } \mathbf{C}[S]$.

Notons \mathbf{Tor} la catégorie des variétés toriques *abstraites* où les morphismes sont les morphismes de schémas $\text{Spec } \mathbf{C}[S_2] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C}[S_1]$ induit par des morphismes de semi-groupes $S_1 \rightarrow S_2$. Notons également \mathcal{C} la catégorie des semi-groupes abéliens de type fini inclus dans un réseau. Ainsi le foncteur contravariant

$$\text{Spec } \mathbf{C}[-]: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Tor}$$

est essentiellement surjectif et pleinement fidèle : c'est donc une équivalence de catégories.

3. Éventails et variétés toriques

3.1. La construction

Définition 3.1. Un *éventail* du réseau N est un ensemble fini Δ constitué de cônes, toujours supposés rationnels et strictement convexes, de l'espace $N_{\mathbf{R}}$ vérifiant les deux points suivants :

- chaque face d'un cône $\sigma \in \Delta$ appartient à l'ensemble Δ ;
- l'intersection $\sigma \cap \tau$ de deux cônes $\sigma, \tau \in \Delta$ est une face des cônes σ et τ .

Exemple. Considérons le premier quadrant $\sigma \subseteq \mathbf{R}^2$ et ses deux faces \mathbf{R}_+e_1 et \mathbf{R}_+e_2 . Alors l'ensemble $\Delta := \{\sigma, \mathbf{R}_+e_1, \mathbf{R}_+e_2, \{0\}\}$ est un cône du réseau \mathbf{Z}^2 .

Dans la suite de cette sous-section, on va construire une variété abstraite à partir d'un éventail. Pour cela, on va recoller les variétés toriques affines et on admet le lemme suivant. On fixe un éventail Δ du réseau N .

Lemme 3.2. Soient σ et σ' deux cônes ayant une face commune τ . Alors il existe un élément $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$.

Démonstration. Voir le livre [2, Lemma 1.2.13]. En fait, tout élément $u \in \text{Relint}(\sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee)$ va fonctionner. \diamond

Soient $\sigma, \sigma' \in \Delta$ deux cônes de l'éventail. On considère encore le cône $\tau := \sigma \cap \sigma'$ qui est une face commune des cônes σ et σ' . Grâce au lemme 3.2, on peut écrire $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$ pour un élément $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$. Comme $u \in \sigma^\vee$ et $-u \in \sigma'^\vee$, l'argument dans la preuve de la proposition 2.2 permet d'écrire $\mathbf{C}[S_\tau] = \mathbf{C}[S_\sigma]_{\chi^u}$ et $\mathbf{C}[S_\tau] = \mathbf{C}[S_{\sigma'}]_{\chi^{-u}}$ si bien que

$$U_\sigma \supseteq D(\chi^u) \simeq \text{Spec } \mathbf{C}[S_\sigma]_{\chi^u} = U_\tau = \text{Spec } \mathbf{C}[S_{\sigma'}]_{\chi^{-u}} \simeq D(\chi^{-u}) \subseteq U_{\sigma'}. \quad (3.1)$$

On peut donc voir le schéma U_τ comme un ouvert principal $U_{\sigma',\sigma}$ de U_σ et comme un ouvert principal $U_{\sigma,\sigma'}$ de $U_{\sigma'}$. L'égalité (3.1) donne alors un isomorphisme

$$\alpha_{\sigma',\sigma} : U_{\sigma',\sigma} \longrightarrow U_{\sigma,\sigma'}.$$

Ces isomorphismes $\alpha_{\sigma',\sigma}$ avec $\sigma, \sigma' \in \Delta$ sont bien compatibles, c'est-à-dire qu'ils vérifient les deux points suivants :

- $\alpha_{\sigma',\sigma}(U_{\sigma',\sigma} \cap U_{\sigma'',\sigma}) \subseteq U_{\sigma'',\sigma'}$ pour tous cônes $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Delta$;
- $\alpha_{\sigma'',\sigma} = \alpha_{\sigma'',\sigma'} \circ \alpha_{\sigma',\sigma}$ sur $U_{\sigma',\sigma} \cap U_{\sigma'',\sigma}$ pour tous cônes $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Delta$.

On peut donc recoller les schémas U_σ avec $\sigma \in \Delta$ selon les isomorphismes $\alpha_{\sigma',\sigma}$ avec $\sigma, \sigma' \in \Delta$ pour obtenir un schéma $X(\Delta)$. On peut écrire $X(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} U_\sigma$.

Définition 3.3. Le schéma $X(\Delta)$ est une *variété torique*.

Exemple. Soit σ un cône. On considère l'éventail Δ constitué de toutes les faces du cône σ . Alors $X(\Delta) \simeq U_\sigma$.

3.2. Séparation et condition de compacité

Lemme 3.4. Soient $\sigma, \sigma' \in \Delta$ deux cônes. Posons $\tau := \sigma \cap \sigma'$. Alors $S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$.

Démonstration. Comme $\sigma^\vee + \sigma'^\vee = \tau^\vee$, on trouve une première inclusion $S_\sigma + S_{\sigma'} \subseteq S_\tau$. Réciproquement, comme l'ensemble Δ est un éventail, l'intersection τ est une face des cônes σ et σ' . Par le lemme 3.2, il existe un élément $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$. Comme les cônes σ et σ' sont rationnels, le cône $\sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ est encore rationnel et on peut même prendre l'élément $u \in \text{Relint}(\sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee) \cap M \subseteq \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee \cap M$. Dès lors, on peut écrire l'appartenance $-u \in S_{\sigma'}$ et, combinée avec la proposition 1.12, on trouve l'autre inclusion $S_\tau \subseteq S_\sigma - \mathbf{N}u \subseteq S_\sigma + S_{\sigma'}$. \diamond

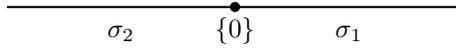


FIGURE 1 – L'éventail Δ donnant la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$.

Proposition 3.5. Soit Δ un éventail. Alors la variété $X(\Delta)$ est séparée.

Démonstration. Posant $X := X(\Delta)$, on souhaite montrer que la diagonale $\delta: X \times X \rightarrow X$ est d'image fermée. Avec la construction par recollement de la variété X , il suffit de montrer que, pour tous cônes $\sigma, \sigma' \in \Delta$, la diagonale $\delta_{\sigma, \sigma'}: U_{\tau} \rightarrow U_{\sigma} \times U_{\sigma'}$ est d'image fermée avec $\tau := \sigma \cap \sigma'$. En effet, il suffira alors d'écrire

$$(X \times X) \setminus \text{Im}(\delta) = \bigcup_{\sigma, \sigma' \in \Delta} (U_{\sigma} \times U_{\sigma'}) \setminus \text{Im}(\delta_{\sigma, \sigma'})$$

modulo les immersions ouvertes.

La diagonale $\delta_{\sigma, \sigma'}$ est induite par le morphisme d'anneaux $\delta_{\sigma, \sigma'}^*: \mathbf{C}[S_{\sigma}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[S_{\sigma'}] \rightarrow \mathbf{C}[S_{\tau}]$ qui envoie chaque élément $\chi^u \otimes \chi^{u'}$ sur l'élément $\chi^{u+u'}$. Le lemme 3.4 assure que ce morphisme $\delta_{\sigma, \sigma'}^*$ est surjectif ce qui permet d'établir un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbf{C}[S_{\tau}] \simeq (\mathbf{C}[S_{\sigma}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[S_{\sigma'}]) / \ker(\delta_{\sigma, \sigma'}^*)$$

qui lui-même donne un isomorphisme de schémas

$$U_{\tau} \simeq \mathbf{V}(\ker(\delta_{\sigma, \sigma'}^*)) \subseteq U_{\sigma} \times U_{\sigma'}$$

ce qui montre que l'image de la diagonale δ est fermée. \diamond

On admet le théorème suivant (voir les livres [3, Section 2.4] ou [2, Theorem 3.4.1]).

Théorème 3.6. Soit Δ un éventail. Alors la variété $X(\Delta)$ est compacte si et seulement si l'intersection $\bigcup \Delta$ est l'espace vectoriel $N_{\mathbf{R}}$ tout entier.

3.3. Quelques exemples de variétés toriques

3.3.1. La droite projective vue comme une variété torique

Considérons l'éventail $\Delta := \{\{0\}, \sigma_1, \sigma_2\}$ de \mathbf{R} comme dans la figure 1. Montrons que la variété torique $X(\Delta)$ est la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$. Le cône σ_1 est engendré par le réel 1, donc sa variété torique associée est $U_{\sigma_1} \simeq \text{Spec } \mathbf{C}[X]$. De même, on trouve $U_{\sigma_2} \simeq \text{Spec } \mathbf{C}[X^{-1}]$. On a également $U_{\{0\}} \simeq \mathbf{T}^1 = \text{Spec } \mathbf{C}[X, X^{-1}]$. L'isomorphisme

$$\alpha_{\sigma_2, \sigma_1}: U_{\sigma_2, \sigma_1} \rightarrow U_{\sigma_1, \sigma_2}$$

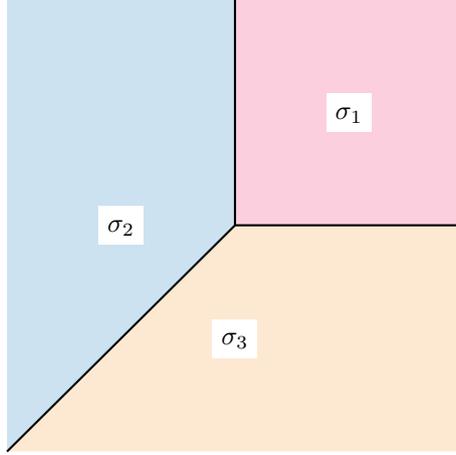
est induit par l'isomorphisme d'anneaux $\mathbf{C}[X^{-1}] \rightarrow \mathbf{C}[X]$ envoyant le monôme X^{-1} sur le monôme X . On retrouve la construction par recollement de la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$.

Remarque. Les seules variétés toriques issues d'éventails de \mathbf{R} sont le tore \mathbf{T}^1 , la droite affine $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$ et la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$. Pour voir cela, il suffit de remarquer que les cônes rationnels strictement convexes de \mathbf{R} sont le cône nul $\{0\}$ et les demi-droites σ_1 et σ_2 .

3.3.2. Le plan projectif vu comme une variété torique

Considérons l'éventail Δ de \mathbf{R}^2 donné par la figure 2. Montrons que sa variété torique associée est le plan projectif $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$. Le cône σ_1 est engendré par les vecteurs e_1 et e_2 de la base canonique, donc sa variété torique associée est la droite affine $U_{\sigma_1} \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$. Par ailleurs, le cône σ_2 est engendré par les vecteurs e_2 et $-e_1 - e_2$, donc son dual σ_2^{\vee} est engendré par les formes linéaires $-e_1^*$ et $-e_1^* + e_2^*$ et donc sa variété torique associée est

$$U_{\sigma_2} \simeq \mathbf{C}[X^{-1}, X^{-1}Y].$$


 FIGURE 2 – L'éventail donnant le plan projectif $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$.

De même, on trouve

$$U_{\sigma_3} \simeq \mathbf{C}[XY^{-1}, Y^{-1}].$$

Recollons les ouverts selon la face $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap (e_1^*)^\perp = \sigma_2 \cap (e_1^*)^\perp$. L'isomorphisme

$$\alpha_{\sigma_2, \sigma_1} : U_{\sigma_1} \supseteq \text{Spec } \mathbf{C}[X, Y]_X \longrightarrow \text{Spec } \mathbf{C}[X^{-1}, X^{-1}Y]_{X^{-1}} \subseteq U_{\sigma_2}$$

induit par l'isomorphisme d'anneaux $\mathbf{C}[X, Y] \longrightarrow \mathbf{C}[X^{-1}, X^{-1}Y]$ envoyant X sur X^{-1} et Y sur $X^{-1}Y$. De même, pour le recollage selon la face $\sigma_1 \cap \sigma_3$, on trouve l'isomorphisme

$$\alpha_{\sigma_3, \sigma_1} : U_{\sigma_1} \supseteq \text{Spec } \mathbf{C}[X, Y]_Y \longrightarrow \text{Spec } \mathbf{C}[XY^{-1}, Y^{-1}]_{Y^{-1}} \subseteq U_{\sigma_3}.$$

Enfin, pour le recollage selon la face $\sigma_2 \cap \sigma_3 = \sigma_2 \cap (-e_1^* + e_2^*)^\perp = \sigma_3 \cap (-e_1^* + e_2^*)^\perp$, on trouve l'isomorphisme

$$\alpha_{\sigma_3, \sigma_2} : U_{\sigma_2} \supseteq \text{Spec } \mathbf{C}[X^{-1}, X^{-1}Y]_{X^{-1}Y} \longrightarrow \text{Spec } \mathbf{C}[XY^{-1}, Y^{-1}]_{XY^{-1}} \subseteq U_{\sigma_3}$$

induit par l'isomorphisme $\mathbf{C}[X^{-1}, X^{-1}Y] \longrightarrow \mathbf{C}[XY^{-1}, Y]$ envoyant X^{-1} sur Y et $X^{-1}Y$ sur XY^{-1} . On retrouve la construction par recollement du plan projectif $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$.

Remarque. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{R}^n . On pose $e_0 := -e_1 - \dots - e_n$. Soit Δ l'éventail constitué des cônes engendrés par chaque sous-ensemble propre de l'ensemble $\{e_0, \dots, e_n\}$. Alors la variété $X(\Delta)$ est l'espace projectif $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$.

4. Variétés toriques associées à des systèmes de racines

4.1. Systèmes de racines et chambres de Weyl

Définition 4.1. Soit E un espace euclidien. Un *système de racines* de l'espace E est un sous-ensemble fini $R \subseteq E$ de vecteurs non nuls tel que

- (i) $\text{Vect}_{\mathbf{R}}(R) = E$;
- (ii) pour tout élément $\alpha \in R$, on ait $\mathbf{R}\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$;
- (iii) pour tout élément $\alpha \in R$, l'ensemble R soit stable par la réflexion $s_\alpha : E \longrightarrow E$ par rapport à l'hyperplan α^\perp ;
- (iv) pour tous éléments $\alpha, \beta \in R$, on ait $2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbf{Z}$.

Les éléments du sous-ensemble R sont appelés les *racines*. Une *base* du système de racines R est un sous-ensemble $S \subseteq R$ qui est une base du \mathbf{R} -espace vectoriel E telle que tout élément de R s'écrive comme une combinaison linéaire à coefficients entiers et de même signe d'éléments de S .

Exemple. L'ensemble $A_1 := \{\pm 1\} \subseteq \mathbf{R}$ est un système de racines de l'espace euclidien \mathbf{R} .

On fixe un système de racines R d'un espace euclidien E . Soient N le réseau engendré par les racines et M son \mathbf{Z} -module dual. Chaque base $S \subseteq R$ définit un cône $\sigma_S := S^\vee \subseteq M_{\mathbf{R}}$, appelé la *chambre de Weyl* associée à la base R . On peut montrer que les chambres de Weyl partitionnent l'ensemble $M_{\mathbf{R}}$. Soit $\Delta(R)$ l'éventail de N engendré par les cônes σ_S et leurs faces pour chaque base $S \subseteq R$.

Définition 4.2. Soit E un espace euclidien. La variété torique associée à un système de racines $R \subseteq E$ est la variété torique $X(R) := X(\Delta(R))$.

Exemple. Le système de racines A_1 engendre le réseau \mathbf{Z} et n'admet que deux bases $\{1\}$ et $\{-1\}$. Leurs cônes associés sont respectivement les demi-droites \mathbf{R}_+ et \mathbf{R}_- . Ainsi on retrouve l'éventail $\Delta(A_1) = \{\{0\}, \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_-\}$ et l'exemple de la section 3.3.1 montre que la variété torique $X(A_1)$ est la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$.

4.2. La variété torique associée au système de racines A_n

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'espace euclidien \mathbf{R}^{n+1} et son sous-espace vectoriel

$$E := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\} \simeq \mathbf{R}^n.$$

On note (e_1, \dots, e_{n+1}) la base canonique de \mathbf{R}^{n+1} . Alors l'ensemble

$$A_n := \{e_i - e_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\} \subseteq E$$

est un système de racines de l'espace euclidien E . On peut montrer que les bases sont les sous-ensembles de la forme

$$S := \{e_{i(1)} - e_{i(2)}, \dots, e_{i(n)} - e_{i(n+1)}\}$$

pour une permutation $i \in \mathfrak{S}_{n+1}$. L'éventail $\Delta(A_n)$ contient donc $(n+1)!$ cônes. Par ailleurs, une telle base S engendre le cône

$$\begin{aligned} \sigma_S = S^\vee &= \{r_1 e_1^* + \dots + r_{n+1} e_{n+1}^* \mid r_{i(1)} \geq r_{i(2)} \geq \dots \geq r_{i(n+1)}\} \\ &= \mathbf{R}_+ e_{i(1)}^* + \mathbf{R}_+(e_{i(1)}^* + e_{i(2)}^*) + \dots + \mathbf{R}_+(e_{i(1)}^* + \dots + e_{i(n)}^*) \end{aligned} \quad (4.1)$$

et donc la variété torique

$$\begin{aligned} U_S &\simeq \text{Spec } \mathbf{C}[X_{i(1)}, X_{i(1)}X_{i(2)}, \dots, X_{i(1)} \cdots X_{i(n+1)}] \\ &\simeq \text{Spec } \mathbf{C}[X_{i(1)}X_{i(2)}^{-1}, \dots, X_{i(n)}X_{i(n+1)}^{-1}] \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^n. \end{aligned}$$

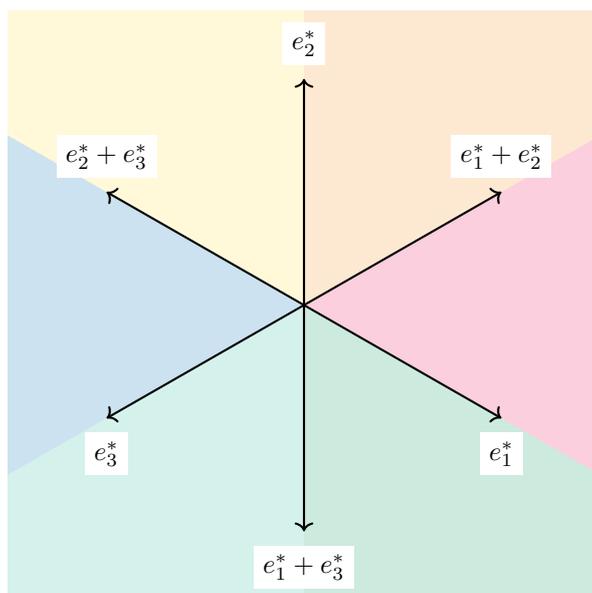
On obtient le recollement de $(n+1)!$ espaces affines de dimension n et, en particulier, une variété projective de dimension n .

Exemple. On considère le système de racines $A_2 \subseteq \mathbf{R}^3$ ainsi que son éventail $\Delta(A_2)$ de l'espace \mathbf{R}^3 . On le voit dans le plan \mathbf{R}^2 après l'avoir projeté selon le plan $(e_1^* + e_2^* + e_3^*)^\perp$. On obtient les 6 cônes dessinés dans la figure 3.

Proposition 4.3. La variété $X(A_n)$ est compacte.

Démonstration. D'après le théorème 3.6, il faut et il suffit de vérifier que l'éventail $\Delta(A_n)$ recouvre l'espace vectoriel E^* . Soit $v \in E^*$ un élément. On veut montrer qu'il existe une base $S \subseteq A_n$ telle que $v \in \sigma_S$. Pour cela, on utilise la description (4.1). La famille $(e_1^*, \dots, e_{n+1}^*)$ génère le dual E . Il existe donc des réels $r_1, \dots, r_{n+1} \in \mathbf{R}$ tels que $v = r_1 e_1^* + \dots + r_{n+1} e_{n+1}^*$. Maintenant, on peut ranger les réels r_i , c'est-à-dire qu'il existe une permutation $i \in \mathfrak{S}_{n+1}$ telle que $r_{i(1)} \geq \dots \geq r_{i(n+1)}$. On prend la base S associée à cette permutation i . On trouve alors $v \in \sigma_S$ avec $\sigma_S \in \Delta(A_n)$. Ainsi l'éventail $\Delta(A_n)$ recouvre l'espace vectoriel E^* . \diamond

Cette proposition est le cas particulier d'un fait plus généralement : pour tout système de racines $R \subseteq E$, la variété torique $X(R)$ est compacte puisque les chambres de Weyl recouvrent l'espace tout entier.

FIGURE 3 – L'éventail $\Delta(A_2)$.

Bibliographie

- [1] Victor BATYREV et Mark BLUME. « The functor of toric varieties associated with Weyl chambers and Losev-Manin moduli spaces ». In : *Tohoku Mathematical Journal* 63.4 (2011), p. 581-604. DOI : [10.2748/tmj/1325886282](https://doi.org/10.2748/tmj/1325886282). URL : <https://doi.org/10.2748/tmj/1325886282>.
- [2] David A. COX, John B. LITTLE et Henry K. SCHENCK. *Toric Varieties*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2011.
- [3] William FULTON. *Introduction to Toric Varieties*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1993.