Algèbre homologique et théorie des faisceaux

Stéphane Guillermou

Master 2 de mathématiques fondamentales · Université de Nantes
Notes prises par Téofil Adamski (version du 3 janvier 2023)

Nantes Université

Sommaire

Chapitre 1
Introduction : un exemple de foncteur dérivé

Définition 1.1. On fixe un groupe G. Un *G-module* est un groupe abélien A muni d'un morphisme de groupes $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$.

Lorsqu'un G-module A est fixé, le morphisme ρ de la définition est sous-entendu : pour deux éléments $g \in G$ et $a \in A$, on notera $g \cdot a$ l'élément $\rho(g)(a)$.

Exemple. La *représentation triviale* de G est le groupe additif $\mathbf{Z}$ muni du morphisme $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{Z})$ qui envoie tout élément de G sur le morphisme constant égal à 1, noté dans la suite 1. On se demande, pour une représentation (A, ρ), si la représentation $(\mathbf{Z}, 1)$ « apparaît ».

Définition 1.2. Pour une représentation (A, ρ), on considère l'*ensemble des invariants de A*

$$A^G \coloneqq \{a \in A \mid \forall g \in G,\ g \cdot a = a\}$$

ainsi que l'*ensemble des co-invariants de A*

$$A_G \coloneqq A/\langle g \cdot a - a \mid g \in G, a \in A\rangle.$$

On peut vérifier que l'ensemble A^G est le plus grand sous-G-module trivial et l'ensemble A_G est le plus grand quotient comme G-module avec une action non triviale de G.

Définition 1.3.
- Une *suite exacte* est un couple de morphismes de G-modules $u\colon A \longrightarrow B$ et $v\colon B \longrightarrow C$ tels que $\ker(v) = \mathrm{im}(u)$. Cette suite sera notée sous la forme

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

- Une *suite exacte longue* est une suite de morphismes de G-modules

$$A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A_2 \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

  tels que

$$\ker(d^i) = \mathrm{im}(d^{i+1}), \qquad i \in \mathbf{N}.$$

- Une *suite exacte courte* est une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0,$$

  c'est-à-dire om le morphisme u est injectif, le morphisme v est surjectif et $\ker(v) = \mathrm{im}(u)$.

Le lemme suivant utilise les catégories qui vont être introduites dans la suite de ce cours.

Lemme 1.4. Le foncteur

$$-^G\colon G\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

est exact à gauche (mais pas à droite), c'est-à-dire que, pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{u^G} B^G \xrightarrow{v^G} C^G \longrightarrow 0$$

Exemple. On considère le groupe $\mathbf{Z}$. Une action $\rho\colon \mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ est uniquement déterminée par un seul automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$. Considérons les trois représentations suivantes :

– la représentation triviale $A \coloneqq \mathbf{R}$ avec $\alpha_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$;

– la représentation $B \coloneqq \mathbf{R}^2$ avec
$$\alpha_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;$$

– la représentation $C \coloneqq A$.

Les applications

$$u\colon \left| \begin{array}{l} A \longrightarrow B, \\ a \longmapsto (a,0) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad v\colon \left| \begin{array}{r} B \longrightarrow C, \\ (a_1,a_2) \longmapsto a_1 \end{array} \right.$$

sont des morphismes de $\mathbf{Z}$-modules et la suite

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 0$$

est exacte. De plus, on peut écrire

$$A^{\mathbf{Z}} = A, \qquad B^{\mathbf{Z}} = \{(a_1,a_2) \in B \mid a_2 = 0\} \qquad \text{et} \qquad C^{\mathbf{Z}} = 0.$$

On voit alors que $u^{\mathbf{Z}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et $v^{\mathbf{Z}} = 0$. La suite obtenue

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

est alors exacte. De même, on obtient une suite exacte avec les co-invariants.

Dans une telle situation, on peut construire de nouveaux foncteurs

$$-^G \rightsquigarrow \mathrm{H}^i(G,-) \qquad \text{et} \qquad -^G \rightsquigarrow \mathrm{H}_i(G,-)$$

qui permettent de construire des suites exactes longues

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,A) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,B) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,C) \longrightarrow \mathrm{H}^2(G,A) \longrightarrow \dots$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}_1(G,C) \longrightarrow A_G \longrightarrow B_G \longrightarrow C_G \longrightarrow 0.$$

On va voir surtout l'exemple de la catégorie des faisceaux sur un espace topologique X : on va construire les objets $\mathrm{H}^i(X,-)$ et en particulier les objets $\mathrm{H}^i(X,\mathbf{Z})$ qui vont être les *groupes de cohomologie* de X. Pour construire les « foncteurs dérivés », on procédera ainsi. On distingue des G-modules particuliers.

Définition 1.5. Un G-module (P,ρ) est *projectif* si, pour tout morphisme surjectif de G-modules $v\colon B \longrightarrow C$ et tout morphisme de G-modules $q\colon P \longrightarrow C$, il existe un morphisme de G-modules $q'\colon P \longrightarrow B$ telle que $q = v \circ q'$.

Proposition 1.6. Pour une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

où le G-module P est projectif, la suite

$$0 \longrightarrow A_G \longrightarrow B_G \longrightarrow P_G \longrightarrow 0$$

est exacte.

L'idée est de remplacer un objet quelconque C par une suite de G-modules projectifs

$$\cdots \longrightarrow P_{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P_{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \longrightarrow 0$$

qui est exacte, puis appliquer l'opération $-_G$ à cette suite pour obtenir la suite

$$\cdots \longrightarrow (P_{i-1})_G \xrightarrow{d_G^{i-1}} (P_i)_G \xrightarrow{d_G^i} (P_{i+1})_G \longrightarrow \cdots$$

qui n'est plus exacte, mais telle que $d_G^i \circ d_G^{i-1} = 0$. On définit alors $\mathrm{H}_i(G, C) \coloneqq \ker(d_{-i}) / \operatorname{im}(d_{-i-1})$.

Théorème 1.7. Les objets $\mathrm{H}^i(G, C)$ ne dépendant pas du choix du G-module projectif P.

Chapitre 2
Catégories et faisceaux

2.1. Les catégories et les faisceaux

Définition 2.1. Une *catégorie* $\mathscr{C}$ est la donnée

- d'un ensemble d'*objets* $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
- pour tous objets $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, d'un autre ensemble de *morphismes* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$;
- pour tous objets $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, d'une loi de composition

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z), \\ (u,v) & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

  qui vérifie les deux points suivants :
  - elle est associative,
  - pour tout objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, il existe un morphisme $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, X)$ telle que

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_X \circ v &= v, & v &\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X), \\ v \circ \mathrm{Id}_X &= v, & v &\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y). \end{aligned}$$

Lorsqu'on prend un morphisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, on le notera simplement $u \colon X \longrightarrow Y$: la catégorie $\mathscr{C}$ sera sous entendue. De même, on pourra omettre la lettre $\mathscr{C}$ en indice des ensembles de morphismes.

Exemple. On peut prendre la catégorie des ensembles **Ens** [(1)] ou celle des groupes abéliens **Ab** où, pour cette dernière, les morphismes sont les morphismes de groupes. On note également **Top** celle des espaces topologiques où les morphismes sont les applications continues. Comme dans l'introduction, on note aussi G-**Mod** la catégorie des G-modules.

Définition 2.2. Un morphisme $u \colon X \longrightarrow Y$ entre deux objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $v \colon Y \longrightarrow X$ vérifiant $u \circ v = \mathrm{Id}_Y$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_X$.

Dans le cas de la catégorie **Ens**, les isomorphismes sont les bijections ensemblistes.

Définition 2.3. Soit X un espace topologique. Un *préfaisceau* de groupes abéliens P sur X est la donnée

- pour tout ouvert $U \subset X$, d'un groupe abélien $P(U)$;
- pour tous ouverts $U, V \subset X$ avec $V \subset U$, d'un morphisme de groupes $r_{U,V} \colon P(U) \longrightarrow P(V)$, dit de *restriction*, vérifiant les deux points suivants :
  - pour tout ouvert $U \subset X$, on a $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{P(U)}$;

(1). L'existence de l'objet $\mathrm{Ob}(\mathbf{Ens})$ est interdite par la théorie des ensembles (c'est le paradoxe de Russell), mais on va faire comme si on pouvait le considérer.

- pour tous ouverts $U, V, W \subset X$ avec $W \subset V \subset U$, on a $r_{W,U} = r_{W,V} \circ r_{V,U}$.

Les éléments de $P(U)$ sont appelés des *sections sur* U.

Pour une section $s \in P(U)$ et tout ouvert $V \subset U$, on pose $s|_V := r_{V,U}(s)$.

Définition 2.4. Soient P et P' deux préfaisceaux sur X. Un *morphisme* $f\colon P \longrightarrow P'$ entre ces deux derniers est la donnée, pour tout ouvert $U \subset X$, d'un morphisme $f(U)\colon P(U) \longrightarrow P'(U)$ tel que, pour tous ouverts $U, V \subset X$ avec $V \subset U$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} P(U) \arrow[r, "r_{V,U}"] \arrow[d, "f(U)"'] & P(V) \arrow[d, "f(V)"] \\ P'(U) \arrow[r, "r'_{V,U}"] & P'(V) \end{tikzcd}$$

commute.

Exemples.

- Soit A un groupe abélien. On note PA_X le préfaisceau défini par
$$PA_X(U) = A \qquad \text{et} \qquad r_{V,U} = \mathrm{Id}_A$$
pour tous ouverts $U, V \subset X$ avec $U \subset V$.
- On suppose que l'espace X est muni d'une mesure μ. Alors les ensembles $\mathrm{L}^1_X(U)$ des fonctions intégrables $U \longrightarrow \mathbf{R}$ pour chaque ouvert $U \subset X$ définissent un préfaisceau L^1_X.
- Soient $Z \subset X$ un sous-ensemble et A un groupe abélien. Alors les ensembles
$$PA_Z(U) := \begin{cases} A & \text{si } U \cap Z = \emptyset, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
définissent un préfaisceau PA_Z.

Définition 2.5. Un *faisceau* sur X est un préfaisceau F vérifiant les points suivants :

- pour tout ouvert $U \subset X$, toute famille d'ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ vérifiant $U_i \subset U$ pour tout $i \in I$ et toute section $s \in F(U)$, si $r_{U_i,U}(s) = 0$ pour tout $i \in I$, alors $s = 0$; (séparation)
- pour tout ouvert $U \subset X$, tout recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de U et toute famille $(s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F(U_i)$ telle que
$$\forall i, j \in I, \qquad r_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j),$$
il existe une unique section $s \in F(U)$ telle que
$$\forall i \in I, \qquad r_{U_i,U}(s) = s_i. \qquad \text{(recollement)}$$

Remarque. Dans l'hypothèse de séparation, on peut prendre $U = I = \emptyset$ et on obtient $F(\emptyset) = 0$.

Exemples. Le préfaisceau PA_X est séparé, mais son recollement n'est pas assuré. Le faisceau défini par $\mathscr{C}_X(U, \mathbf{R}) := \mathscr{C}(U, \mathbf{R})$ pour chaque ouvert $U \subset X$ avec les morphismes de restriction est un faisceau. Le préfaisceau $\mathrm{L}^1_{\mathbf{R}}$ n'est pas un faisceau : il suffit de considérer les fonctions $1 \in \mathrm{L}^1_{\mathbf{R}}(]i, i+2[)$, leur recollement n'est pas intégrables.

Définition 2.6. L'ensemble des *germes* d'un préfaisceau P sur X en un point $x \in X$ est l'ensemble
$$P_x := \bigsqcup_{U \subset X} P(U)/\sim$$
où la relation $\sim$ est définie comme ce qui suit : pour deux sections $s \in P(U)$ et $s' \in P(V)$, on écrit la relation $s \sim s'$ s'il existe un ouvert $W \subset U \cap V$ tel que $x \in W$ et $s|_W = s'|_W$.

On note s_x la classe d'une section $s \in P(U)$ dans le quotient P_x. Remarquons qu'un morphisme de préfaisceaux $u\colon P \longrightarrow Q$ induit des morphismes de groupes $u_x\colon P_x \longrightarrow Q_x$ pour tout point $x \in X$ (voir exercice 2) .

Exemple. On considère le préfaisceau $\mathscr{O}_{\mathbf{C}}$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$. Alors l'ensemble des germes à l'origine est l'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul.

Proposition 2.7. Soit P un préfaisceau sur X. Alors il existe un unique faisceau P^{a} et un morphisme de préfaisceaux $i\colon P \longrightarrow P^{\mathrm{a}}$ tels que ce dernier induisent un isomorphisme $i_x\colon P_x \longrightarrow P^{\mathrm{a}}_x$ sur tous les germes.

Idée. Pour un ouvert $U \subset X$, on note $P^{\mathrm{a}}(U)$ l'ensemble des familles $(s(x))_{x\in U} \in \prod_{x\in U} P(x)$ telles que, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ du point x et un point $t \in P(V)$ vérifiant $t_y = s(y)$ pour tout $y \in V$. ◇

Définition 2.8. Le faisceau P^{a} est le *faisceau associé* à P.

Exemple. Le faisceau associé à PA_X est le faisceau constant défini par les ensembles $A_X(U)$ des fonctions localement constantes $U \longrightarrow A$.

Dans la suite, on note $\mathbf{Psh}(X)$ la catégorie des préfaisceaux et $\mathbf{Sh}(X)$ celle des faisceaux.

Lemme 2.9. On a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Psh}(X)}(P, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(P^{\mathrm{a}}, F)$.

Idée. Dans l'autre sens, on considère le morphisme $u \longmapsto u \circ i$. Construisons maintenant un morphisme de gauche à droite. Soit $v\colon P \longrightarrow F$ un morphisme de préfaisceaux. On veut l'étendre en un morphisme $v'\colon P^{\mathrm{a}} \longrightarrow F$. Soit $U \subset X$ un ouvert. Le morphisme v induit un morphisme $v_x\colon P_x \longrightarrow F_x$ pour tout $x \in X$. Soient $(s(x))_{x\in U} \in P^{\mathrm{a}}$ et $s'(x) \coloneqq v_x(s(x)) \in F_x$. Soit $x_0 \in U$. Alors il existe un voisinage ouvert $U(x_0) \subset U$ du point x_0 et un point $t(x_0) \in P(U(x_0))$ vérifiant $t(x_0)_y = s(y)$ pour tout $y \in V$. On pose $t'(x_0) \coloneqq v(U(x_0))(t(x_0)) \in F(U(x_0))$. Alors

$$\forall y \in U(x_0), \qquad t'(x_0)_y = s'(y).$$

On a besoin du lemme suivant pour finir. Les ouverts $U(x_0)$ avec $x_0 \in X$ recouvrent l'ouvert U. De plus, on a $t'(x_0)_y = t'(x_1)_y$ pour tout $y \in U(x_0) \cap U(x_1)$, donc

$$t'(x_0)|_{U(x_0)\cap U(x_1)} = t'(x_1)|_{U(x_0)\cap U(x_1)}.$$

L'axiome de recollement assure que les $t'(x_0)$ se recollent en $t' \in F(U)$. On pose $t' = v'((s(x))_{x\in U})$. Ceci définit un morphisme $v'\colon P^{\mathrm{a}} \longrightarrow F$. ◇

Lemme 2.10. Soient F un faisceau et $U \subset X$ un ouvert. Soient $s, s' \in F(U)$ deux sections. Si $s_x = s'_x$ pour tout $x \in U$, alors $s = s'$.

Démonstration. Voir exercice 1. ◇

Exercices

Exercice 1. Soient X un espace topologique et F un faisceau sur X. Soient $U \subset X$ un ouvert et $s \in F(U)$ une section. On suppose que $s_x = 0$ pour un certain point $x \in U$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ du point x vérifiant $s|_V = 0$. En déduire que $s = 0$ si et seulement si $s_x = 0$ pour tout point $x \in U$.

Solution L'égalité $s_x = 0$ signifie que $s \sim 0$ dans le quotient F_x, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ du point x tel que $s|_V = 0|_V = 0$.

Le sens direct est clair. Réciproquement, on suppose que $s_x = 0$ pour tout point $x \in U$. Pour chaque point $x \in X$, il existe alors un voisinage ouvert $V_x \subset U$ du point x vérifiant $s|_{V_x} = 0$. Comme $U = \bigcup_{x\in U} V_x$, la propriété de séparation du faisceau P assure alors que $s = 0$.

Exercice 2. Soit $u\colon F \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux sur X. Soit $x \in X$ un point et $U, V \subset X$ un voisinage ouvert de ce dernier. Soient $s \in F(U)$ et $s' \in F(V)$ deux sections telles que $s \sim s'$ dans F_x. Montrer que $u(U)(s) \sim u(V)(s')$ dans G_x. En particulier, le morphisme de faisceaux $u\colon F \longrightarrow G$ induit un morphisme de groupes $u_x\colon F_x \longrightarrow G_x$.

Solution Comme $s \sim s'$ dans F_x, il existe deux voisinage $W \subset U$ du point x tels que $W \subset U \cap V$ et $s|_W = s'|_W$, c'est-à-dire $r_{W,U}(s) = r_{W,V}(s')$, donc $u(U) \circ r_{W,U}(s) = u(U) \circ r_{V,U}(s')$. Mais comme l'application u est un morphisme, on obtient $r'_{W,U} \circ u(U)(s) = r'_{W,V} \circ u(U)(s')$, c'est-à-dire $u(U)(s) \sim u(U)(s')$ dans le quotient G_x. Cela permet de définir sans équivoque l'application

$$u_x\colon \left|\begin{array}{rcl} F_x & \longrightarrow & G_x, \\ F(U) \ni s_x & \longmapsto & u(U)(s)_x. \end{array}\right.$$

Cette dernière est un morphisme de groupes.

Exercice 3. Soit $u\colon F \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux sur X. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme si et seulement si les morphismes u_x avec $x \in X$ sont des isomorphismes.

Solution On suppose que le morphisme u est un isomorphisme. Soit $x \in X$. On vérifie alors que le morphisme $(u^{-1})_x$ est la réciproque du morphisme u_x.

Réciproquement, on suppose que les morphismes u_x avec $x \in X$ sont des isomorphismes. Soit $U \subset X$ un ouvert. Vérifions d'abord que le morphisme $u(U)$ est injectif. Comme ce dernier est un morphisme de groupes, il suffit de montrer que son noyau est trivial. Soit $s \in \ker u(U)$ un élément de son noyau. Alors $u(U)(s) = 0$, donc $u(U)(s)_x = 0$ pour tout $x \in U$, donc $u_x(s_x) = 0$ pour tout $x \in U$. Mais comme les morphismes u_x sont injectifs, on obtient $s_x = 0$ pour tout $x \in U$. Avec l'exercice 1, on trouve donc $s = 0$. Finalement, le morphisme $u(U)$ est injectif.

Montrons qu'il est surjectif. Soit $t \in G(U)$ un élément de son image. Soit $x \in X$. Comme le morphisme u_x est surjectif, il existe un point $s_x^x \in F_x$ tel que $t_x = u_x(s_x^x)$. Soit $s^x \in F(V_x)$ un représentant de la classe s_x^x pour un voisinage ouvert $V_x \subset X$ du point x. L'égalité $t_x = u_x(s_x^x)$ signifie que $t \sim u(V_x)(s^x)$ dans G_x, donc il existe un voisinage ouvert $W_x \subset U \cap V_x$ du point x tel que $t|_{W_x} = u(V_x)(s^x)|_{W_x}$. On conclut ensuite par recollement.

2.2. Les catégories abéliennes

Définition 2.11. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Un *produit* de deux objets X et Y de cette dernière est un objet Z avec deux morphismes $p\colon Z \longrightarrow X$ et $q\colon Y \longrightarrow X$ tels que, pour tout objet Z' et tous morphismes $p'\colon Z' \longrightarrow X$ et $q'\colon Z' \longrightarrow Y'$, il existe un unique morphisme $f\colon Z' \longrightarrow Z$ tel que

$$p' = p \circ f \qquad \text{et} \qquad g' = q \circ f,$$

c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[ddl, bend right, "p'"'] \arrow[ddr, bend left, "q'"] & \\
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

On note alors $Z = X \times Y$.

On définit identiquement la notion de *coproduit* $X \sqcup Y$ en inversant l'ordre des flèches. Ces définitions peuvent se généraliser à des familles d'objets $(X_i)_{i \in I}$.

Exemple. Dans la catégorie des groupes **Gp**, pour deux groupes G et H, le groupe $G \times H$ est un produit des groupes G et H.

Définition 2.12. Un objet X d'une catégorie $\mathscr{C}$ est *final* ou *terminal* si, pour tout objet Y de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ est un singleton. Il est *initial* si, pour tout objet Y de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ est un singleton.

Exemple. Dans la catégorie des ensembles, les singletons sont finaux.

Remarque. Deux objets terminaux sont isomorphes. En effet, soient X_1 et X_2 deux objets terminaux. On note u et v les uniques éléments des ensembles $\operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ et $\operatorname{Hom}(X_2, X_1)$. Alors le morphisme $v \circ u$ est un élément de $\operatorname{Hom}(X_1, X_1) = \{\mathrm{Id}_{X_1}\}$, donc $v \circ u = \mathrm{Id}_{X_1}$. De même, la composée $u \circ v$ est l'identité. Finalement, les morphismes u et v sont des isomorphismes qui sont réciproques l'un de l'autre.

Remarque. Quel est le coproduit $\bigsqcup_{i \in \emptyset} X_i$? C'est un objet X tel que, pour tout objet X', il existe un unique morphisme $X \longrightarrow X'$. Il s'agit donc d'un objet initial. De même, l'objet $\prod_{i \in I} X_i$ est terminal.

Exercice 4. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie admettant un objet terminal $\bullet$. Montrer que, pour tout objet X, on a $X \times \bullet = X$.

Définition 2.13. Une catégorie $\mathscr{C}$ est *additive* si

- il existe des produits et des coproduits ;
- elle admet un objet initial et final, noté 0 ;
- pour tous objets X et Y, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ possède une structure de groupe additif compatible avec la composition, c'est-à-dire telle que la composition soit bilinéaire.

En fait, la troisième propriété est induite par les deux premières : on n'a pas le choix de la structure de groupe. En particulier, le morphisme $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ est donné par le morphisme composé $X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$.

Une telle catégorie étant fixée, pour deux objets X et Y, on peut alors définir deux morphismes $X \sqcup Y \longrightarrow X \sqcup 0 = X$ et $X \sqcup Y \longrightarrow 0 \sqcup Y = Y$ qui induisent un morphisme $X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$.

Proposition 2.14. Le morphisme $X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$ est un isomorphisme.

Démonstration. On a $\mathrm{Hom}(X, X \times Y) = \mathrm{Hom}(X, X) \times \mathrm{Hom}(X, Y)$ et on note i'_X l'image de $(\mathrm{Id}_X, 0)$. On obtient un morphisme

$$u := (i'_X, i'_Y) \colon X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y.$$

De même, on note $p_X \colon X \times Y \longrightarrow X$ la projection et $i_X \colon X \longrightarrow X \sqcup Y$ l'injection, on définit le morphisme

$$v := i_X \circ p_X + i_Y \circ p_Y \colon X \times Y \longrightarrow X \sqcup Y.$$

On peut vérifier alors que les morphismes u et v sont inverses l'un de l'autre. ◇

Dans ce cas, on notera $X \oplus Y$ l'objet $X \sqcup Y \simeq X \times Y$.

Définition 2.15. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive. Un *noyau* d'un morphisme $u \colon X \longrightarrow Y$ est un objet K muni d'un morphisme $i \colon K \longrightarrow X$ tel que $u \circ i = 0$ et qui soit universel pour cette propriété, c'est-à-dire que, s'il existe un morphisme $i' \colon K' \longrightarrow X$ tel que $u \circ i' = 0$, alors il existe un unique morphisme $f \colon K \longrightarrow K'$ tel que $i' = i \circ f$. On note alors $K = \ker u$.

Les objets de la définition peuvent être résumés dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\ker u \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dd, dotted, "f"'] & & \\
& X \arrow[r, "u"] & Y \\
K' \arrow[ur, "i'"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

On définit de même la notion de conoyau $\operatorname{coker} u$ en renversant les flèches.

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{coker} u \arrow[dd, dotted, "f"] \\
X \arrow[r, "u"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & Y \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "q'"] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.16. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive admettant des noyaux et conoyaux. Soit $f \colon X \longrightarrow Y$ un morphisme. On considère le morphisme $i \colon \ker f \longrightarrow X$ et on note $\operatorname{coim} f$ son conoyau, puis le morphisme $q\colon Y \longrightarrow \operatorname{coker} f$ et on note $\operatorname{im} f$ son noyau. On note $q'\colon X \longrightarrow \operatorname{coim} f$ et $i'\colon \operatorname{im} f \longrightarrow Y$ les morphismes comme dans la définition précédente. Alors il existe un unique morphisme $a\colon \operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ tel que $i \circ a \circ q' = f$.

On résume la situation dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"'] & Y \arrow[r, "q"] & \operatorname{coker} f \\ & \operatorname{coim} f \arrow[r, dotted, "a"] & \operatorname{im} f \arrow[u, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme $f \circ i = 0$, donc le morphisme f se factorise sous la forme $f = g \circ q'$. Comme $q \circ f = 0$, on obtient alors $q \circ g \circ q' = 0$. Comme le morphisme q' est un épimorphisme (voir lemme suivant), on obtient $q \circ g = 0$. Ainsi le morphisme g se factorise sous la forme $g = i' \circ a$. Ceci conclut l'existence.

Pour l'unicité, soient a_1 et a_2 deux tels morphismes. Alors $i \circ (a_1 \circ q') = i \circ (a_2 \circ q')$, Comme le morphisme i est un monomorphisme et le morphisme q' un épimorphisme, on obtient $a_1 \circ q' = a_2 \circ q'$, puis $a_1 = a_2$. ◇

Lemme 2.17. Pour un morphisme $f\colon X \longrightarrow Y$, le morphisme $Y \longrightarrow \operatorname{coker} f$ est un épimorphisme et le morphisme $\ker f \longrightarrow X$ est un monomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer le premier cas, le second s'en déduira en renversant le sens des flèches. Montrons que le morphisme $q\colon Y \longrightarrow \operatorname{coker} f$ est un épimorphisme. Soient $u\colon \operatorname{coker} f \longrightarrow Z$ un morphisme vérifiant $u \circ q = 0$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend left, "0"] & \operatorname{coker} f \arrow[r, "u"] & Z \end{tikzcd}$$

Montrons que $u = 0$ ce qui conclura en utilisant la bilinéarité. Comme $0 \circ f = 0$, la propriété universelle du conoyau du morphisme f assure qu'il existe un unique morphisme $v\colon \operatorname{coker} f \longrightarrow Z$ tel que $0 = v \circ q$. Or le morphisme $v = u$ ou $v = 0$ convient. Donc l'unicité conclut $u = 0$. ◇

Exemple. La co-image et l'image ne coïncident pas toujours. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des espaces vectoriels filtrés, c'est-à-dire dont

- les objets sont des espaces vectoriels V munis d'une suite $F^\bullet \coloneqq (F^iV)_{i\in\mathrm{Z}}$, appelée une *filtration*, de sous-espaces vectoriels croissants tels que $\bigcup_{i\in\mathrm{Z}} F^iV = V$
- les morphismes entre deux objets $(V, F^\bullet)$ et $(W, F^\bullet)$ sont les applications linéaires $u\colon V \longrightarrow W$ telles que $u(F^iV) \subset F^iW$ pour $i \in \mathrm{Z}$.

Alors la catégorie $\mathscr{C}$ admet des noyaux et des conoyaux. En effet, le noyau et le conoyau d'un morphisme $u\colon (V, F^\bullet) \longrightarrow (W, F^\bullet)$ sont donnés par les égalités

$$\ker u = (\ker u, (\ker u \cap F^iV)_{i\in\mathrm{Z}}) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{coker} u = (\operatorname{coker} u, (F^iW/(F^iW \cap \operatorname{im} u))_{i\in\mathrm{Z}}).$$

Soient k un corps et V le k-espace vectoriel k. On considère les filtrations $F_1^\bullet$ et $F_2^\bullet$ sur l'espace F définie par les égalités

$$F_1^i \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant 0, \\ F & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F_2^i \coloneqq F_1^{i+1}.$$

Notons $u_0\colon (V, F_1^\bullet) \longrightarrow (V, F_2^\bullet)$ le morphisme identité Id. Alors $\operatorname{coim} u = (V, F_1^\bullet) \not\simeq (V, F_2^\bullet) = \operatorname{im} u$.

Définition 2.18. Une catégorie est *abélienne* si elle est additive et si tout morphisme $f\colon X \longrightarrow Y$ admet un noyau et un conoyau tels que le morphisme naturel $\operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ soit un isomorphisme.

Exemple. L'exemple typique est la catégorie **Ab** des groupes abéliens.

Lemme 2.19. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "v"] & Y' \end{tikzcd}$$

un carré commutatif. Alors il existe des uniques morphismes $\ker u \longrightarrow \ker v$ et $\operatorname{coker} u \longrightarrow \operatorname{coker} v$ tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \ker u \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \operatorname{coker} u \arrow[d] \\ \ker v \arrow[r] & Y \arrow[r, "v"] & Y' \arrow[r] & \operatorname{coker} v \end{tikzcd}$$

Démonstration. Notons les morphismes comme dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \ker u \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"] & \operatorname{coker} u \\ \ker v \arrow[r, "i'"] & Y \arrow[r, "v"] & Y' \arrow[r, "q'"] & \operatorname{coker} v \end{tikzcd}$$

Comme $v \circ f = f' \circ u$, on trouve $v \circ f \circ i = f' \circ u \circ i = 0$. Par la propriété universelle du noyau du morphisme v, il existe un unique morphisme $a\colon \ker u \longrightarrow \ker v$ tel que $f \circ i = i' \circ a$. De même, comme $q' \circ f' \circ u = q' \circ v \circ f = 0$, il existe un unique morphisme $a'\colon \operatorname{coker} u \longrightarrow \operatorname{coker} v$ tel que $q' \circ f' = a' \circ q$. On obtient finalement le diagramme souhaité. $\diamond$

Lemme 2.20. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne et $f\colon X \longrightarrow Y$ un morphisme. Alors c'est un isomorphisme si et seulement si $\ker f \simeq 0$ et $\operatorname{coker} f \simeq 0$.

Démonstration. On suppose d'abord que le morphisme f est un isomorphisme. Notons $i\colon \ker f \longrightarrow X$ le morphisme naturel. Comme $f \circ i = 0$, on trouve $0 = f^{-1} \circ f \circ i = \mathrm{Id}_X \circ i = i$, donc $\ker f \simeq 0$. De la même manière, on obtient $\operatorname{coker} f \simeq 0$ ce qui conclut le sens direct.

Réciproquement, on suppose que $\ker f \simeq 0$ et $\operatorname{coker} f \simeq 0$. Alors $\operatorname{coim} f \simeq Y$ et $\operatorname{im} f \simeq X$. Ainsi le morphisme $\operatorname{coim} f \longrightarrow \operatorname{im} f$ fournit alors un isomorphisme $Y \longrightarrow X$ qui est la réciproque du morphisme f. $\diamond$

Proposition 2.21. Soit X un espace topologique. Alors la catégorie $\mathbf{Psh}(X)$ des préfaisceaux est abélienne. De plus, soit $u\colon P \longrightarrow P'$ un morphisme de préfaisceaux. Alors il admet un noyau $\ker u$ et un conoyau $\operatorname{coker} u$ qui sont définis par les égalités

$$(\ker u)(U) = \ker(u(U)) \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{coker} u)(U) = \operatorname{coker}(u(U)).$$

Soit $x \in X$. Alors

$$(\ker u)_x = \ker(u_x) \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{coker} u)_x = \operatorname{coker}(u_x).$$

Démonstration. Le préfaisceau nul 0 défini par l'égalité $0(U) = 0$ est un objet initial et final. Montrons que la catégorie $\mathbf{Psh}(X)$ admet des produits. Soient P et P' deux préfaisceaux. On définit le préfaisceau $P \times P'$ définie par les égalités

$$(P \times P')(U) \coloneqq P(U) \times P'(U)$$

avec les morphismes de restrictions associés. Alors il s'agit bien d'un produit des préfaisceaux P et P'. En effet, pour $V \subset U$, les morphismes donnent des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} P(U) \times P'(U) \arrow[r] \arrow[d] & P(U) \arrow[d] \\ P(V) \times P'(V) \arrow[r] & P(V) \end{tikzcd}$$

ce qui fournit un morphisme $P \times P' \longrightarrow P$ et, de la même manière, un morphisme $P \times P' \longrightarrow P'$. On vérifie enfin que le préfaisceau $P \times P'$ vérifie la propriété universelle du produit. Ainsi il s'agit du produit des préfaisceaux P et P'. Ainsi les produits existent. On procède de même pour les coproduits. Enfin, on vérifie que les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Psh}(X)}(P, P')$ sont des groupes abéliens. Ainsi la catégorie $\mathbf{Psh}(X)$ est additive.

Passons à l'existence des noyaux. Soit $u \colon P \longrightarrow P'$ un morphisme de préfaisceaux. Pour chaque ouvert, on définit l'ensemble $K(U) := \ker(u(U))$. Alors le lemme 2.19 fournit des morphismes de restrictions ce qui fait de l'objet K un préfaisceau. Muni du morphisme $i \colon K \longrightarrow P$ donné par l'inclusion, on a bien $u \circ i = 0$. Enfin, montrons qu'il satisfait la propriété universelle du noyau. Soit $i \colon K' \longrightarrow P$ un morphisme tel que $u \circ i' = 0$. Pour chaque ouvert U, il existe un unique morphisme $K'(U) \longrightarrow K(U)$ factorisant le morphisme $i'(U)$ ce qui donne un morphisme de préfaisceaux $K \longrightarrow K'$ factorisant le morphisme i'. Ainsi l'objet K muni du morphisme i est un noyau du morphisme u. De même, on montre l'existence des conoyaux.

Soit $x \in X$. Vérifions que $(\ker u)_x = \ker(u_x)$. On a un morphisme $\alpha \colon (\ker u)_x \longrightarrow \ker(u_x)$ induit par l'inclusion. Il est injectif. Il reste à voir qu'il est surjectif. Soit $b \in \ker(u_x) \subset P_x$ un élément. Soit $t \in P(U)$ un élément représentant la classe b avec $x \in U \subset X$. Comme $u(U)(t)_x = 0$, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ du point x tel que $u(U)(t)|_V = 0$, donc $u(V)(t|_V) = 0$, donc $t|_V \in \ker(u(V)) = (\ker u)(V)$, donc $b \in (\ker u)_x$.

Finalement, montrons que la catégorie $\mathbf{Psh}(X)$ est abélienne. De la même manière, l'image et la coimage d'un morphisme u vérifient les égalités

$$(\mathrm{im}\, u)(U) = \mathrm{im}(u(U)) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{coim}\, u)(U) = \mathrm{coim}(u(U)).$$

Comme la catégorie $\mathbf{Ab}$ est abélienne, cela donne

$$(\mathrm{im}\, u)(U) = (\mathrm{coim}\, u)(U), \qquad \text{pour tout ouvert } U \subset X$$

ce qui fournit un isomorphisme $(\mathrm{coim}\, u)(U) \simeq (\mathrm{im}\, u)(U)$ pour tout ouvert $U \subset X$ et donc un isomorphisme $\mathrm{coim}\, u \simeq \mathrm{im}\, u$. ◇

Remarque. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie et $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ une sous-catégorie pleine, c'est-à-dire telle que les morphismes soient les mêmes. Soient $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ deux objets admettant un produit dans $\mathscr{C}$ tel que $X \times Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$. Alors ils admettent un produit dans $\mathscr{C}'$. De même, soit $u \colon X \longrightarrow Y$ un morphisme de $\mathscr{C}'$ admettant un noyau dans $\mathscr{C}$ tel que $\ker u \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$. Alors il admet un noyau dans $\mathscr{C}'$.

Proposition 2.22. La catégorie $\mathbf{Sh}(X)$ des faisceaux est abélienne. Soit $u \colon F \longrightarrow F'$ un morphisme de faisceaux. Notons $\overline{u}$ le même morphisme vu dans la catégorie des préfaisceaux. Alors

1. le noyau $\ker(\overline{u})$ est un faisceau et $\ker(u) = \ker(\overline{u})$;
2. on a $\mathrm{coker}(u) = \mathrm{coker}(\overline{u})^{\mathrm{a}}$;
3. pour tout point $x \in X$, on a $\ker(u)_x = \ker(u_x)$ et $\mathrm{coker}(u)_x = \mathrm{coker}(u_x)$.

Démonstration. Les points 1 et 3 découlent de la remarque précédente (on vérifie par ailleurs que le préfaisceau $\ker(\overline{u})$ est un faisceau). Il reste à montrer le point 2. On peut construire la diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "u"] & F' \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p'"'] & \mathrm{coker}(\overline{u}) \arrow[d, "\alpha"] \\ & & \mathrm{coker}(\overline{u})^{\mathrm{a}} \end{tikzcd}$$

On a $p' \circ u = \alpha \circ p \circ u = 0$. Rappelons que, pour tout faisceau G et tout préfaisceau P, on a

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Psh}(X)}(P, G) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(P^{\mathrm{a}}, G).$$

Soit $v\colon F' \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux vérifiant $v \circ u$. Il existe alors un unique morphisme de préfaisceaux $v\colon \operatorname{coker}(\overline{u}) \longrightarrow G$, puis un unique morphisme de faisceaux $w'\colon (\operatorname{coker}(\overline{u}))^{\mathrm{a}} \longrightarrow G$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u"] & F' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, "p'"] & \operatorname{coker}(\overline{u}) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, "w"'] \\
& G & \operatorname{coker}(\overline{u})^{\mathrm{a}} \arrow[l, "w'"]
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que le morphisme $\operatorname{im} u \longrightarrow \operatorname{coim} u$ est un morphisme de faisceaux. Il suffit de vérifier que c'est un isomorphisme sur chaque germe (voir exercice 3). Mais avec le point 3, cela conclut. ◇

Exemple. Montrons que les conoyaux pour les faisceaux et les préfaisceaux d'un morphisme de faisceaux ne sont pas toujours égaux. On prend $X = \mathbf{C}$. Soit $\mathscr{O}_{\mathbf{C}}$ le faisceau (de groupes abéliens additifs) des fonctions holomorphes. Considérons le faisceau $\mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times}$ le faisceau (de groupes abéliens multiplicatifs) des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas. Alors la fonction exponentielle fournit un morphisme de faisceaux

$$\exp\colon \mathscr{O}_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times}.$$

Pour chaque ouvert $U \subset X$, on a

$$\begin{aligned}
\ker(\exp)(U) = \ker(\exp(U)) &= \{f\colon U \longrightarrow 2i\pi\mathrm{Z} \mid \text{la fonction } f \text{ est holomorphe}\} \\
&= \{f\colon U \longrightarrow 2i\pi\mathrm{Z} \mid \text{la fonction } f \text{ est localement constante}\} \\
&\simeq \mathrm{Z}_{\mathbf{C}}(U).
\end{aligned}$$

On obtient alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\times 2i\pi} \mathscr{O}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times}$$

Soit $x \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. Alors la fonction exponentielle induit une surjection

$$\exp_x\colon (\mathscr{O}_{\mathbf{C}})_x \longrightarrow (\mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times})_x,$$

donc $\operatorname{coker}(\exp_x) = 0$. D'où $\operatorname{coker}(\exp) = 0$ (voir la remarque suivante). Finalement, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\times 2i\pi} \mathscr{O}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times} \longrightarrow 0$$

En particulier, on peut écrire

$$\mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times} = \operatorname{coker}(\mathrm{Z}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\times 2i\pi} \mathscr{O}_{\mathbf{C}}) \qquad \text{dans la catégorie } \mathbf{Sh}(\mathbf{C}).$$

Mais dans la catégorie $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$, le conoyau de l'exponentielle n'est pas nul. Pour montrer cela, il suffit de trouver un ouvert U tel que

$$\mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times}(U)/\exp(\mathscr{O}_{\mathbf{C}}(U)) \neq 0.$$

On prend $U = \mathbf{C}^*$ et $f\colon z \longmapsto z$. Alors $f \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}}^{\times}(U)$, mais la fonction f n'admet pas du logarithme sur l'ouvert $\mathbf{C}^*$.

Remarque. En général, on peut trouver des faisceaux distincts F et F' tels que

$$\forall x \in X, \qquad F_x \simeq F'_x.$$

Mais si $F_x \simeq 0$ pour tout point $x \in X$, alors $F = 0$.

Chapitre 3
Catégorie des complexes

Définition 3.1. Un *complexe* dans une catégorie abélienne $\mathscr{C}$ est une suite $(X^i, d^i_X)_{i\in \mathrm{Z}}$ d'objets X_i et de morphisme $d^i_X \colon X^i \longrightarrow X^{i+1}$ tels que

$$d^{i+1}_X \circ d^i_X = 0, \qquad i \in \mathrm{Z}.$$

Dans la suite, un complexe $(X^i, d^i_X)_{i\in\mathrm{Z}}$ sera noté sous la forme $(X^\bullet, d^\bullet_X)$. Les entiers i seront appelés les *degrés*.

Définition 3.2. Un *morphisme* entre deux complexes $(Y^\bullet, d^\bullet_X)$ et $(Y^\bullet, d^\bullet_Y)$ est la donnée de morphisme $f^i \colon X^i \longrightarrow Y^i$ avec $i \in \mathrm{Z}$ tels que

$$f^{i+1} \circ d^i_X = d^i_Y \circ f_i, \qquad i \in \mathrm{Z}.$$

En général, on ne notera plus les exposants et les indices. Ainsi l'égalité précédente se réécrira sous la forme $f \circ d = d \circ f$. De la même manière, la notation $X^\bullet$ désignera alors un complexe et la notation $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ un morphisme de complexes.

Proposition 3.3. Les complexes sur une catégorie abélienne $\mathscr{C}$ munis de leurs morphismes forment une catégorie, notée $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$.

On rappel le lemme 2.19. Soit $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ un morphisme de complexes. Ce dernier assure alors l'existence de morphismes $d'^i \colon \ker f^i \longrightarrow \ker f^{i+1}$. Par unicité, ces derniers vérifient

$$d'^{i+1} \circ d'^i = 0.$$

On obtient alors un complexe $(\ker f^i, d'^i)_{i\in I}$. On peut vérifier qu'il s'agit d'un noyau du morphisme f dans la catégorie $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$. De même, la catégorie $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$ admet des conoyaux. Enfin, par un raisonnement identique, on a des résultats similaires pour l'image et la coimage, puis on vérifie que la catégorie $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$ est abélienne grâce à la remarque suivante.

Remarque. Un morphisme $f^\bullet \colon X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ est un isomorphisme si et seulement si chacun des morphismes $f^i \colon X^i \longrightarrow Y^i$ avec $i \in \mathrm{Z}$ est un isomorphisme.

Théorème 3.4. Pour une catégorie abélienne $\mathscr{C}$, la catégorie $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$ est abélienne.

On définit maintenant la notion de cohomologie d'un complexe.

Définition 3.5. Soit $(X^i, d^i)_{i\in\mathrm{Z}}$ un complexe. Alors pour chaque degré $i \in \mathbf{N}^*$, comme $d^i \circ d^{i-1} = 0$, il existe un unique morphisme $e \colon X^{i-1} \longrightarrow \ker d^i$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
X^{i-1} \arrow[r] \arrow[dr] & X^i \arrow[r] & X^{i+1} \\
& \ker d^i, \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

puis il existe un unique morphisme $e' \colon \operatorname{im} e \longrightarrow \ker d^i$ tel que tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} X^{i-1} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "e"] & \operatorname{im} e \arrow[r, "e'"] & \ker d^i \end{tikzcd}$$

On pose alors

$$\mathrm{H}^i(X) \coloneqq \operatorname{coker} e'.$$

On peut alors résumer la situation dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} X^{i-1} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr] & & X^i \arrow[r] & X^{i+1} \\ \operatorname{im} e = \operatorname{im} d^{i-1} \arrow[rr] & & \ker d^i \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{H}^i(X), \end{tikzcd}$$

Notation. Pour un monomorphisme $i\colon A \longrightarrow B$, on note B/A le conoyau $\operatorname{coker} i$. Pour chaque degré $i \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$\mathrm{Z}^i(X) \coloneqq \ker d^i,$$
$$\mathrm{B}^i(X) \coloneqq \operatorname{im} d^{i-1}$$

de sorte que $\mathrm{H}^i(X) = \mathrm{Z}^i(X)/\mathrm{B}^i(X)$.

Lemme 3.6. Soit

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "j"] & C \end{tikzcd}$$

une suite exacte dans la catégorie $\mathscr{C}$. Soit $f\colon A' \longrightarrow A$ un morphisme, c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "i \circ f"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "j"] & C. \end{tikzcd}$$

Alors il existe une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker}(i \circ f) \arrow[r] & C. \end{tikzcd}$$

Le lemme est un cas particulier du lemme du serpent, mais on peut en donner une preuve directe.

Démonstration. Comme $j \circ i \circ f = 0 \circ f = 0$, il existe un unique morphisme $j'\colon \operatorname{coker}(i \circ f) \longrightarrow C$ qui fasse commuter le diagramme suivant. De la même manière, il existe un unique morphisme $i\colon \operatorname{coker}(f) \longrightarrow \operatorname{coker}(i \circ f)$ qui fasse commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[d, "i \circ f"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q"] & C \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[r, "i'"] & \operatorname{coker}(i \circ f) \arrow[r, "j'"] & C \end{tikzcd}$$

Il reste à vérifier que $\ker j' = \operatorname{coker} f'$. Montrons que $j' \circ i' = 0$. Comme le morphisme p est un épimorphisme, il suffit de vérifier que $j' \circ i' \circ p = 0$. Mais

$$\begin{aligned} j' \circ i' \circ p &= j' \circ q \circ i \\ &= j' \circ q \circ i \end{aligned}$$

$$= j \circ i = 0.$$

Concluons dans le cas des groupes abéliens. Soit $x \in \operatorname{coker}(i \circ f)$ un élément tel que $j'(x) = 0$. Il existe un élément $\tilde{x} \in B$ tel que $g(\tilde{x}) = x$. Alors $j'(x) = j(\tilde{x})$, donc $j(\tilde{x}) = 0$, donc $\tilde{x} \in \ker j = A$. Ainsi $x = i(p(\tilde{x}))$, donc $x \in \operatorname{coker} f$. Ainsi le morphisme i' est surjectif. Montrons qu'il est injectif. Soit $y \in \operatorname{coker} f$ un élément tel que $i'(y) = 0$. Soit $\tilde{y} \in A$ un élément tel que $p(\tilde{y}) = y$. Alors $q \circ i(\tilde{y}) = i' \circ p(\tilde{y}) = i'(y) = 0$, donc $i(\tilde{y}) \in A'$, donc $\tilde{y} \in A'$ car le morphisme i est injective, donc $p(\tilde{y}) = 0$ dans $\in \operatorname{coker} f$, donc $y = 0$. ◇

On veut maintenant conclure la preuve dans le cas général. Pour cela, on introduit la notion de produit fibré.

Définition 3.7. Soit $u \colon A \longrightarrow B$ et $f \colon B' \longrightarrow B$ deux morphismes d'une catégorie abélienne $\mathscr{C}$. On définit

$$A \times_B B' := \ker(u \times (-f) \colon A \oplus B' \longrightarrow B).$$

Ce noyau vient avec deux morphismes $f' \colon A \times_B B' \longrightarrow A$ et $u' \colon A \times_B B' \longrightarrow B'$ qui font commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
A \times_B B' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[d, "f'"] \\
A \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}$$

De plus, l'objet $A \times_B B'$ est universel pour cette propriété : pour tout objet (C, f'', u'') vérifiant cette propriété, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rrd, bend left] \arrow[rdd, bend right] \arrow[rd, dotted] & & \\
& A \times_B B' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\
& A \arrow[r] & B.
\end{tikzcd}$$

Remarque. Lorsque $\mathscr{C} = \mathbf{Ab}$, on a $A \times_B B' = \{(x, y) \in A \times B' \mid u(x) = f(y)\}$.

Lemme 3.8. Avec les mêmes notations, on a $\ker u' = \ker u$. Si $\operatorname{coker} u = 0$, alors $\operatorname{coker} u' = 0$.

Lemme 3.9. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne et $X^\bullet$ un complexe. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \operatorname{coker} d_X^{i-1} \longrightarrow \mathrm{Z}^{i+1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(X) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Par définition, on a une suite exacte

$$X^i \xrightarrow{(d_X^i)'} \mathrm{Z}^{i+1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(X) \longrightarrow 0.$$

En effet, le morphisme $(d_X^i)'$ est induit par d_X^i et on a $\operatorname{im}(d_X^i)' \simeq \mathrm{B}^{i+1}(X)$. Maintenant, en notant le noyau $j^{i+1} \colon \mathrm{Z}^{i+1}(X) \longrightarrow X^{i+1}$, le morphisme $(d_X^i)'$ vérifie

$$j^{i+1} \circ (d_X^i)' \circ d_X^{i-1} = d_X^i \circ d_X^{i-1} = 0,$$

donc $(d_X^i)' \circ d_X^{i-1} = 0$, donc le morphisme $(d_X^i)'$ se factorise par $\operatorname{coker} d_X^{i-1}$. D'où une suite exacte

$$\operatorname{coker} d_X^{i-1} \longrightarrow \mathrm{Z}^{i+1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(X) \longrightarrow 0.$$

On obtient alors l'exactitude de la seconde partie de la suite.

Pour la première partie, on a aussi une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}^i(X) \longrightarrow X^i \xrightarrow{(d_X^i)'} \mathrm{Z}^{i+1}(X) \xrightarrow{j^{i+1}} X^{i+1}.$$

Comme le morphisme j^{i+1} est un monomorphisme, on peut vérifier que

$$\ker(d_X^i)' = \ker(j^{i+1}) = \ker(d_X^{i+1}) = \mathrm{Z}^i(X).$$

Mais $\mathrm{H}^i(X) = \operatorname{coker}(\mathrm{B}^i(X) \longrightarrow \mathrm{Z}^i(X)) = \operatorname{coker}(X^{i-1} \longrightarrow \mathrm{Z}^i(X))$, donc on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X^{i-1} \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Z}^i(X) \arrow[r] & X^i \arrow[r, "(d_X^i)'"] & \mathrm{Z}^{i+1}(X) \arrow[r, "j^{i+1}"] & X^{i+1}.
\end{tikzcd}$$

Avec le lemme 3.6, on obtient alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \operatorname{coker} d_X^{i-1} \longrightarrow \mathrm{Z}^{i+1}(X).$$

Ceci conclut. ◇

Lemme 3.10. Soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' &
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Alors il existe une suite exacte

$$\ker u \longrightarrow \ker v \longrightarrow \ker w \longrightarrow \operatorname{coker} u \longrightarrow \operatorname{coker} v \longrightarrow \operatorname{coker} w$$

Démonstration. On verra la preuve plus tard. ◇

Proposition 3.11. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne et

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans la catégorie $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$. Alors il existe une suite exacte

$$\mathrm{H}^i(X) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(f)} \mathrm{H}^i(Y) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(g)} \mathrm{H}^i(Z) \xrightarrow{\delta^i} \mathrm{H}^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \operatorname{coker} d_X^{i-1} \longrightarrow \mathrm{Z}^{i+1}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(X) \longrightarrow 0.$$

Le lemme précédent appliqué à la suite

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^{i+1} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X^{i+2} \arrow[r] & Y^{i+2} \arrow[r] & Z^{i+2}
\end{tikzcd}$$

donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}^{i+1}(X) \longrightarrow \mathrm{Z}^{i+1}(Y) \longrightarrow \mathrm{Z}^{i+1}(Z).$$

Sa version duale donne la suite exacte

$$\operatorname{coker} d_X^{i-1} \longrightarrow \operatorname{coker} d_Y^{i-1} \longrightarrow \operatorname{coker} d_Z^{i-1} \longrightarrow 0.$$

Le lemme de serpent nous fournit alors des suites exactes qui permet d'obtenir la suite exacte souhaitait. $\diamond$

Chapitre 4
Foncteurs et homologies

4.1. Foncteurs

Définition 4.1. Un *foncteur* entre deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est la donnée

– d'une application $F\colon \operatorname{Ob}(\mathscr{C}) \longrightarrow \operatorname{Ob}(\mathscr{C}')$;

– pour chaque objet $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$, une application $F\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X),F(Y))$

qui vérifie

$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)} \qquad \text{et} \qquad F(f\circ g) = F(f)\circ F(g).$$

On le note $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$.

Deux foncteurs se composent naturellement. On dit que les foncteurs sont covariants. Notons $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée à la catégorie $\mathscr{C}$ où l'on renverse le sens des flèches. Un *foncteur contravariant* est une foncteur $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathscr{C}'$.

Exemple. Soit X un espace topologique. On note $\mathbf{Ouv}(X)$ la catégorie de ses ouverts, c'est-à-dire où les objets sont les ouverts et les morphismes sont les inclusions. Un préfaisceau sur l'espace X est alors un foncteur $P\colon \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

Définition 4.2. Un morphisme ou un *transformation naturelle* entre deux foncteurs $F, G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est la donnée, pour chaque objet $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$, d'un morphisme $\theta(X)\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ tel que, pour tout morphisme $u\colon X \longrightarrow Y$ dans $\mathscr{C}$, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "\theta(X)"'] & F(Y) \arrow[d, "\theta(Y)"] \\ G(X) \arrow[r, "G(u)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Définition 4.3. Deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont *équivalentes* s'il existe des foncteurs $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ et $G\colon \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$ et des isomorphismes de foncteurs

$$G\circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \qquad \text{et} \qquad F\circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathscr{C}'}\,.$$

Exemple. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des espaces vectoriels réels de dimension finie et $\mathscr{C}'$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les espaces $\mathbf{R}^n$ avec $n \in \mathbf{N}$. Alors ces deux catégories sont équivalentes. En effet, on considère le foncteur d'inclusion $i\colon \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}$. Pour construire un foncteur dans l'autre sens, on choisit une base pour chaque espace vectoriel V de telle sorte qu'on obtient un isomorphisme $\varphi_V : V \longrightarrow \mathbf{R}^{\dim V}$. On définit le foncteur $j : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ tel que

$$j(V) \coloneqq \mathbf{R}^{\dim V} \qquad \text{et} \qquad j(u : V \longrightarrow V') \coloneqq \varphi_{V'} \circ u \circ \varphi_V^{-1}.$$

Alors les foncteurs i et j sont inverses à isomorphisme près.

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories additives. Un foncteur $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est *additif* si

$$F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y), \qquad X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$$

et les applications $F\colon \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ sont des morphismes de groupes. Si les catégories sont abéliennes, il est *exact à gauche* si, pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z,$$

la suite

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z)$$

est encore exacte. De même, on définit la notion d'exactitude à droite. Il est exact s'il l'est à droite et à gauche.

Exemples. – Soit $U \subset X$ un ouvert. On obtient une foncteur $\Gamma(U, -) : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}$ qui à chaque préfaisceau F associe le groupe abélien $F(U)$. Alors il est exact à gauche, mais pas à droite.

– Soient $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne et M un objet. On obtient deux foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, -) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, M) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

qui sont exacte à gauche.

Définition 4.4. Un fonction $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est *pleinement fidèle* si, pour tous objets X et Y de $\mathscr{C}$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X), F(Y))$$

est une bijection. Il est *essentiellement surjectif* si, pour tout objet Y de $\mathscr{C}'$, il existe un objet X de $\mathscr{C}$ tel que $F(x) \simeq Y$.

Lemme 4.5. Un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

4.2. Objectifs projectif, injectif, foncteurs dérivés

Définition 4.6. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne. Un objet P est *projectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, -)$ est exact, c'est-à-dire si, pour tout épimorphisme $u : X \longrightarrow Y$ et tout morphisme $f : P \longrightarrow Y$, il existe un morphisme $\tilde{f} : P \longrightarrow X$ tel que $f = u \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "u"] & Y \\ & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "\tilde{f}"] \end{tikzcd}$$

Un objet I est *injectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, I)$ est exact, c'est-à-dire si, pour tout monomorphisme $i : X \longrightarrow Y$ et tout morphisme $f : X \longrightarrow I$, il existe un morphisme $\tilde{f} : Y \longrightarrow I$ tel que $f = \tilde{f} \circ i$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Définition 4.7. Une catégorie abélienne $\mathscr{C}$ a *assez de projectifs* si, pour tout objet X, il existe un épimorphisme $P \longrightarrow X$ avec P projectif. Elle a *assez d'injectifs* si, pour tout objet X, il existe un monomorphisme $X \longrightarrow I$ avec I injectif.

Lemme 4.8. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne ayant assez de projectifs. Soit M un objet. Alors il admet une *résolution projective*, c'est-à-dire une suite exacte infinie

$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où les objets P^i sont projectifs.

Démonstration. On construit cette suite par récurrence. Comme la catégorie $\mathscr{C}$ a assez de projectifs, il existe un épimorphisme $\varepsilon \colon P^0 \longrightarrow M$ pour un objet projectif P^0. Pour la même raison, il existe un épimorphisme $e^{-1} \colon P^{-1} \longrightarrow \ker \varepsilon$ pour un objet projectif P^{-1}. On considère alors le morphisme d^{-1} comme la composé des morphismes e^{-1} et $\ker \varepsilon \longrightarrow P^0$. Par définition de l'image, on a $\operatorname{im} d^{-1} = \ker \varepsilon$. On obtient alors une suite exacte

$$P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et on continue la construction. ◇

Théorème 4.9. Soit $F \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un foncteur exact à droite entre deux catégories abéliennes. Soit $M \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ un objet admettant une résolution projective

$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Alors pour tout entier $i \in \mathbf{N}$, on pose

$$\mathrm{L}^i F(M) \coloneqq \mathrm{H}^{-i}(\cdots \longrightarrow F(P^{-1}) \longrightarrow F(P^0) \longrightarrow 0)$$

et cet objet est indépendant de la résolution projective choisie. De plus, si la catégorie $\mathscr{C}$ a assez de projectifs, alors cette définition donne un foncteur $\mathrm{L}^k F \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$.

Exercices

Exercice 5. Soient $f \colon A \longrightarrow B$ et $g \colon B \longrightarrow C$ deux morphismes d'une catégorie abélienne. Montrons qu'il existe un unique morphisme $f' \colon \operatorname{im}(g \circ f) \longrightarrow \operatorname{im} g$ qui fasse commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{im}(g \circ f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f'"'] & C \\
B \arrow[r] & \operatorname{im} g \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Montrer que le morphisme f' est un monomorphisme et que, si le morphisme f est un épimorphisme, alors le morphisme f' est un isomorphisme.

Solution On note

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "f"'] & \operatorname{im}(g \circ f) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & C \arrow[r, "q''"] & \operatorname{coker} g \\
B \arrow[r, "q"] & \operatorname{im} g \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a $q'' \circ i' \circ q' = q'' \circ g \circ f = 0 \circ f = 0$. Comme q' est un épimorphisme, on trouve $q'' \circ i' = 0$, donc il existe un morphisme $f' \colon \operatorname{im}(g \circ f) \longrightarrow \operatorname{im} g$ tel que $i' = i \circ f'$.

Montrons que le carré commute. On a $i \circ f' \circ q' = i' \circ q' = g \circ f = i \circ q \circ f$. Comme i est un mono, on obtient $f' \circ q' = q \circ f$.

Montrons que le morphisme f' est un monomorphisme. C'est un propriété générale : si $i = k \circ j$ et i est un mono, alors j est un mono.

On suppose que le morphisme f est un épi. Alors de même le morphisme f' est un épimorphisme (c'est la même propriété général qu'avant mais en la dualisant) et donc un isomorphisme puisqu'on est dans une catégorie abélienne.

Exercice 6. Soit $\mathbf{Vect}(k)$ la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k dont les morphismes sont les applications linéaires. Notons $\mathscr{C} := \mathrm{Mor}(\mathbf{Vect}(k))$ la catégorie de ses morphismes.

1. Montrer que tout objet de $\mathbf{Vect}(k)$ est injectif et projectif.
2. On admet que la catégorie $\mathscr{C}$ est abélienne. On considère le foncteur $\operatorname{coker}\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Vect}(k)$. Montrer qu'il est exact à droite.
3. Montrons que les objets Id_X et $0 \longrightarrow X$ sont projectifs.
4. Calculer les foncteurs $\mathrm{L}^i\mathrm{coker}$.

Solution 1. Soit E un k-espace vectoriel. Montrons qu'il est injectif. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un monomorphisme et $g\colon X \longrightarrow E$ un morphisme. On souhaite montrer qu'il existe un morphisme $f'\colon Y \longrightarrow E$ tel que $g = f' \circ f$. Comme le morphisme f est un monomorphisme, son noyau est nul, donc il est injectif. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre dans Y. Alors tout morphisme $f'\colon Y \longrightarrow E$ qui envoie chaque vecteur $f(e_i)$ sur le vecteur $g(e_i)$ convient.

Montrons qu'il E est projectif. Soit $i\colon X \longrightarrow Y$ un épimorphisme et $p\colon E \longrightarrow Y$ un morphisme. On choisit une base B de E. Pour chaque élément $e_b \in B$, comme le morphisme i est surjectif, il existe un vecteur $x_b \in X$ tel que $i(x_b) = f(e_b)$. On définit le morphisme $f'\colon P \longrightarrow X$ qui envoie chaque vecteur e_b sur le vecteur x_b. Il vérifie $i = f \circ f'$.

2. Soit

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans la catégorie $\mathscr{C}$ dont les lignes sont exactes. On veut montrer que la suite

$$\operatorname{coker} u \xrightarrow{f''} \operatorname{coker} v \xrightarrow{g''} \operatorname{coker} w \longrightarrow 0$$

est exacte.

4.3. Démonstration du théorème d'existence des foncteur dérivés

Pour montrer ce théorème, on introduit la notion d'homotopie.

Définition 4.10. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive. Soient P et Q deux complexes de cette catégorie. Deux morphismes $f, g\colon P \longrightarrow Q$ sont *homotope* s'il existe des morphismes $s^i\colon P^i \longrightarrow Q^{i-1}$ avec $i > 0$ tels que

$$\forall i > 0, \qquad f_i - g_i = d_Q^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d_P^i.$$

On vérifie que l'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes $P \longrightarrow Q$ qui est compatible à la composition. On la note $\sim_{\mathrm{h}}$.

Définition 4.11. On note $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ la catégorie avec les mêmes objets que la catégorie $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$ où les morphismes sont les morphismes de complexes modulo la relation d'homotopie.

La catégorie $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ est additive où le neutre est induit par le neutre dans $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$.

Proposition 4.12. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne. Soit M un objet admettant une résolution projective

$$\cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire $\mathrm{H}^i(P) = 0$ si $i \neq 0$ et $\mathrm{H}^0(P) \simeq M$. Soit $N \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ un objet admettant une résolution à gauche

$$\cdots \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \xrightarrow{\eta} N \longrightarrow 0.$$

Soit $f'\colon M \longrightarrow N$ un morphisme. Alors il existe des morphismes $f^i\colon P^i \longrightarrow X^i$ qui forment un morphisme de complexes, compatible avec ε et η. De plus, le morphisme $f\colon P \longrightarrow X$ est unique à homotopie près.

Démonstration. On procède encore par récurrence. Comme le morphisme η est un épimorphisme et l'objet P^0 est projectif, le morphisme $f'\circ\varepsilon\colon P^0 \longrightarrow N$ se factorise par un morphisme $f^0\colon P^0 \longrightarrow X^0$. Ensuite, vérifions que le morphisme $f^0 \circ d_P^{-1}$ se factorise par le morphisme $\operatorname{im} d_X^{-1} \hookrightarrow X^0$. En effet, l'exactitude du complexe X donne $\operatorname{im} d_X^{-1} = \ker \varepsilon$ et

$$\eta \circ (f^0 \circ d_P^{-1}) = (\eta \circ f^0) \circ d_P^{-1} = f' \circ \varepsilon \circ d_P^{-1} = 0,$$

donc on obtient une factorisation de $f^0 \circ d_P^{-1}$ par $\ker \eta$. Mais comme $X^{-1} \longrightarrow \operatorname{im} d_X^{-1}$ est un épimorphisme et P^{-1} est projectif, le morphisme $g^{-1}\colon P^{-1} \longrightarrow \operatorname{im} d_X^{-1}$ se factorise par $f^{-1}\colon P^{-1} \longrightarrow X^{-1}$.

Passons à l'unicité à homotopie près. Soient $f, g\colon P \longrightarrow X$ deux morphismes de complexes. Soit $h^i := f^i - g^i$. D'abord, on a $\eta \circ h^0 = 0 \circ \varepsilon = 0$, donc h^0 se factorise par $\ker \eta = \operatorname{im} d_X^{-1}$. Mais comme P^0 est projectif et qu'on a un épimorphisme $X^{-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d_X^{-1}$, il existe un morphisme $s^0\colon P^0 \longrightarrow X^{-1}$ tel que $h^0 = d_X^{-1} \circ s^0$.

Par ailleurs, soit $h' := h^{-1} - s_0 \circ d_P^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} d_X^{-1} \circ h' &= d_X^{-1} \circ h^{-1} - d_X^{-1} \circ s^0 \circ d_P^{-1} \\ &= h^0 \circ d_X^{-1} - h^0 \circ d_P^{-1} = 0, \end{aligned}$$

donc h' se factorise par $\ker d_X^{-1} = \operatorname{im} d_X^{-2}$. Comme P^{-1} est projectif, on peut trouver $s^{-1}\colon P^{-1} \longrightarrow X^{-2}$ tel que $h' = d_X^{-1} \circ s^{-1}$. On continue ainsi. ◇

Remarque. Dans la proposition, on peut enlever l'hypothèse que $\mathrm{H}^i(P) = 0$ pour $i \neq 0$.

Corollaire 4.13. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne. Soit M un objet. Soient P et Q deux résolutions projectives. Alors elles sont isomorphes dans la catégorie $\mathrm{K}(\mathscr{C})$, c'est-à-dire qu'il existe deux morphismes $f\colon P \longrightarrow Q$ et $g\colon Q \longrightarrow P$ tel que $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Q$ et $g \circ f \sim \mathrm{Id}_P$.

Démonstration. On applique le proposition aux chaînes P et Q avec le morphisme $f' = \mathrm{Id}_M$: on obtient un morphisme $f\colon P \longrightarrow Q$. De même, on obtient un morphisme $g\colon Q \longrightarrow P$. En composant, on obtient un morphisme $g \circ f\colon P \longrightarrow P$ qui relève aussi l'identité. Or l'identité $\mathrm{Id}_P^\bullet$ relève aussi. Avec l'unicité de la proposition, on obtient $g \circ f \sim \mathrm{Id}_P$. ◇

Notation. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne ayant assez de projectifs. On note $\mathrm{K}_{\mathrm{rp}}(\mathscr{C})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ dont les objets sont les complexes $P^\bullet$ tels que

- $P^i = 0$ pour $i > 0$;
- les objets P^i avec $i \leqslant 0$ sont projectifs ;
- $\mathrm{H}^i(P) = 0$ pour $i < 0$.

On a un foncteur $\mathrm{H}^0\colon \mathrm{K}_{\mathrm{rp}}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}$ dont l'existence est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 4.14. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un morphisme de complexes. On suppose que $f \sim 0$. Alors le morphisme $\mathrm{H}^i(f)\colon \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(Y)$ est nul pour tout i.

Démonstration. On suppose $\mathscr{C} = \mathbf{Ab}$. Soit $a \in \mathrm{H}^i(X)$ une classe représentée par un cycle $\tilde{a} \in \mathrm{Z}^i(X)$. Alors la classe $\mathrm{H}^i(f)(a)$ est représentée par l'image $f^i(\tilde{a}) = (s^{i+1} \circ d_X^i + d_Y^{i-1} \circ s^i)(\tilde{a}) = d_Y^{i-1}(s^i(\tilde{a}))$ qui est un cobord, donc $\mathrm{H}^i(f)(a) = 0$ dans $\mathrm{H}^i(Y)$. ◇

Avec les résultats précédents, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 4.15. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne ayant assez de projectifs. Alors le foncteur défini précédemment $\mathrm{H}^0\colon \mathrm{K}_{\mathrm{rp}}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}$ est une équivalence de catégories.

En particulier, ce foncteur admet des inverses $\mathrm{res}\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{K}_{\mathrm{rp}}(\mathscr{C})$.

Remarque. Soient $F\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ une équivalence de catégories. Soient $G_1, G_2\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ deux inverses. On note $\varphi_i\colon F \circ G_i \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$ des morphismes de foncteurs. Alors il existe un unique isomorphisme de foncteurs $\varphi\colon G_1 \longrightarrow G_2$ tel que la composée $F \circ \varphi\colon F \circ G_1 \longrightarrow F \circ G_2$ soit égal au morphisme $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$. Pour le voir, on utilise le fait que le fonction F est pleinement fidèle : l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(G_1(X), G_2(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F \circ G_1(X), F \circ G_2(X))$$

est une bijection.

Par cette remarque, deux choix d'inverses res_1 et res_2 du foncteur H^0 sont canoniquement isomorphes dès qu'on se donne deux isomorphismes de foncteurs $\varepsilon_i\colon \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{res}_1 \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$.

Pour un objet X, se donner une résolution $\cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ et un isomorphisme $\mathrm{H}^0(P^\bullet) \longrightarrow X$ revient à se donner un morphisme $\varepsilon\colon P^0 \longrightarrow X$ telle que la suite $\cdots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ soit exacte.

Définition 4.16. Soit $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un foncteur exacte à droite entre deux catégories abéliennes où la catégorie $\mathscr{C}$ a assez de projectifs. On définit le foncteur $\mathrm{L}^i F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ par l'égalité

$$\mathrm{L}^i F(X) \coloneqq \mathrm{H}^{-i}(\mathrm{K}(F)(\mathrm{res}(X)))$$

où le foncteur $\mathrm{K}(F)\colon \mathrm{K}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathscr{C}')$ induit par le foncteur

$$\mathrm{Comp}(F)\colon \left|\begin{array}{l} \mathrm{Comp}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Comp}(\mathscr{C}'), \\ \quad (X^\bullet, d^\bullet) \longmapsto (F(X^\bullet), F(d^\bullet)). \end{array}\right.$$

Lemme 4.17. Si le foncteur F est exact à droite, alors $\mathrm{L}^0 F \simeq F$.

Démonstration. Soit X un objet. On choisit une résolution projection

$$P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur F, on obtient un complexe

$$F(P^{-2}) \longrightarrow F(P^{-1}) \longrightarrow F(P^0) \longrightarrow F(X) \longrightarrow 0$$

qui est exacte. En particulier, on obtient $\operatorname{coker} F(d^{-1}) = F(X)$ ce qui donne $\mathrm{L}^0 F(X) \simeq F(X)$. ⋄

Théorème 4.18. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne ayant assez de projectifs. Soit $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ une suite exacte à droite. Soit $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathscr{C}$. Alors la suite longue

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{L}^1 F(X) \longrightarrow \mathrm{L}^1 F(Y) \longrightarrow \mathrm{L}^1 F(Z) \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Proposition 4.19. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne ayant assez de projectifs. Soit $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathscr{C}$. Soit $P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ et $R^{-2} \longrightarrow R^{-1} \longrightarrow R^0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ une résolution projective. On définit

$$Q^i \coloneqq P^i \oplus R^i.$$

Alors on peut trouver des morphismes faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P^{-1} \oplus R^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \oplus R^0 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
R^{-1} \arrow[r] & R^0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme l'objet R^0 est projectif et le morphisme g est un épimorphisme, il existe un morphisme $\tilde{\eta}\colon R^{0\text{‘}} \longrightarrow Y$ tel que $g \circ \tilde{\eta} = \eta$. On définit

$$\delta \coloneqq (f \circ \varepsilon, \tilde{\eta})\colon P^0 \oplus R^0 \longrightarrow Y.$$

Les deux carrés de droite commutent. De plus, le lemme du serpent donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \varepsilon \longrightarrow \ker \delta \longrightarrow \ker \eta \longrightarrow 0$$

et on a une diagramme

$$\begin{tikzcd}
P^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker\varepsilon \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P^{-2}\oplus R^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & P^{-1}\oplus R^{-1} \arrow[d] & \ker\delta \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
R^{-2} \arrow[r] & R^{-1} \arrow[r] & \ker\eta \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Mais on se retrouve dans la même situation et on peut construire la flèche manquante : on en déduit un morphisme $\eta^{-1}\colon Q^{-1} \longrightarrow \ker\delta$ qui fait commuter le diagramme précédent. On définit alors le morphisme $d_Q^{-1}\colon Q^{-1} \longrightarrow Q^0$ comme la composée

$$Q^{-1} \longrightarrow \ker\delta \longrightarrow Q^0.$$

Ceci conclut la commutativité des deux carrés de gauche. ◇

Démonstration du théorème. On choisit une résolution projective P de X et une résolution projective R de X. Par la proposition, on a un diagramme de résolutions.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\cdots & P^{-1}\oplus R^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^{0}\oplus R^{0} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\cdots & R^{-1} \arrow[r] & R^{0} \arrow[r] & Z.
\end{tikzcd}$$

En lui appliquant le foncteur F, on obtient le diagramme de complexe

$$\begin{tikzcd}
\cdots & F(P^{-1}) \arrow[r] \arrow[d] & F(P^{0}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots & F(P^{-1})\oplus F(R^{-1}) \arrow[r] \arrow[d] & F(P^{0})\oplus F(R^{0}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots & F(R^{-1}) \arrow[r] & F(R^{0}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Verticalement, on a des suites exactes courtes du type

$$0 \longrightarrow P' \longrightarrow P'\oplus R' \longrightarrow R' \longrightarrow 0.$$

On conclut le théorème qui énonce qu'une suite courte de complexes donne une suite longue de cohomologie. ◇

Exemple. On considère un groupe G et la catégorie G-**Mod** des G-modules. Rappelons qu'un G-module est la donnée d'un groupe abélien A et d'un morphisme $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$. Considérons le foncteur

$$\mathrm{Coinv}\colon G\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

qui envoie un G-module A sur le plus grand quotient A_G de A tel que l'action de G soit triviale, c'est-à-dire

$$A_G \coloneqq A/\langle x - g\cdot x : x\in A, g\in G\rangle.$$

Ce foncteur est exact à droite.

Remarque. Si un objet I est injectif, alors $\mathrm{R}^i F(I) = 0$ pour $i > 0$.

4.4. Exemples de foncteurs dérivés, d'objets projectifs et injectifs

Définition 4.20. Le *i-ième groupe d'homologie* est le groupe $\mathrm{H}_i(G, \mathbf{Z}) \coloneqq \mathrm{L}^i \operatorname{Coinv}(\mathbf{Z})$ où le G-module $\mathbf{Z}$ est le groupe $\mathbf{Z}$ muni de l'action trivial.

On va calculer les groupes $\mathrm{H}^i(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$. On définit l'algèbre du groupe $\mathbf{Z}[G]$ comme le groupe abélien libre de base G, c'est-à-dire dont les éléments sont des sommes finies $\sum_{g\in G} n_g e_g$ avec $n_g \in \mathbf{Z}$ et $(e_g)_{g\in G}$ la base canonique. On définit le produit par $e_g e_h = e_{gh}$. Pour un G-module A, il a une structure de $\mathbf{Z}[G]$-module par

$$e_g \cdot x \coloneqq g \cdot x.$$

Réciproquement, tout $\mathbf{Z}[G]$-module définit un G-module. On obtient une équivalence de catégories

$$G\textbf{-Mod} \simeq \mathbf{Z}[G]\textbf{-Mod}.$$

Pour un anneau R, less modules libres $R^{(I)}$ pour des ensembles quelconques I sont projectifs. En effet, il existe une bijection

$$\operatorname{Hom}_{R\textbf{-Mod}}(R^{(I)}, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\textbf{Ens}}(I, M) = M^I.$$

Soit $M \longrightarrow N$ un morphisme surjectif et $f \colon R^{(I)} \longrightarrow N$ un morphisme. On peut relever les images $f(e_i)$ avec $i \in I$ de la base canonique dans le module M de façon à obtenir un morphisme $R^{(I)} \longrightarrow M$ forment un triangle commutatif.

Revenons à notre problème de base. On pose $G \coloneqq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ On sait que le module $\mathbf{Z}[G]$ est projectif. Considérons le morphisme norme $N \colon \mathbf{Z}[G] \longrightarrow \mathbf{Z}$ défini par l'égalité

$$N\Big(\sum_{g\in G} n_g e_g\Big) \coloneqq \sum_{g\in G} n_g.$$

Le noyau de de ce morphisme est

$$\ker N = \langle e_i - e_{i-1} = e_i(e_0 - e_1) \mid i \in \{0, \dots, p-1\}\rangle = (e_0 - e_1)\mathbf{Z}[G].$$

On obtient alors la suite exacte

$$\mathbf{Z}[G] \longrightarrow \mathbf{Z}[G] \longrightarrow \mathbf{Z}$$

où la flèche $\mathbf{Z}[G] \longrightarrow \mathbf{Z}[G]$ est la multiplication par l'élément $e_0 - e_1$. Le noyau de cette dernière flèche est $\mathbf{Z}(e_1 + \dots + e_p) \simeq \mathbf{Z}$ où l'action est triviale. On obtient ainsi la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z}[G] \longrightarrow \mathbf{Z}[G] \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

qui est une résolution projective. Ainsi les groupes de cohomologie $\mathrm{L}^i \operatorname{Coinv}(\mathbf{Z})$ sont ceux du complexe

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Coinv}(\mathbf{Z}[G]) \xrightarrow{\cdot(e_1+\dots+e_p)} \operatorname{Coinv}(\mathbf{Z}[G]) \xrightarrow{\cdot(e_0-e_1)} \operatorname{Coinv}(\mathbf{Z}[G]) \longrightarrow 0.$$

Or le groupe

$$\operatorname{Coinv}(\mathbf{Z}[G]) = \mathbf{Z}[G]/\langle x - g\cdot x : x \in \mathbf{Z}[G], g \in G\rangle = \mathbf{Z}[G]/\langle e_i - e_{i+1}\rangle$$

est cyclique. Par ailleurs, le morphisme $N \colon \mathrm{Z}[G] \longrightarrow \mathrm{Z}$ est un quotient avec action trivial, donc

$$\operatorname{Coinv}(\mathbf{Z}[G]) \simeq \mathbf{Z}.$$

On obtient alors le complexe

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Comme le groupe $\operatorname{Coinv}(\mathbf{Z}[G])$ a une action triviale, on a $e_i \cdot n = n$. Finalement, on obtient le complexe, noté C, avec les flèches

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

On trouve

$$\mathrm{H}^i(C) = \begin{cases} \ker(\cdot p)/\operatorname{im}(0) = \mathbf{Z} & \text{si } i > 0 \text{ est pair,} \\ \ker(0)/\operatorname{im}(\cdot p) = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} & \text{si } i > 0 \text{ est impair,} \\ \mathbf{Z} & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Lemme 4.21. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne et $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'objets projectifs telle que la somme $\bigoplus_{\alpha\in A} P_\alpha$ existe. Alors cette dernière est projective. De même, si $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'objets injectifs telle que le produit $\prod_{\alpha\in A} I_\alpha$ existe, alors ce dernier est injectif.

Démonstration. On considère un épimorphisme $M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ et un morphisme $\bigoplus_{\alpha\in A} P_\alpha \longrightarrow N$. On veut factoriser ce dernier. Or

$$\operatorname{Hom}(\bigoplus_{\alpha\in A} P_\alpha, N) = \prod_{\alpha\in A} \operatorname{Hom}(P_\alpha, N).$$

Ceci permet de conclure puisque les objets P_α sont projectifs. ◇

Lemme 4.22. La catégorie **Ab** des groupes abéliens a assez de projectifs et d'injectifs.

Démonstration. Soit M un groupe abélien. Il existe une surjection $\mathbf{Z}^{(I)} \longrightarrow M$. En effet, on prend $I = M$ et, pour chaque élément $x \in M$, on définit l'application $\varphi_x \in n \in \mathbf{Z} \longmapsto n\cdot x \in M$. L'application obtenue $\mathbf{Z}^{(M)} = \bigoplus_{x\in M} \mathbf{Z} \longrightarrow M$ convient. Or le groupe libre $\mathbf{Z}^{(M)}$ est projectif ce qui conclut.

Pour l'autre assertion, on admet le lemme suivant.

Lemme 4.23. Un groupe abélien I est injectif si et seulement s'il est *divisible*, c'est-à-dire

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbf{Z}^*,\ \exists y \in I, \qquad x = n\cdot y.$$

Avec ce lemme, le groupe abélien $\mathbf{Q}$ est injectif, donc le groupe $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ l'est aussi. En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une injection $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Maintenant, pour tout groupe abélien M et tout élément $x \in M$, il existe un morphisme $\varphi_x \colon M \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $\varphi_x(x) = 0$. En effet, on construit d'abord un morphisme $\psi_x \colon \langle x\rangle \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Or $\langle x\rangle = \mathbf{Z}$ ou $\mathrm{Z}/n\mathbf{Z}$. Dans le premier cas, on pose $\psi_x(x) = 1/2$. Sinon on pose ψ_x l'injection ci-dessus. Comme le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est injectif, on peut étendre ce morphisme ψ_x en un morphisme φ_x. Alors l'application

$$\left|\begin{aligned} M &\longrightarrow \prod_{x\in M} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \\ y &\longmapsto (\varphi_x(y))_{x\in M} \end{aligned}\right.$$

où le groupe d'arrivé est injectif d'après le lemme précédent. ◇

Démonstration du lemme. Montrons le sens réciproque. On suppose qu'un groupe abélien I est divisible. Considérons un morphisme injectif $M \longrightarrow N$ et un morphisme $f\colon M \longrightarrow I$. On choisit d'abord un élément $x \in N\backslash M$. On veut d'abord étendre le morphisme $M \longrightarrow I$ au groupe $M + \langle x\rangle \subset N$. On considère K le noyau du morphisme $M \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow M + \langle x\rangle x$. Le noyau K est constitué des couples (m, n) de la forme $m = -nx$ avec $-nx \in M$. Or le morphisme composée

$$K \longrightarrow M \oplus \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

est injectif, donc $K = 0$ ou $K \simeq \mathbf{Z}$. Si $K \simeq \mathbf{Z}$, alors le morphisme précédent est la multiplication par p avec $K = p\mathbf{Z}$. On choisit

$$\tilde{f}\colon \left|\begin{aligned} M \oplus \mathbf{Z} &\longrightarrow I, \\ (m, n) &\longmapsto f(m) + n\cdot x_0 \end{aligned}\right.$$

pour un choix d'un élément $x_0 \in I$. Alors $\tilde{f}|_K(m, n)(-px, p) = 0 \Leftrightarrow f(-px) + p\cdot x_0 = 0$ avec p tel que $px \in M$. Mais comme I est divisible, on peut trouver un tel x_0. On conclut dans le cas général avec le lemme de Zorn. ◇

Plus généralement, pour un anneau quelconque R, la catégorie R-**Mod** des R-modules a assez de projectifs et d'injectifs. Si l'anneau R est un corps, tous les R-espaces vectoriels sont projectifs et injectifs.

4.5. Le cas des faisceaux

Soit X un espace topologique. En général, la catégorie $\mathbf{Sh}(X)$ des faisceaux sur X n'a pas assez de projectifs.

Notation. Soient A un groupe abélien et $x \in X$. Le *faisceau gratte-ciel* est le faisceau $A_{\{x\}}$ définie par les égalités
$$A_{\{x\}}(U) := \begin{cases} A & \text{si } x \in U, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$
et où les morphismes de restrictions sont l'identité Id_A lorsque c'est possible.

Remarque. On remarque alors que, pour tout faisceau F sur X, on peut écrire
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(F, A_{\{x\}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F_x, A).$$
En effet, dans le sens direct, on construit le morphisme
$$\varphi \longmapsto (\varphi_x \colon F_x \longrightarrow A_{\{x\},x} = A).$$
Dans l'autre sens, on se donne un morphisme de groupes $\psi \colon F_x \longrightarrow A$. On définit alors le morphisme de faisceaux $\tilde{\psi} \colon F \longrightarrow A_{\{x\}}$ par les morphismes de groupes
$$\tilde{\psi}(U) \colon \left| \begin{array}{l} F(U) \longrightarrow A_{\{x\}}(U), \\ \qquad s \longmapsto \begin{cases} \psi(s_x) & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$
On vérifie que ces deux morphismes $\varphi \longmapsto \varphi_x$ et $\psi \longmapsto \tilde{\psi}$ sont bien inverses l'un de l'autre.

Conséquence. Lorsque le groupe A est injectif, le faisceau $A_{\{x\}}$ est injectif dans la catégorie $\mathbf{Sh}(X)$.

Lemme 4.24. La catégorie $\mathbf{Sh}(X)$ a assez d'injectif.

Démonstration. Soit F un faisceau. Soit $x \in X$. On pose $F(x) := (F_x)_{\{x\}}$. Alors la remarque précédente permet d'écrire
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(F, F(x)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F_x, F_x).$$
Notons $u(x) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(F, F(x))$ l'antécédent du morphisme identité Id_{F_x} par ce morphisme. Par construction, on trouve
$$u(x)_x = \mathrm{Id}_{F_x}.$$
On définit le morphisme de faisceaux $u \colon F \longrightarrow \prod_{x \in X} F(x)$ par les morphismes de groupes
$$u(U) \colon \left| \begin{array}{l} F(U) \longrightarrow \Big(\prod_{x \in X} F(x)\Big)(U) = \prod_{x \in U} F(x)(U) = \prod_{x \in U} F_x, \\ \qquad s \longmapsto (s_x)_{x \in U}. \end{array} \right.$$
Ce morphisme u est un monomorphisme. Pour chaque point $x \in X$, on choisit une injection $F_x \longrightarrow I^x$ où le groupe abélien I_x est injectif. On obtient un monomorphisme $v(x) \colon F(x) \longrightarrow I(x) := I^x_{\{x\}}$, puis un morphisme $v \colon \prod_{x \in X} F(x) \longrightarrow \prod_{x \in X} I(x)$. Montrons que ce dernier est un monomorphisme. Pour cela, il suffit de remarquer que, pour chaque ouvert U, le morphisme $v(U)$ est un monomorphisme et d'utiliser
$$\Big(\prod_{x \in X} F(x)\Big)(U) = \prod_{x \in U} F(x)(U).$$
Or un produit d'injectifs est encore injectifs et on obtient un morphisme
$$F \longrightarrow \prod_{x \in X} F(x) \longrightarrow \prod_{x \in X} I(x). \qquad \diamond$$

4.6. Images directes et inverses de faisceaux

Définition-proposition 4.25. Soit $f \colon X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. L'*image directe* d'un faisceau $F \in \mathbf{Sh}(X)$ par l'application f est le préfaisceau $f_* F \in \mathbf{Sh}(Y)$ défini par l'égalité
$$f^* F(V) := F(f^{-1}(V)).$$
Il s'agit d'un faisceau.

Exemple. Considérons l'application $f\colon x \in \mathbf{R} \longmapsto x^2 \in \mathbf{R}$. Soit A un groupe abélien. On prend le faisceau $A_{\mathbf{R}}$ des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbf{R}$. Par exemple, on a

$$f_* A_{\mathbf{R}}(]-2,1[) = A_{\mathbf{R}}(f^{-1}(]-2,1[)) = A$$

et

$$f_* A_{\mathbf{R}}(]1,2[) = A^2.$$

Définition 4.26. Soient $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques et $G \in \mathbf{Psh}(Y)$ un préfaisceau. Soit $U \subset X$ un ouvert. On pose

$$^{\mathrm{pr}}f^{-1}G(U) \coloneqq \lim_{f(U)\subset V} G(V).$$

On vérifie que l'objet $^{\mathrm{pr}}f^{-1}$ est un préfaisceau.

En général, ce préfaisceau n'est pas un faisceau. En effet, prenons un espace topologique X et un point $\{\bullet\}$. Soit $f\colon X \longrightarrow \{\bullet\}$ l'application constante. On sait que $\mathbf{Sh}(\{\bullet\}) = \mathbf{Ab}$. Soit A un groupe abélien vu comme un faisceau sur l'espace $\{\bullet\}$. Pour un ouvert non vide $U \subset X$, on trouve alors $f(U) = \{\bullet\}$ et donc

$$^{\mathrm{pr}}f^{-1}A(U) = A.$$

Ceci n'est pas un faisceau dès que l'espace X contient deux ouverts disjoints.

Définition 4.27. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. L'*image inverse* d'un faisceau $G \in \mathbf{Psh}(Y)$ est le faisceau $f^{-1}G$ associé au préfaisceau $^{\mathrm{pr}}f^{-1}(G)$.

Exemple. On reprend l'exemple précédent. Alors $f^{-1}A = A_X$.

Proposition 4.28. Les foncteurs $f_*\colon \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(Y)$ et $f^{-1}\colon \mathbf{Sh}(Y) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X)$ sont adjoints.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux catégories. Un foncteur $F\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ est *adjoint à gauche* d'un foncteur $G\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ si, pour tous objets X de A et Y de B, il existe une bijection fonctorielle

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, G(Y)),$$

c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(-), -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, G(-)).$$

Exemples. Soit $x \in X$. Dans la dernière remarque, on a montré que le foncteur $-_x\colon \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}$ est adjoint à droite du foncteur $-_{\{x\}}\colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Sh}(X)$.

On considère le foncteur d'oubli $\mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ens}$. Un adjoint à gauche est le foncteur $\mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ qui à un ensemble I associe le groupe libre $\mathbf{Z}^{(I)}$.

Le foncteur associé un préfaisceau à son faisceau associé est adjoint à gauche du foncteur d'oubli.

Comment voir que deux foncteurs sont adjoints ? Soit (F, G) une paire de foncteurs adjoint. Pour deux objets $X \in \mathscr{A}$ et $Y \in \mathscr{B}$, en prenant $Y = F(X)$ puis $X = G(Y)$, les morphismes identités donne deux morphismes $\alpha(X)\colon X \longrightarrow G \circ F(X)$ et $\beta\colon F \circ G(Y) \longrightarrow Y$. En fait, les applications α et β sont des morphismes de foncteurs. Avec ces derniers donnés, on retrouve la bijection entre les ensembles de morphismes.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}(G \circ F(X), G(Y)) \arrow[dr, "- \circ \alpha(X)"] & \\
\mathrm{Hom}(F(X), Y) \arrow[ur, "G(-)"] & & \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \arrow[dl, "F(-)"] \\
& \mathrm{Hom}(F(X), F \circ G(Y)) \arrow[ul, "\beta(X) \circ -"] &
\end{tikzcd}$$

On peut montrer que cela donne une bijection $\mathrm{Hom}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, G(Y))$.

Lemme 4.29. Soit $F\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un foncteur et $G, G'\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ deux foncteurs adjoints à droite du foncteur F. Alors les foncteurs G et G' sont adjoints.

Démonstration. On se donne un morphisme de foncteurs $\mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathbf{Ens}$. On obtient un morphisme

$$\alpha(X, Y)\colon \operatorname{Hom}(X, G(Y)) \simeq \operatorname{Hom}(X, G'(Y)).$$

Avec $X = G(Y)$, le morphisme identité donne un morphisme $\alpha'(Y)\colon G(Y) \longrightarrow G'(Y)$. Alors le morphisme $\alpha'(Y)$ détermine le morphisme α. En effet, soit $u\colon X \longrightarrow G(Y)$. Alors on a le carré commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(G(Y), G(Y)) \arrow[r, "\alpha(G(Y),G(Y))"] \arrow[d, "- \circ u"] & \operatorname{Hom}(G(Y), G'(Y)) \arrow[d, "- \circ u"] \\
\operatorname{Hom}(X, G(Y)) \arrow[r, "\alpha(X,Y)"] & \operatorname{Hom}(Y, G'(Y)).
\end{tikzcd}$$

Cette procédure est compatible aux compositions. Cela donne deux foncteurs $\alpha'\colon G \longrightarrow G'$ et $\beta'\colon G' \longrightarrow G$ qui sont inverses l'un de l'autre. ◇

Revenons à présent aux faisceaux.

Lemme 4.30. Les morphismes de foncteurs ${}^{\mathrm{pr}}f^{-1}$ et f_* sont adjoints.

Démonstration. On définit d'abord des morphismes

$$\alpha(G)\colon {}^{\mathrm{pr}}f^{-1} \circ f_*(G) \longrightarrow G \qquad \text{et} \qquad \beta(F)\colon F \longrightarrow f_* \circ^{\mathrm{pr}} f^{-1}(F).$$

Or

$${}^{\mathrm{pr}}f^{-1} \circ f_*(G)(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V} G(f^{-1}(V)).$$

Si $f(U) \subset V$, alors $U \subset f^{-1}$ ce qui donne, pour $V \subset V'$, des morphismes de restrictions

$$f_*G(V') \longrightarrow f_*G(V),$$

puis un morphisme

$$\alpha(G)(U)\colon \varinjlim_{f(U) \subset V} G(f^{-1}(V)) \longrightarrow G(U).$$

Ceux-ci sont compatibles avec les morphismes de restrictions ce qui donne un morphisme de préfaisceaux $\alpha(G)$. Pour construire le morphisme β, on a

$$f_* \circ^{\mathrm{pr}} f^{-1}(F)(V) = \varinjlim_{f(f^{-1}(V)) \subset W} F(W).$$

Comme $f(f^{-1}(V)) \subset V$, on trouve un morphisme

$$\beta(F)(V)\colon F(V) \longrightarrow f_* \circ^{\mathrm{pr}} f^{-1}(F)(V).$$

Ceci donne alors la paire adjointe. ◇

En utilisant l'adjonction entre le foncteur de faisceau associé et le foncteur d'oubli, on en déduit la proposition 4.28.

Exercice 7.
1. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories abéliennes. Soit $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un foncteur additif. S'il a un adjoint à gauche, alors il est exact à gauche.
2. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories ayant des sommes directes ou des produits quelconques. Soit $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un foncteur ayant un adjoint à droite (resp. à gauche). Alors le foncteur F commute avec les sommes directes (resp. les produits).

Exercice 8. Le fonction f_* est exact à droite et le foncteur f^{-1} est exact. Pour cette dernier assertion, on montrera que $(f^{-1}F)_x = F_{f(x)}$.

4.7. Calcul des dérivées de l'image directe

On va prendre des résolutions plus générales. Soit $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un foncteur exact à gauche entre deux catégories abéliennes. On suppose que la catégorie $\mathscr{C}$ a assez d'injectifs.

Définition 4.31. Un objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ est *F-acyclique* si $\mathrm{R}^i F(X) = 0$ pour $i > 0$.

On va caractériser certaine famille d'objets qui sont F-acycliques.

Définition 4.32. Une famille $\mathscr{I} \subset \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ est *F-injective* si

1. pour tout objet $X \in \mathscr{C}$, il existe un objet $I \in \mathscr{I}$ et un monomorphisme $X \longrightarrow I$;
2. si $0 \longrightarrow X \longrightarrow X' \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte avec $X, X' \in \mathscr{I}$, alors $X'' \in \mathscr{I}$;
3. si $0 \longrightarrow X \longrightarrow X' \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte avec $X, X', X'' \in \mathscr{I}$, alors la suite $0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X'') \longrightarrow 0$ est exacte.

Lemme 4.33. Soit $\mathscr{I}$ une famille F-injective. Alors tout objet $X \in \mathscr{I}$ est F-acyclique.

Donnons un exemple général. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue où les espaces topologiques X et Y sont séparés et localement compacts (c'est-à-dire que tout point admet une base de voisinages compacts).

Définition 4.34. Soient $C \subset X$ une partie et $F \in \mathbf{Sh}(X)$ un faisceau. On pose

$$\Gamma(C, F) := \varinjlim_{C \subset U} \Gamma(U, F).$$

Le faisceau F est *c-mou* si, pour tout compact $C \subset X$, le morphisme de restrictions

$$\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(C, F)$$

est surjectif. Il est *flasque* si, pour tout ouvert $U \subset X$, le morphisme de restrictions

$$\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(U, F)$$

est surjectif

Remarque. Un faisceau flasque est c-mou.

Exemple. Soit X une variété différentielle de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors le faisceau $\mathscr{C}_X^\infty$ est c-mou. En effet, soit $C \subset X$ un compact. Tout élément $f \in \Gamma(C, \mathscr{C}_X^\infty)$ est représenté par une fonction $\tilde{f} \in \Gamma(U, \mathscr{C}_X^\infty)$ pour un ouvert $U \supset C$. On choisit deux ouverts $V, V' \subset X$ tel que $C \subset V \subset \overline{V'} \subset U$. Avec le lemme d'Uryshon, on trouve une fonction $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui vaut 1 sur C et 0 sur $U \setminus \overline{V'}$. Alors on trouve $[\varphi \tilde{f}] = f$ dans $\Gamma(C, \mathscr{C}_X^\infty)$ et on peut étendre la fonction $\varphi \tilde{f}$ sur X en la prolongeant par 0.

Lemme 4.35. Soit $0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0$ une suite exacte dont les objets X^0, …, X^{n-1} sont F-acycliques. Alors l'objet X^n est F-acyclique.

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$. Pour l'initialisation, lorsque $n = 2$, soit $0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow 0$ une suite exacte dont les objets X^0 et X^1 sont F-acycliques. Alors on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow F(X^0) \longrightarrow F(X^1) \longrightarrow F(X^2) \longrightarrow \mathrm{R}^1 F(X^0)&\\ \longrightarrow \mathrm{R}^1 F(X^1) \longrightarrow \mathrm{R}^1 F(X^2) \longrightarrow \mathrm{R}^2 F(X^0) \longrightarrow \cdots&.\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{R}^i F(X^1) = 0$ et $\mathrm{R}^i F(X_0) = 0$ pour $i > 0$, on trouve $\mathrm{R}^i F(X^2) = 0$. Ceci montre l'initialisation.

Pour $n > 2$, soit $0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0$ une suite exacte dont les objets X^0, …, X^{n-1} sont F-acycliques. On note u_{n-2} et u_{n-1} les morphismes. On obtient deux suites exactes

$$0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{n-2} \longrightarrow \operatorname{im} u_{n-2} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} u_{n-2} \longrightarrow X^{n-1} \longrightarrow X^n \longrightarrow 0.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, l'image $\operatorname{im} u_{n-2}$ est F-acyclique. Par le cas $n = 2$, l'objet X^n est aussi F-acyclique ce qui conclut la récurrence. ◇

Lemme 4.36. Soit $0 \longrightarrow X^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow 0$ une suite exacte dont les objets $X^0, \ldots, X^n$ sont F-acycliques. Alors la suite

$$0 \longrightarrow F(X^0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(X^n) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. On procède encore par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$. ◇

Proposition 4.37. Soit X un objet de $\mathscr{C}$. Soit $J^\bullet$ une résolution F-acyclique de X, c'est-à-dire une suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow J^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J^n \longrightarrow \cdots$$

où les objets J^i avec $i \geqslant 0$ sont F-acycliques. Soit $i \geqslant 0$ un indice.

$$\mathrm{R}^i F(X) \simeq \mathrm{H}^i(F(J^0) \longrightarrow F(J^1) \longrightarrow \cdots).$$

Démonstration. On peut procéder avec ces étapes.

1. On peut trouver une résolution injective $I^\bullet$ de X avec des monomorphismes $u^k \colon J^k \longrightarrow I^k$ qui fassent commuter le diagramme de complexes.
2. Ceci donne un monomorphisme $u^\bullet \colon J^\bullet \longrightarrow I^\bullet$. Soit K son conoyau. Par le premier lemme, on en déduit que l'objet K^i est F-acyclique pour tout indice $i \geqslant 0$ car la suite

   $$0 \longrightarrow J^i \longrightarrow I^i \longrightarrow K^i \longrightarrow 0$$

   est exacte.
3. La suite courte $0 \longrightarrow J^\bullet \longrightarrow I^\bullet \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow 0$ est exacte, donc on a la suite longue

   $$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i(J^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(I^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(K^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(J^\bullet) \longrightarrow \cdots .$$

   Or $\mathrm{H}^i(J) = 0$ pour $i \neq 0$ et $\mathrm{H}^0(J) = J$. De même pour l'objet I. On en déduit $\mathrm{H}^i(K) = 0$ pour $i \neq 0, -1$. De plus, on trouve $\mathrm{H}^{-1}(K) = \mathrm{K}^0(K) = 0$ car on a la suite exacte

   $$0 \longrightarrow \mathrm{H}^{-1}(K) \longrightarrow \mathrm{H}^0(I) = X \longrightarrow \mathrm{H}^0(J) = I \longrightarrow \mathrm{H}^0(K) \longrightarrow 0.$$

   Ainsi la suite $0 \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow \cdots$ est exacte, donc la suite $0 \longrightarrow F(K^0) \longrightarrow F(K^1) \longrightarrow \cdots$ l'est. Par le second lemme, la suite $0 \longrightarrow F(J^\bullet) \longrightarrow F(I^\bullet) \longrightarrow F(K^\bullet) \longrightarrow 0$ est exacte. On en déduit la suite longue

   $$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(F(K^\bullet)) = 0 \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(J^\bullet)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(J^\bullet)) = \mathrm{R}^i F(X)& \\ \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(J^\bullet)) = 0 \longrightarrow \cdots .&\end{aligned}$$

   On en déduit ainsi un isomorphisme

   $$\mathrm{H}^i(F(J^\bullet)) \longrightarrow \mathrm{R}^i F(X).$$ ◇

Chapitre 5
Catégories dérivées

Motivation. On a vu qu'une application continue $f\colon X \longrightarrow Y$ détermine deux foncteurs f_* et f^{-1} sur les faisceaux. Le foncteur $f_*\colon \mathbf{Sh}(Y) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X)$ est exact à gauche et on peut donc définir ses foncteurs dérivés $\mathrm{R}^i f_*$. Pour une autre application continue $g\colon Y \longrightarrow Z$, quel est le lien entre les foncteurs $\mathrm{R}^i f_*$, $\mathrm{R}^i g_*$ et $\mathrm{R}^i(g\circ f)_*$?

Remarque. Si un faisceau F sur X est flasque, alors son image directe $f_*(F)$ l'est également. Pour calculer le faisceau $\mathrm{R}^i f_*(F)$ ou $\mathrm{R}^i(g\circ f)_*(F)$, on remplace le faisceau F par une résolution flasque

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

et on trouve

$$\mathrm{R}^i f_*(F) = \mathrm{H}^i(f_*(I_0) \longrightarrow f_*(I_1) \longrightarrow \cdots),$$
$$\mathrm{R}^i(g\circ f)_*(F) = \mathrm{H}^i((g\circ f)_*(I_0) \longrightarrow (g\circ f)_*(I_1) \longrightarrow \cdots).$$

A priori, on ne peut pas dire que $\mathrm{R}^i(g\circ f)_*(F) = \mathrm{R}^i g_*(F)$.

On va généraliser la notion de résolution injective aux complexes.

5.1. Définitions et premières propriétés

Définition 5.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne. Notons $\mathrm{Comp}(\mathscr{C})$ la catégorie des complexes. On considère la sous-catégorie $\mathrm{Comp}^+(\mathscr{C})$ la sous-catégorie des complexes $X_\bullet$ tels que

$$X_n = 0, \quad n \ll 0$$

et la sous-catégorie $\mathrm{Comp}^-(\mathscr{C})$ la sous-catégorie des complexes $X_\bullet$ tels que

$$X_n = 0, \quad n \gg 0.$$

Les notations $n \ll 0$ et $n \gg 0$ signifient « à partir d'un certain rang n ».

Définition 5.2. Un morphisme de complexes $u\colon X \longrightarrow Y$ est un *quasi-isomorphisme* si, pour tout degré $i \in \mathbf{Z}$, le morphisme $\mathrm{H}^i(u)\colon \mathrm{H}^i(X) \longrightarrow \mathrm{H}^i(Y)$ est un isomorphisme.

Proposition 5.3. Soient $\mathscr{A}$ une catégorie et $\S \subset \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ une famille de morphismes. Alors il existe une catégorie $\mathscr{A}_\S$, dite *localisée*, et un foncteur $Q\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}_\S$ tels que

- pour tout morphisme $s\colon X \longrightarrow Y$ dans S, le morphisme $Q(s)\colon Q(X) \longrightarrow Q(Y)$ soit un isomorphisme ;
- pour tout foncteur $F\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ tel que le morphisme $F(s)$ soit un isomorphisme pour tout morphisme $s \in \S$, il existe un foncteur $\tilde{F}\colon \mathscr{A}_\S \longrightarrow \mathscr{B}$, unique à isomorphisme de foncteurs près, tels que $F = \tilde{F}\circ Q$.

Remarque. Si la famille § est un *système multiplicatif*, c'est-à-dire stable par composition et si tout diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "u"] \\ X' \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}$$

avec $s \in S$ se complète en un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "t"] \arrow[d, "v"] & Y \arrow[d, "u"] \\ X' \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}$$

avec $t \in S$, alors les morphismes s'écrive $X \longrightarrow Z \longleftarrow Y$ avec $(Y \longrightarrow Z) \in S$.

Définition 5.4. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne. Sa *catégorie dérivée* est la catégorie localisée

$$\mathrm{R}(\mathscr{C}) \coloneqq \mathrm{Comp}(\mathscr{C})_{\mathscr{Q}}$$

où la famille $\mathscr{Q}$ est celle des quasi-isomorphismes.

Remarque. Si $f \sim_{\mathrm{h}} g$, alors $\mathrm{H}^i(f) = \mathrm{H}^i(g)$ pour tout $i \in \mathrm{Z}$. On peut donc définir les quasi-isomorphismes dans la catégorie $\mathrm{K}(\mathscr{C})$ qui forment un ensemble $\mathscr{Q}$ et une foncteur $\mathrm{Comp}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathscr{C})$. Cela induit un foncteur

$$\mathrm{R}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathscr{C})_{\mathscr{Q}}.$$

Proposition 5.5. Ce dernier foncteur est une équivalence de catégorie.

Proposition 5.6. Dans la catégorie $\mathrm{K}(\mathscr{C})$, la famille $\mathscr{Q}$ est un système multiplicatif.

Rappel. Lorsque la catégorie $\mathscr{C}$ a assez de projectifs, on a vu que le foncteur $\mathrm{H}^0 \colon \mathrm{K}_{\mathrm{rp}}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}$ est une équivalence de catégories. Soit $\mathscr{P} \subset \mathscr{C}$ la sous-catégorie formée des objets projectifs.

Proposition 5.7. Le foncteur $\mathrm{K}^-(\mathscr{P}) \longrightarrow \mathrm{R}^-(\mathscr{C}) \coloneqq \mathrm{K}^-(\mathscr{C})_{\mathscr{Q}}$ est une équivalence de catégorie.

En particulier, ce foncteur est essentiellement surjectif : pour tout complexe $X \in \mathrm{R}^-(\mathscr{C})$, il existe un complexe $P \in \mathrm{K}^-(\mathscr{C})$ tel que $P \simeq X$ dans $\mathrm{R}(\mathscr{C})$.

Remarque. On dispose d'un foncteur

$$\left|\begin{array}{l} \mathscr{C} \longrightarrow \mathrm{Comp}(\mathscr{C}), \\ X \longmapsto (0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) \end{array}\right.$$

qui est pleinement fidèle. En le composant avec le foncteur $\mathrm{Comp}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{R}(\mathscr{C})$, on obtient toujours un foncteur pleinement fidèle

De même, lorsque la catégorie $\mathscr{C}$ a assez d'injectifs qui forment une famille $\mathscr{I}$, alors le foncteur $\mathrm{K}^+(\mathscr{I}) \longrightarrow \mathrm{R}^+(\mathscr{C})$ est une équivalence de catégories.

Définition 5.8. Soit $F \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ un foncteur exacte à gauche entre deux catégories abéliennes. On suppose que la catégorie $\mathscr{C}$ a assez d'injectifs. Son *foncteur dérivé* est le foncteur

$$\mathrm{R}F \coloneqq \mathrm{K}(F) \circ \mathrm{res}_{\mathrm{inj}} \colon \mathrm{R}^+(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{R}^+(\mathscr{C}')$$

où la foncteur $\mathrm{res}_{\mathrm{inj}}$ est l'inverse du foncteur $\mathrm{K}^+(\mathscr{I}) \longrightarrow \mathrm{R}^+(\mathscr{C})$ et où le foncteur $\mathrm{K}(F)$ est celui induit par le foncteur F.

Remarque. Les foncteurs $\mathrm{H}^i \colon \mathrm{K}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}$ se factorise par le catégorie $\mathrm{R}(\mathscr{C})$ et on trouve

$$\mathrm{H}^i\mathrm{R}^i F(0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots) = \mathrm{R}^i F(X).$$

Proposition 5.9. Soient $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ et $G\colon \mathscr{C}' \longrightarrow \mathscr{C}''$ deux foncteurs exacts à gauches. On suppose que

- les catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont assez d'injectifs ;
- la fonction F envoie les injectifs sur des objets G-acycliques.

Alors $\mathrm{R}(F \circ G) \simeq \mathrm{R}G \circ \mathrm{R}F$.

Remarque. On suppose que le foncteur $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ est exact. Alors il commute avec les noyaux et conoyaux et donc avec les cohomologies. En particulier, la fonction $\mathrm{Comp}(F)\colon \mathrm{Comp}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Comp}(\mathscr{C}')$ envoie les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphisme. Il se factorise donc en un foncteur

$$F\colon \mathrm{R}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{R}(\mathscr{C}').$$

Cependant, si le fonction F est seulement exact à gauche, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Comp}(\mathscr{C}) \arrow[r, "\mathrm{Comp}(F)"] \arrow[d] & \mathrm{Comp}(\mathscr{C}') \arrow[d] \\ \mathrm{R}(\mathscr{C}) \arrow[r, "\mathrm{R}F"] & \mathrm{R}(\mathscr{C}') \end{tikzcd}$$

ne commute pas.

Lemme 5.10. Si le foncteur F est exact, alors $\mathrm{Comp}(F) = \mathrm{R}F$.

5.2. La cohomologie de l'espace projectif

Soit $\pi\colon \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{P}^n$ la projection de la sphère dans l'espace projectif. Soit A un groupe abélien. On souhaite calculer l'objet $\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{P}^n, A_{\mathbf{P}^n}) = \mathrm{R}a_*(A_{\mathbf{P}^n})$ avec l'unique morphisme $a\colon \mathbf{P}^n \longrightarrow \{\bullet\}$. On suppose connu l'objet

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{S}^n, A_{\mathbf{S}^n}) = \mathrm{R}(a \circ \pi)_*(A_{\mathbf{S}^n}) = \mathrm{R}a_*(\mathrm{R}\pi_*(A_{\mathbf{S}^n})).$$

Quel est le lien entre les objets $\mathrm{R}\pi_*(A_{\mathbf{S}^n})$ et $A_{\mathbf{P}^n}$.

Première étape. Le foncteur π_* est exact. En effet, soient $x \in \mathbf{P}^n$ un point et $F \in \mathbf{Sh}(\mathbf{S}^n)$ un faisceau. Que vaut le germe $(\pi_* F)_x$? Sa définition donne

$$(\pi_* F)_x = \lim_{x \in U} \pi_* F(U) = \lim_{x \in U} F(\pi^{-1}(U)).$$

Si un ouvert U est une boule autour du points x, alors $\pi^{-1}(U) = U' \sqcup U''$ pour deux boules U' et U'' autour des points x' et x'' tels que $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x', x''\}$, donc

$$F(\pi^{-1}(U)) = F(U') \oplus F(U'').$$

Lorsque l'ouvert U décrit les voisinages du point x, les ouverts U' et U'' décrivent les voisinages des points x' et x''. On en déduit que

$$(\pi_* F)_x \simeq F_{x'} \oplus F_{x''}.$$

Soit $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte dans $\mathbf{Sh}(\mathbf{S}^n)$. On obtient la suite

$$\pi_* F_1 \longrightarrow \pi_* F_2 \longrightarrow \pi_* F_3.$$

Il faut montrer qu'elle est exacte. Pour cela, avec le précédent paragraphe, il suffit de montrer que la suite

$$F_{1,x'} \oplus F_{1,x''} \longrightarrow F_{2,x'} \oplus F_{2,x''} \longrightarrow F_{3,x'} \oplus F_{3,x''}$$

est exacte. Mais ceci est vraie puisque la somme de deux suites exactes est exactes. Ceci montre que le foncteur π_* est exact.

Deuxième étape. Modulo le plongement $\mathbf{Sh}(\mathbf{S}^n) \longrightarrow \mathrm{R}(\mathbf{Sh}(\mathbf{S}^n))$, le première étape donne

$$\mathrm{R}\pi_*(A_{\mathbf{S}^n}) = (0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots)$$

Troisième étape. Trouvons le lien entre les faisceaux $A_{\mathbf{P}^n}$ et $\pi_* A_{\mathbf{S}^n}$. On peut montrer que

$$a^{-1}(A) = A_{\mathbf{P}^n}$$

où la notation A désigne le faisceau constant sur $\mathbf{S}^n$. Or $(a \circ \pi)^{-1} = \pi^{-1} \circ a^{-1}$. En effet, on peut écrire $(\pi \circ a)_* = \pi_* \circ a_*$ et on utilise l'unicité de l'adjoint. En déduit que, pour une application continue $f\colon X \longrightarrow Y$, on trouve $f^{-1}(A_Y) = A_X$. Finalement, on obtient

$$\pi_* A_{\mathbf{S}^n} = \pi_* \pi^{-1}(A_{\mathbf{P}^n}).$$

Mais on a le morphisme d'adjonction $\varepsilon\colon A_{\mathbf{P}^n} \longrightarrow \pi_* \pi^{-1} A_{\mathbf{P}^n}$. Pour une petite boule U, il envoie

$$\varepsilon(A_{\mathbf{P}^n(A)}) = \varepsilon(A) = ({}^{\mathrm{pr}}\pi^{-1} A_{\mathbf{P}^n})(\pi^{-1}(U)) = A.$$

En passant aux germes, le morphisme ε induit l'identité

$$A_{\mathbf{P}^n, x} \longrightarrow \pi_*(A_{\mathbf{S}^n})_x = A_{\mathbf{S}^n, x'} \oplus A_{\mathbf{S}^n, x''} = A \oplus A.$$

On trouve alors $\varepsilon_x(v) = (v, v)$ pour tout $v \in A$. On dispose ainsi d'un morphisme $\eta\colon \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow A_{\mathbf{P}^n}$ qui agit comme la diagonale sur les germes. Posons $L_1 \coloneqq \operatorname{coker} \varepsilon$ et $L_2 \coloneqq \ker \eta$. Alors on a deux suites exactes

$$0 \longrightarrow A_{\mathbf{P}^n} \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow L_1 \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow L_2 \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow A_{\mathbf{P}^n} \longrightarrow 0.$$

Localement, on trouve $\pi_* A_{\mathbf{S}^n} \simeq A_{\mathbf{P}^n} \oplus A_{\mathbf{P}^n}$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow A_{\mathbf{P}^n} \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow 0$$

où le morphisme $\pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n}$ est le morphisme $\beta \coloneqq \mathrm{Id}_{\pi_* A_{\mathbf{S}^n}} - \alpha$ où le morphisme α est défini par la relation

$$\alpha_x(v_1, v_2) = (v_2, v_1), \qquad \forall x \in \mathbf{S}^n,\ \forall v_1, v_2 \in A.$$

On pose $L \coloneqq \operatorname{im} \beta$. On a donc deux suites exactes

$$0 \longrightarrow A_{\mathbf{P}^n} \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \pi_* A_{\mathbf{S}^n} \longrightarrow A_{\mathbf{P}^n} \longrightarrow 0.$$

On appliquer le foncteur $\mathrm{R}a_*$ à ces suites, puis on considère les suites exactes. Posons $P^i \coloneqq \mathrm{H}^i(\mathbf{P}^n, A_{\mathbf{P}^n})$, $S^i \coloneqq \mathrm{H}^i(\mathbf{P}^n, \pi_* A_{\mathbf{S}^n})$ qu'on connaît et $L^i \coloneqq \mathrm{H}^i(\mathbf{P}^n, L)$. Alors les deux dernières sont exactes donnent

$$0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow S^0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow P^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$
$$0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow S^0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow S^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

On suppose $A = \mathbf{Z}$. Or $P^0 = S^0 = A$. Alors le morphisme $P^0 \longrightarrow S^0$ est l'identité et le morphisme $S^0 \longrightarrow P^0$ est la multiplication par 2. On trouve $L^1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $S^1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et aussi $L^i = P^{i+1}$ et $P^i = L^{i+1}$.

5.3. Compléments

Soient X un espace topologique et $Z \subset X$ un compact. Soit $F \in \mathbf{Sh}(X)$ un faisceau. On considère le faisceau $F|_Z$ restreint au compact Z et donc sa section globale $\Gamma(Z, F|_Z)$. On a un morphisme

$$\lim_{Z \subset U} F(U) = ({}^{\mathrm{pr}} i_Z^{-1} F)(Z) \longrightarrow (i_Z^{-1} F)(Z)$$

où le morphisme $i_Z\colon Z \longrightarrow X$ est l'inclusion. On obtient alors un morphisme

$$\alpha\colon \lim_{Z \subset U} F(U) \longrightarrow \Gamma(Z, i_Z^{-1} F).$$

Lemme 5.11. Ce dernier est un isomorphisme.

Démonstration. Pour l'injectivité, soient $U \subset X$ un ouvert tel que $Z \subset U$ et $s \in F(U)$ une section telle que $\alpha(s) = 0$. Alors pour tout $x \in Z$, on a $\alpha(s)_x = 0$. Or $\alpha(s)_x \in F_{i_Z(x)}$. Par construction, on a $\alpha(s)_x = s_x$ dans $F_{i_Z(x)}$. Donc $s_x = 0$ pour tout $x \in Z$, donc $s = 0$ dans $\lim_{Z \subset U} F(U)$.

Pour la surjectivité, soit $z \in \Gamma(Z, i_Z^{-1}F)$ une section. Pout $x \in X$, on représente un élément $s_x \in (i_Z^{-1}F)_x = F_{i_Z(x)} = F_x$ par $t(x) \in F(V(x))$ avec $V(x) \subset X$ un voisinage de x. Comme Z est compact, on peut prendre un recouvrement ouvert $Z = \bigcup_{i=1}^N V_i$ avec $V_i := V(x_i)$. On note $t_i := t(x_i)$. Soit

$$V := \{x \in X \mid (t_i)_x = (t_j)_x,\ \forall i, j,\ x \in V_i \cap V_j\}.$$

On a $Z \subset V$ car, pour tout $x \in Z$ et tous i, j, on a $(t_i)_x = s_x = (t_j)_x$. Remarquons que, pour un faisceau G, deux ouverts W et W' et deux sections $s \in G(W)$ et $s' \in G(W')$, l'ensemble $\{x \in W \cap W' \mid s_x = s'_x\}$ est un ouvert. Cela se généralise à un nombre fini d'ouverts. On en déduit que l'ensemble V est ouvert. Par définition, on a $t_i|_{V_i \cap V_j \cap V} = t_j|_{V_i \cap V_j \cap V}$. En recollant, on trouve une section $\tilde{t} \in F(V)$ telle que $\tilde{t}|_{V \cap V_i} = t_i$. Donc sur $Z \cap V_i$, la section $\tilde{t}$ induit bien $s|_{Z \cap V_i}$, donc $\tilde{t}$ induit s. ◇

Définition 5.12. Soit X un espace topologique localement compact. Pour un faisceau $F \in \mathbf{Sh}(X)$ et un ouvert $U \subset X$, on note $\Gamma_c(U, F)$ l'ensemble des sections $s \in F(U)$ à support compact.

Rappel. Pour une section $s \in F(U)$, son support est l'ensemble $\operatorname{supp} s := U \setminus V$ où la partie V est le plus grand ouvert tel que $s|_V = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{supp} s = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$.

Définition 5.13. Soient $f \colon X \longrightarrow Y$ une application continue et $F \in \mathbf{Sh}(X)$ un faisceau. L'*image directe à support propre* du faisceau F par l'application f est le faisceau $f_!F \in \mathbf{Sh}(Y)$ tel que chaque section $f_!F(V)$ avec $V \subset Y$ soit l'ensemble des sections $s \in F(f^{-1}(V))$ telles que, pour tout compact $C \subset V$, l'intersection $f^{-1}(C) \cap \operatorname{supp} s$ soit compacte.

Exemple. On considère la projection $f \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ sur la seconde coordonnée et le faisceau $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}^2}$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$. Pour tout intervalle $]a, b[\subset \mathbf{R}$, la section $f_!\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}^2}(]a, b[)$ est incluse dans l'ensemble $\mathscr{C}^0_{\mathbf{R}^2}(]a, b[\times \mathbf{R})$

Exemple. Soient X un espace topologique et $j \colon U \longrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert. On considère le faisceau $k_U \in \mathbf{Sh}(U)$ des fonctions localement constantes sur U. Voyons la différences entre les faisceaux $j_!k_U$ et j_*k_U. On suppose que l'ouvert U est un disque ouvert dans $\mathbf{R}^2$. Alors

$$j_*k_U(V) = k_U(j^{-1}(V)) = k_U(U \cap V).$$

Soit $x_1 \in \mathbf{R}^2$ un point. Si $x_1 \in u$, on a $(j_*k_U)_{x_1} = k$. Si $x_1 \notin U$, alors $(j_*k_U)_{x_1} = 0$. Si $x_1 \in \partial U$, alors $(j_*k_U)_{x_1} = k$. On peut montrer que $j_*k_U = k_{\overline{U}}$.

Par ailleurs, on a $j_!k_U(V) \subset j_*k_U(V)$. Si $V \subset U$ est un disque autour de x_1, alors $j_!k_U(V) = k$. Si $x_1 \notin U$, alors $(j_!k_U)_{x_1} = 0$. Si $x_1 \in \partial U$, alors $(j_!k_U)_{x_1} = 0$.

Proposition 5.14 *(changement de bases).* Soient $f \colon X \longrightarrow Y$ une application continue et $F \in \mathbf{Sh}(X)$ un faisceau. Soit $y \in Y$ un point. Alors

$$(f_!F)_y = \Gamma_c(f^{-1}(y), F|_{f^{-1}(y)}).$$

Cette proposition est fausse avec l'image directe f_*. On prend la première projection $f \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ et le faisceau constant k_Z le faisceau constant sur la demi-hyperbole $Z := \{(t, 1/t) \mid t > 0\}$. Pour un intervalle $]a, b[\subset \mathbf{R}$ intersectant $\mathbf{R}_+^*$, on a $f_*k_Z(]a, b[) = k$. On obtient alors $(f_*k_Z)_0 = k$. Mais par définition, on trouve ${}^{\mathrm{pr}}i^{-1}k_Z(W) = 0$ avec $i \colon f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'inclusion et tout ouvert $W \subset \{0\} \times \mathbf{R}$, donc $\Gamma(f^{-1}(0), k_Z|_{f^{-1}(0)}) = 0$.

Définition 5.15. Soit X un espace topologique. Soient $j \colon U \longrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert et $i \colon Z \longrightarrow X$ l'inclusion du fermé $Z := X \setminus U$. Pour $F \in \mathbf{Sh}(X)$, on pose

$$F_Z := i_!i^{-1}F \qquad \text{et} \qquad F_U := j_!j^{-1}F.$$

Remarque. Si f est propre, alors $f_! = f_*$.

Remarque. Par adjonction, on a $\operatorname{Hom}(F, i_*i^{-1}F) = \operatorname{Hom}(i^{-1}F, i^{-1}F)$, donc l'identité induit un morphisme $F \longrightarrow F_Z$.

Proposition 5.16. La suite

$$0 \longrightarrow F_U \longrightarrow F \longrightarrow F_Z \longrightarrow 0$$

est exacte.

Supposons que l'espace X est compact. Alors $\Gamma_c(X,-)=\Gamma(X,-)$. Soit $j\colon U\longrightarrow X$ une inclusion. Alors

$$\Gamma(X,j_!(-))=\Gamma_c(X,j_!(-))=(a\circ j)_!(-)$$

où $a\colon X\longrightarrow\{\bullet\}$. On a aussi

$$\Gamma(X,i_!(-))=\Gamma(Z,-).$$

En appliquant les foncteurs dérivées à la suite exacte, on obtient la suite longue

$$0\longrightarrow \mathrm{H}^0_c(U,F|_U)\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,F)\longrightarrow \mathrm{H}^0(Z,F|_Z)\longrightarrow \mathrm{H}^1_c(U,F|_U)\longrightarrow \mathrm{H}^1(X,F)\longrightarrow \mathrm{H}^1(Z,F|_Z)\longrightarrow\cdots$$

En prenant $F=k_X$, on obtient $j^{-1}F=k_U$ et $i^{-1}F=k_Z$ de sorte qu'on obtient la suite longue

$$0\longrightarrow \mathrm{H}^0_c(U,k_U)\longrightarrow \mathrm{H}^0(X,k_X)\longrightarrow \mathrm{H}^0(Z,k_Z)\longrightarrow \mathrm{H}^1_c(U,k_U)\longrightarrow \mathrm{H}^1(X,k_X)\longrightarrow \mathrm{H}^1(Z,k_Z)\longrightarrow\cdots$$

Définition 5.17. Soit $f\colon X\longrightarrow Y$ une application continue. Un faisceau $F\in\mathbf{Sh}(X)$ est f-mou si, pour tout point $y\in Y$, sa restriction $F|_{f^{-1}(y)}$ est c-mou.

Lemme 5.18. Un faisceau f-mou est $f_!$-injectif.

Décrivons l'homologie des faisceaux sur $\mathbf{R}^n$. Soit $p\colon\mathbf{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbf{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Soit $F\in\mathbf{Sh}(\mathbf{R}^{n+1})$ un faisceau. On pose

$$R_0(F):=\prod_{x\in\mathbf{R}^{n+1}}F_{\{x\}}.$$

On a déjà vu qu'il était flasque et qu'on a un monomorphisme $F\longrightarrow R_0(F)$.

Remarque. Un faisceau flasque sur X est f-mou pour toute application continue $f\colon X\longrightarrow Y$.

On pose $R_1(F):=\operatorname{coker}(F\longrightarrow R_0(F))$. Par construction, on a la suite exacte

$$0\longrightarrow F\longrightarrow R_0(F)\longrightarrow R_1(F)\longrightarrow 0.$$

Vérifions que le faisceau $R_1(F)$ est p-mou, c'est-à-dire que le faisceau $R_1(F)|_{p^{-1}(y)}$ est c-mou pour tout $y\in Y$. On a encore la suite exacte

$$0\longrightarrow F|_{p^{-1}(y)}\longrightarrow R_0(F)|_{p^{-1}(y)}\longrightarrow R_1(F)|_{p^{-1}(y)}\longrightarrow 0.$$

Or $p^{-1}(y)=\{y\}\times\mathbf{R}\simeq\mathbf{R}$. On a vu que le faisceau $R_0(F)|_{p^{-1}(y)}$ est c-mou. On utilise alors le lemme suivant.

Lemme 5.19. Sur $\mathbf{R}$, si on a une suite exacte $F'\longrightarrow F''\longrightarrow 0$ et F' est c-mou, alors F'' est c-mou.

Démonstration. Soient $C\subset\mathbf{R}$ un compact et $s\in\Gamma(C,F'')=\lim_{C\subset U}F(U)$ une section. On la représente par $\tilde s\in\Gamma(U,F'')$ avec $C\subset U$. Soit $x\in C$ un point. Notons $d\colon F'\longrightarrow F''$ le morphisme de l'énoncé. Comme la suite $F'_x\longrightarrow F''_x\longrightarrow 0$ est exacte, on peut écrire $s_x=d_x(t(x))$ avec $t(x)\in F'_x$. On représente $t(x)$ par une section $t(x)\in F'(I(x))$ pour un intervalle ouvert $I(x)\subset\mathbf{R}$ autour du point x. Quitte à restreindre $I(x)$, on peut supposer $d(I(x))(t(x))=\tilde s|_{I(x)}$. On recouvre C par un nombre fini d'intervalles $I_i:=I(x_i)=\,]a_i,b_i[$ avec $i\in\{1,\dots,N\}$ où $a_i<a_{i+1}$ et $b_i<b_{i+1}$. Soit $V=\bigcup_{i=1}^N I_i$. On suppose d'abord que V est connexe. Alors $V=\,]a_1,b_N[$. On pose $W:=\,]a_2,b_{N-1}[$. On a $\tilde s|_{]a_1,b_1[}=d(t_1)$. On considère t_1 modifiée $u_1\in F'([a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon]\cup[a_1+2\varepsilon,b_1-\varepsilon])$ tel que $u_1=0$ sur $[a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon]$ et $u_1=t_1$ sur $[a_1+2\varepsilon,b_1-\varepsilon]$. On peut l'étendre sur $\mathbf{R}$. On pose $s'_1:=d(u_1|_{]a_1,b_1-\varepsilon[})$. Alors $u_1=t_1$ sur $]a_1+2\varepsilon,b_1-\varepsilon[$ et donc $s'_1=s$. La section s'_1 se recollent donc avec $s|_W$. De même, on modifie s près de b_N pour avoir s'_N qui vaut 0 près de b_N et qui se recolle avec $s|_W$. Recollons les trois sections s'_1, $s|_W$ et s'_N en une section $\hat s$ sur $]a_1,b_N[$. On a $\hat s|_C=\tilde s|_C$ pour ε tel que $C\subset[a_1+2\varepsilon,b_N-2\varepsilon]$. De plus, on a $\hat s=0$ sur un voisinage de b_N. On considère la section 0 dans $F'(]-\infty,a_1+\varepsilon[\,\cup\,]b_N-\varepsilon,+\infty[)$. Elle se recolle avec $\hat s$ pour donner une section sur $\mathbf{R}$. ◇

Pour un complexe $0 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow 0$, on a une résolution par le complexe double, c'est-à-dire des suites exactes

$$0 \longrightarrow F_i \longrightarrow R_0(F_i) \longrightarrow R_1(F_i) \longrightarrow 0.$$

Lemme 5.20. Le complexe total $\mathrm{Tot}(R_\bullet(F_\bullet))$ défini par l'égalité

$$\mathrm{Tot}(R_\bullet(F_\bullet))^k = \bigoplus_{p+q=k} R_p(F^q) \qquad \text{et} \qquad d^k = \sum_{p+q=k} (d'_{(p,q)} + (-1)^q d''_{(p,q)})$$

est quasi-isomorphe au complexe F.

Si F est de longueur N, alors $\mathrm{Tot}(R_\bullet(F_\bullet))$ est de longueur $N+1$.

Lemme 5.21. Pour un foncteur $F \in \mathrm{R}(\mathbf{Sh}(\mathbf{R}^{n+1}))$ qui est représentable par un complexe de longueur N, alors le foncteur $\mathrm{R}p_!F$ est représentable par un complexe de longueur $N+1$.

Corollaire 5.22. Pour un faisceau $F \in \mathbf{Sh}(\mathbf{R}^{N+1})$, on obtient $\mathrm{H}^i(\mathbf{R}^n, F) = 0$ si $i > n$.