

ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

(AL3)

Jérémy LE BORGNE

1A maths 2019, ENS de Rennes

CHAPITRE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE	1	CHAPITRE 2 – ALGÈBRE BILINÉAIRE	16
1.1 Structure	1	2.1 Formes quadratiques	16
1.2 Réduction des endomorphismes	9	2.2 Espaces euclidiens et hermitiens	22
		CHAPITRE 3 – REPRÉSENTATION LINÉAIRE DES GROUPES	27

Chapitre 1

ALGÈBRE LINÉAIRE

1.1	Structure	1	1.1.6	Puissances extérieures	6
1.1.1	Espaces vectoriel libre sur un ensemble	1	1.2	Réduction des endomorphismes	9
1.1.2	Somme de sous-espaces	1	1.2.1	Polynômes d'endomorphismes	9
1.1.3	Espaces vectoriel quotient	2	1.2.2	Diagonalisation	10
1.1.4	Dualité	3	1.2.3	Réduction de FROBENIUS	10
1.1.5	Produit tensoriel d'espaces vectoriels	4	1.2.4	Réduction de JORDAN	13

Dans tout le cours, l'ensemble K désignera un corps quelconque.

1.1 STRUCTURE

1.1.1 Espaces vectoriel libre sur un ensemble

PROPOSITION 1.1. Soient X un ensemble et E un K -espace vectoriel. Alors les ensembles E^X des fonctions de X dans E et $E^{(X)}$ des fonctions de X dans E à support fini sont des espaces vectoriels.

◇ **REMARQUE.** Les espaces $K^{(\mathbb{N})}$ et $K[T]$ sont isomorphes par l'application $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i$.

DÉFINITION 1.2. L'espace $K^{(X)}$ est appelé K -espace vectoriel libre sur X .

PROPOSITION 1.3. Pour $x \in X$, on définit

$$e_x : \begin{cases} X \longrightarrow K, \\ y \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y = x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Alors $\{e_x \mid x \in X\}$ est une base de $K^{(X)}$ et les e_x sont deux à deux distinctes.

Preuve Soit $f \in K^{(X)}$. On pose $g = \sum_{x \in X} f(x)e_x \in \text{Vect}\{e_x \mid x \in X\}$. Pour tout $y \in X$, on a $g(y) = f(y)$, donc $f = g$. Dans la famille est génératrice. Soit $Y \subseteq X$ finie. On suppose que $\sum_{x \in Y} a_x e_x = 0$. Soit $x_0 \in Y$. Alors $\sum_{x \in Y} a_x e_x(x_0) = 0$, donc $a_{x_0} = 0$. Donc la famille est libre. □

◇ **REMARQUE.** L'application $x \in X \mapsto e_x \in K^{(X)}$ induit une bijection de X sur une base de $K^{(X)}$.

▷ **EXEMPLE.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $X = \{1, \dots, n\}$, les espaces $K^{(X)}$ et K^n sont isomorphes.

PROPOSITION 1.4. Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . On se donne $f: I \rightarrow F$ (on note $f(i) = f_i$). Alors il existe une unique application linéaire $\tilde{f}: E \rightarrow F$ telle que $\tilde{f}(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$.

COROLLAIRE 1.5. Soient X un ensemble et F un K -espace vectoriel. On se donne $f: X \rightarrow F$. Alors il existe une unique application linéaire $\tilde{f}: K^{(X)} \rightarrow F$ telle que $\tilde{f}(e_x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Preuve C'est la proposition précédente avec $\{e_i \mid i \in I\} = \{e_x \mid x \in X\}$. □

1.1.2 Somme de sous-espaces

DÉFINITION 1.6. Soient E un K -espace vectoriel et E_1, \dots, E_r des sous-espaces vectoriels de E . On considère

$$\Sigma : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_r \longrightarrow E, \\ (x_1, \dots, x_r) \longmapsto \sum_{i=1}^r x_i. \end{cases}$$

- On dit que E est la somme des E_i , notée $E = \sum_{i=1}^r E_i$, si cette application est surjective.
- On dit que les E_i sont en somme directe si Σ est injective.
- On dit que E est la somme directe des E_i , notée $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$, si Σ est un isomorphisme.

◇ **REMARQUE.** Si $r = 2$, les espaces E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. En effet, on a alors $\text{Ker } \Sigma = \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}$.

1.1.3 Espaces vectoriel quotient

DÉFINITION 1.7. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On définit sur E la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in F$. L'ensemble quotient E/\sim est noté E/F , appelé quotient de E par F . Pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est $\bar{x} = x + F = \{x + y \mid y \in F\}$. Alors $E/F = \{\bar{x} \mid x \in E\}$. La projection canonique sur E/F est l'application $\pi : x \in E \mapsto \bar{x} \in E/F$ qui est surjective.

PROPOSITION 1.8. Il existe une unique structure de K -espace vectoriel sur E/F telle que π soit linéaire.

Preuve • *Unicité.* On suppose qu'on a une telle structure. Alors pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in K$, on a $\pi(\lambda x + y) = \lambda\pi(x) + \pi(y)$, donc la structure est unique. Soient $\bar{x}, \bar{y} \in E/F$ et $\lambda \in K$. Soient $x, y \in E$ tels que $\bar{x} = \pi(x)$ et $\bar{y} = \pi(y)$. On pose alors $\lambda\bar{x} + \bar{y} = \pi(\lambda x + y)$. Montrons que la quantité $\pi(\lambda x + y)$ ne dépend pas du choix de x et y . Si $x' \sim x$ et $y' \sim y$, alors $\lambda x + y - (\lambda x' + y') = \lambda(x - x') + (y - y') \in F$, donc $\lambda x + y \sim \lambda x' + y'$, donc ces deux éléments ont la même image par π . D'où l'unicité.

• *Existence.* Il reste à vérifier que E/F muni de ces opérations est bien un K -espace vectoriel. Il admet bien un neutre $\bar{0} = F$. On vérifie ensuite les axiomes des espaces vectoriels. \square

▷ **EXEMPLE.** On se place dans \mathbb{R}^2 . Soit D une droite de \mathbb{R}^2 . L'espace \mathbb{R}^2/D sont toutes les droites parallèles à D et il est lui même une droite.

PROPOSITION 1.9 (propriété universelle du quotient). Soient E et E' deux K -espace vectoriel, $u : E \rightarrow E'$ linéaire et F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que $\text{Ker } u \supseteq F$. Alors il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : E/F \rightarrow E'$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait $\tilde{u}(\pi(x)) = u(x)$.

DIAGRAMME COMMUTATIF. On peut résumer cela par le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{u} & \\ E/F & & \end{array}$$

Ici, on dit que le diagramme commute car $\tilde{u} \circ \pi = u$.

Preuve Si $x \sim x'$, alors $u(x) = u(x')$ car $F \subseteq \text{Ker } u$. En particulier, l'application $\tilde{u} : \bar{x} \mapsto u(x)$ est bien définie sur E/F : elle ne dépend pas du choix de $x \in \bar{x}$. Par construction, on a donc $\tilde{u}(\pi(x)) = u(x)$ pour tout $x \in E$. Montrons que \tilde{u} est linéaire. Pour tous $x, y \in E$, on a $\tilde{u}(\pi(\bar{x} + \bar{y})) = \tilde{u}(\pi(x + y)) = u(x + y) = u(x) + u(y) = \tilde{u}(\bar{x}) + \tilde{u}(\bar{y})$. Idem pour le produit externe. \square

◇ **REMARQUE.** L'application

$$\left\{ \begin{array}{l} \{v \in \mathcal{L}(E, E') \mid F \subseteq \text{Ker } v\} \longrightarrow \mathcal{L}(E/F, E'), \\ u \longmapsto \tilde{u} \end{array} \right.$$

est bijective. Sa bijection réciproque est $v \mapsto v \circ \pi$.

COROLLAIRE 1.10. Soit $u : E \rightarrow E'$ linéaire. Alors u induit un isomorphisme de $E/\text{Ker } u$ vers $\text{Im } u$.

Preuve Soit $F = \text{Ker } u$. Il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : E/F \rightarrow E'$ telle que $\tilde{u}(\pi(x)) = u(x)$ pour tout $x \in E$. Alors $\text{Im } \tilde{u} = \text{Im } u$. Montrons que \tilde{u} est injective. Si $\bar{x} \in \text{Ker } \tilde{u}$, alors $\bar{x} = F$, i. e. $\bar{x} = \bar{0}$. Donc l'application \tilde{u} est un isomorphisme. \square

PROPOSITION 1.11. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel. Alors

$$\dim E/F + \dim F = \dim E.$$

Preuve On a $\dim F \leq \dim E$ et $\dim E/F \leq \dim E$ car l'image d'une famille génératrice de E par la projection canonique en est une de E/F . On peut supposer que F et E/F sont de dimension finie.

On fixe une base (f_1, \dots, f_k) de F et on fixe $x_1, \dots, x_r \in E$ tel que $(\pi(x_1), \dots, \pi(x_r))$ soit une base de E/F . Montrons que $(x_1, \dots, x_r, f_1, \dots, f_k)$ est une base de E . Montrons le caractère générateur. Soit $x \in E$. Il existe $a_1, \dots, a_r \in K$ tels que $\pi(x) = \sum a_i \pi(x_i)$, donc $x - \sum a_i x_i \in F$, donc il existe $b_1, \dots, b_k \in K$ tels que $x = \sum a_i x_i + \sum b_j f_j$. Donc la famille est génératrice. Montrons la liberté. Soient $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_k \in K$ tels que $\sum a_i x_i + \sum b_j f_j = 0$. En appliquant la projection, on a $\sum a_i \pi(x_i) = 0$, donc $a_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Il s'ensuit que $b_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Donc la famille est libre \square

THÉORÈME 1.12 (du rang). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u: E \rightarrow E'$ linéaire. Alors

$$\operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E.$$

Preuve On applique la proposition précédente appliquée à $F = \operatorname{Ker} u$ car $E/\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont isomorphes. \square

1.1.4 Dualité

DÉFINITION 1.13. Soit E un K -espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire sur E et à valeurs dans K . On note E^* l'ensemble des formes linéaire sur E , appelé dual de E .

DÉFINITION 1.14 (application linéaire transposée). Soient E et E' deux K -espace vectoriel et $u: E \rightarrow E'$ linéaire. On définit l'application

$${}^t u: \begin{cases} (E')^* \longrightarrow E^*, \\ \varphi \longmapsto \varphi \circ u, \end{cases}$$

appelée transposée de u .

PROPOSITION 1.15. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et (e_1, \dots, e_n) une base de E . On définit

$$e_i^*: \begin{cases} E \longrightarrow K, \\ e_j \longmapsto \delta_{i,j}, \end{cases} \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Alors (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de E^* , appelée base dual de (e_1, \dots, e_n) .

\diamond **REMARQUE.** Si $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, alors $e_i^*(x) = x_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Preuve Montrons que cette famille est génératrice. Soit $\varphi \in E^*$. On pose

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} E \longrightarrow K, \\ x \longmapsto \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(x). \end{cases}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\tilde{\varphi}(e_i) = \varphi(e_i)$. Par unicité, on a $\tilde{\varphi} = \varphi \in \operatorname{Vect} \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$. Montrons que cette famille est libre. Supposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en évaluant l'égalité en e_j , on a $0 = \lambda_j$. \square

\triangleright **EXEMPLE.** Soit $E = K_{n-1}[X]$. Alors pour tout $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, on a $(X^i)^*(P) = a_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

COROLLAIRE 1.16. Si E est de dimension finie, alors $\dim E = \dim E^*$.

CONTRE-EXEMPLE. Les espaces $(K[X])^*$ et $K^{\mathbb{N}}$ sont isomorphes car l'application est

$$\begin{cases} K^{\mathbb{N}} \longrightarrow (K[X])^*, \\ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i \right] \end{cases}$$

est injective et surjective. Or $(K[X])^*$ est de dimension dénombrable ce qui n'est pas le cas de $K^{\mathbb{N}}$. En effet, on suppose que K n'est pas dénombrable. Pour $\lambda \in K$, on considère $g_\lambda := (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors la famille $(g_\lambda)_{\lambda \in K}$ est libre et non dénombrable. Il reste à montrer le cas où K est dénombrable.

DÉFINITION 1.17. Soient E un K -espace vectoriel et $A \subset E$. L'ensemble

$$A^0 := \{\varphi \in E^* \mid A \subset \operatorname{Ker} \varphi\}$$

s'appelle l'orthogonal de A (pour la dualité).

LEMME 1.18. Si $A \subset E$, alors A^0 est un sous-espace vectoriel de E^* .

PROPOSITION 1.19. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $A \subset E$. Alors

$$\dim \operatorname{Vect} A + \dim A^0 = \dim E.$$

Preuve On peut supposer que A est un sous-espace vectoriel de E , noté F . Soient (x_1, \dots, x_r) une base de F et

$$\psi: \begin{cases} E^* \longrightarrow K^r, \\ \varphi \longmapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_r)). \end{cases}$$

Cette application est surjective et vérifie $\operatorname{Ker} \psi = F^0$. Le théorème du rang donne alors $r + \dim F^0 = \dim E^*$ avec $r = \dim F$ et $\dim E^* = \dim E$. \square

DÉFINITION 1.20. Soit E un K -espace vectoriel. Le bidual de E est l'ensemble $E^{**} := (E^*)^*$.

THÉORÈME 1.21. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. On note

$$\psi: \begin{cases} E \longrightarrow E^{**}, \\ x \longmapsto \varepsilon_x: \begin{cases} E^* \longrightarrow K, \\ \varphi \longmapsto \varphi(x). \end{cases} \end{cases}$$

Alors ψ est un isomorphisme.

Preuve Comme E et E^{**} sont de même dimension et la fonction ψ est linéaire, il suffit de montrer l'injectivité de ψ . Soit $x \in \text{Ker } \psi$. Par l'absurde, supposons que $x \neq 0$. On complète (x) en une base (x, x_2, \dots, x_n) de E . Soit $(x^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ la base duale. Alors $x^*(x) = 1 \neq 0$, donc $\varepsilon_x(x^*) \neq 0$ ce qui est absurde. Donc $x = 0$. \square

BASE ANTÉDUALE. Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , alors $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$ est une base de E^{**} , donc

$$(\psi^{-1}(\varphi_1^*), \dots, \psi^{-1}(\varphi_n^*))$$

est une base de E , appelée base antéduale de E de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

▷ **EXEMPLE (base de LAGRANGE).** Soit $E = K_{n-1}[X]$. Soient $x_1, \dots, x_n \in K$ deux à deux distincts. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application

$$\text{ev}_{x_i}: \begin{cases} E \longrightarrow K, \\ P \longmapsto P(x_i) \end{cases}$$

est linéaire. La famille $(\text{ev}_{x_1}, \dots, \text{ev}_{x_n})$ est libre dans E^* , donc c'est une base de E^* . Soit (L_1, \dots, L_n) sa base antéduale. Alors elle vérifie $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1.1.5 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

THÉORÈME 1.22. Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Alors il existe un K -espace vectoriel, noté $E \otimes F$, et une application bilinéaire

$$\otimes: \begin{cases} E \times F \longrightarrow E \otimes F, \\ (x, y) \longmapsto x \otimes y \end{cases}$$

tels que, pour tout K -espace vectoriel E' et toute application bilinéaire $b: E \times F \rightarrow E'$, il existe une unique application linéaire $\tilde{b}: E \otimes F \rightarrow E'$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad b(x, y) = \tilde{b}(x \otimes y).$$

Preuve • **Étape 1.** On considère $H = K^{(E \times F)}$. Une base de H est donnée par les éléments de $E \times F$ (on fait l'identification de la proposition 1.3). Dans H , on a $\lambda(x, y) \neq (\lambda x, \lambda y)$.

• **Étape 2.** Pour $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et $\lambda \in K$, on considère les éléments de H suivants :

$$\lambda(x, y) - (\lambda x, y), \quad \lambda(x, y) - (x, \lambda y) \quad \text{et} \quad (x + x', y) - (x, y) - (x', y'), \quad (x, y + y') - (x, y) - (x, y').$$

On considère le sous-espace vectoriel T de H engendré par tous ces éléments. On note $E \otimes F := H/T$ et on définit

$$\begin{cases} E \times F \longrightarrow H/T \\ (x, y) \longmapsto x \otimes y := \pi(x, y) \end{cases}$$

où π est l'injection canonique de H dans H/T . On vérifie que l'application $(x, y) \longmapsto x \otimes y$ est bilinéaire. Soient $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et $\lambda \in K$. Par définition, on a $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, y)$, donc $\lambda x \otimes y = \lambda \cdot (x \otimes y)$. De même, on a bien $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$ et $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$.

• **Étape 3.** Soient E' un K -espace vectoriel et $b: E \times F \rightarrow E'$ bilinéaire. Alors il existe une unique application linéaire $B: H \rightarrow E'$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad B((x, y)) = b(x, y).$$

Montrons que $T \subseteq \text{Ker } B$. Pour tous $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et $\lambda \in K$, on a

$$B(\lambda(x, y) - (\lambda x, y)) = \lambda B((x, y)) - B((\lambda x, y)) = \lambda b(x, y) - b(\lambda x, y) = 0.$$

On vérifie de même que l'application B s'annule sur toute la famille génératrice de T . Par propriété universelle du quotient, il existe une unique application linéaire $\tilde{b}: H/T \rightarrow E'$ telle que

$$\forall h \in H, \quad \tilde{b}(\pi(h)) = B(h).$$

En particulier, pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $\pi(x, y) = x \otimes y$, donc $\tilde{b}(x \otimes y) = B(x \otimes y) = b(x, y)$. L'application \tilde{b} est unique. En effet, la famille $(x \otimes y)_{(x, y) \in E \times F}$ engendre $E \otimes F$. \square

PROPOSITION 1.23. Soient E, F, E' et F' quatre espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, E')$ et $v \in \mathcal{L}(F, F')$. Alors il existe une unique application linéaire $u \otimes v: E \otimes F \rightarrow E' \otimes F'$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad (u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y).$$

Preuve L'application

$$\left| \begin{array}{l} E \times F \longrightarrow E' \otimes F' \\ (x, y) \longmapsto u(x) \otimes v(y) \end{array} \right.$$

est bilinéaire. Par propriété universelle, il existe une unique application linéaire $u \otimes v$ qui vérifie la condition. \square

PROPOSITION 1.24. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies, (e_1, \dots, e_n) une base de E et (f_1, \dots, f_m) une base de F . Alors la famille $\mathcal{F} := (e_i \otimes f_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est une base de $E \otimes F$.

Preuve Montrons qu'elle est génératrice. Il suffit de montrer que les $x \otimes y$ sont dans $\text{Vect } \mathcal{F}$. Soit $(x, y) \in E \times F$ qu'on note $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^m \mu_j f_j$. Alors $x \otimes y = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j e_i \otimes f_j$. Montrons qu'elle est libre. Supposons que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j = 0$. Pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, l'application $e_i^* \otimes f_j^*: E \otimes F \rightarrow K \otimes K$ vérifie

$$(e_i^* \otimes f_j^*) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{k,\ell} e_k \otimes f_\ell \right) = \lambda_{i,j},$$

donc $\lambda_{i,j} = 0$ (car l'application $(\lambda, \mu) \in K \times K \mapsto \lambda\mu \in K$ induit une application de $K \otimes K \rightarrow K$). \square

COROLLAIRE 1.25. Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Alors

$$\dim E \otimes F = (\dim E)(\dim F).$$

PROPOSITION 1.26. Soient E, F et G trois K -espaces vectoriels. Il existe un isomorphisme canonique de $(E \otimes F) \otimes G$ dans $E \otimes (F \otimes G)$, *i. e.* c'est l'unique application linéaire f vérifiant

$$\forall (x, y, z) \in E \times F \times G, \quad f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

Preuve Soit $z \in G$. On considère

$$\Phi_z: \left| \begin{array}{l} E \times F \longrightarrow E \otimes (F \otimes G), \\ (x, y) \longmapsto x \otimes (y \otimes z). \end{array} \right.$$

Alors l'application Φ_z est bilinéaire. Par propriété universelle du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\tilde{\Phi}_z: E \otimes F \rightarrow E \otimes (F \otimes G)$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \tilde{\Phi}_z(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z).$$

On considère

$$\Phi: \left| \begin{array}{l} (E \otimes F) \times G \longrightarrow E \otimes (F \otimes G), \\ (u, z) \longmapsto \tilde{\Phi}_z(u). \end{array} \right.$$

Alors l'application Φ est bilinéaire. Par propriété universelle du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\tilde{\Phi}: (E \otimes F) \otimes G \rightarrow E \otimes (F \otimes G)$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in E \times F \times G, \quad \tilde{\Phi}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z).$$

De même, on montre qu'il existe $\tilde{\Psi}: E \otimes (F \otimes G) \rightarrow (E \otimes F) \otimes G$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in E \times F \times G, \quad \tilde{\Psi}(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Mais alors $\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi}$ coïncident avec l'identité de $(E \otimes F) \otimes G$ sur la famille génératrice $\{(x \otimes y) \otimes z\}$ et donc sur tout cet espace. Donc les applications $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre, donc ce sont des isomorphismes. \square

◇ REMARQUE. Soit E' un K -espace vectoriel. On obtient que, pour toute application trilinéaire $t: E \times F \times G \rightarrow E'$, il existe une unique application linéaire $\tilde{t}: (E \otimes F) \otimes G \rightarrow E'$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in E \times F \times G, \quad \tilde{t}((x \otimes y) \otimes z) = t(x, y, z).$$

Cela justifie donc que l'on note $E \otimes F \otimes G$. On pourrait aussi construire cet espace comme quotient de $K^{(E \times F \times G)}$ par le sous-espace vectoriel T engendré par les relations choisies de sorte que l'application

$$\left| \begin{array}{l} E \times F \times G \longrightarrow K^{(E \times F \times G)} / T, \\ (x, y, z) \longmapsto x \otimes y \otimes z := \pi(x, y, z) \end{array} \right.$$

soit trilinéaire. Plus généralement :

THÉORÈME 1.27. Soient E_1, \dots, E_r des K -espaces vectoriels. Alors il existe un K -espace vectoriel $E_1 \otimes \dots \otimes E_r$ et une application r -linéaire

$$\begin{cases} E_1 \times \dots \times E_r \longrightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_r, \\ (x_1, \dots, x_r) \longmapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_r \end{cases}$$

tels que, pour tout K -espace vectoriel E' et toute application r -linéaire $f: E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow E'$, il existe une unique application linéaire $\tilde{f}: E_1 \otimes \dots \otimes E_r \rightarrow E'$ telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \dots \times E_r, \quad \tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = f(x_1, \dots, x_r).$$

Preuve Montrons l'unicité de l'espace à isomorphisme près. Soit F un K -espace vectoriel. On suppose que l'on dispose d'une application r -linéaire $\varphi: E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$ vérifiant, pour toute application r -linéaire $f: E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow E'$, il existe une unique application linéaire $\tilde{f}: F \rightarrow E'$ telle que $\tilde{f} \circ \varphi = f$. Alors il existe un unique isomorphisme $\Phi: E_1 \otimes \dots \otimes E_r \rightarrow F$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \dots \times E_r, \quad \Phi(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = \varphi(x_1, \dots, x_r).$$

D'où l'unicité. □

PROPOSITION 1.28. Soient E_1, \dots, E_r des K -espaces vectoriels de dimension finie. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, soit $(e_{i,1}, \dots, e_{i,n_i})$ une base de E_i . Alors $\{e_{1,j_1} \otimes \dots \otimes e_{r,j_r} \mid \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, 1 \leq j_i \leq n_i\}$ est une base de $E_1 \otimes \dots \otimes E_r$.

1.1.6 Puissances extérieures

DÉFINITION 1.29. Soient E et E' deux K -espaces vectoriels et $r \in \mathbb{N}^*$. Une application r -linéaire $f: E^r \rightarrow E'$ est dite alternée si, pour tout $x := (x_1, \dots, x_r) \in E^r$, s'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$, alors $f(x) = 0$.

◇ REMARQUE. Si $f: E^r \rightarrow E'$ est une application r -linéaire, alors il existe une application linéaire $\tilde{f}: E^{\otimes r} \rightarrow E'$ telle que $\tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = f(x_1, \dots, x_r)$ pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$.

LEMME 1.30. Soit $f: E^r \rightarrow E'$ une application r -linéaire. Alors l'application f est alternée si et seulement l'application \tilde{f} s'annule sur le sous-espace vectoriel de $E^{\otimes r}$ engendré par les éléments $x_1 \otimes \dots \otimes x_r$ vérifiant qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$.

Preuve Si f est alternée, alors $\tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. Réciproquement, si \tilde{f} s'annule sur ce sous-espace vectoriel, alors elle s'annule en particulier sur les éléments $x_1 \otimes \dots \otimes x_r$ vérifiant qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$ et donc $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ s'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. □

DÉFINITION 1.31. On note $A := \text{Vect} \{x_1 \otimes \dots \otimes x_r \in E^{\otimes r} \mid \exists i \neq j, x_i = x_j\}$. On appelle r -ième puissance extérieure de E l'espace vectoriel $\Lambda^r E := E^{\otimes r} / A$. On note $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ l'image de $x_1 \otimes \dots \otimes x_r$ par la projection canonique de $E^{\otimes r}$ sur $\Lambda^r E$.

THÉORÈME 1.32. Soient E et E' deux K -espaces vectoriels et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors pour toute application r -linéaire alternée $f: E^r \rightarrow E'$, il existe une unique application linéaire $\bar{f}: \Lambda^r E \rightarrow E'$ telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in E^r, \quad \bar{f}(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = f(x_1, \dots, x_r).$$

Preuve Soit $f: E^r \rightarrow E'$ une application r -linéaire alternée. On note $\tilde{f}: E^{\otimes r} \rightarrow E'$ l'unique application linéaire telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in E^r, \quad \tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = f(x_1, \dots, x_r).$$

On a $A \subset \text{Ker } \tilde{f}$, donc il existe une unique application linéaire $\bar{f}: \Lambda^r E \rightarrow E'$ telle que $\tilde{f} = \bar{f} \circ \pi$ où π est la projection de $E^{\otimes r}$ sur $\Lambda^r E$. D'où le résultat. □

COROLLAIRE 1.33. On note $A_r(E, E')$ l'ensemble des applications r -linéaire alternée de E^r dans E' . Alors

$$\begin{cases} A_r(E, E') \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^r E, E'), \\ f \longmapsto \bar{f} \end{cases}$$

est un isomorphisme.

LEMME 1.34. Si $\bar{f} \in \mathcal{L}(\Lambda^r E, E')$, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in E^r, \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_r, \quad \bar{f}(x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(r)}) = \epsilon(\sigma) \bar{f}(x_1 \wedge \dots \wedge x_r).$$

Preuve Comme les transpositions engendrent \mathfrak{S}_r , il suffit de montrer le résultat pour $\sigma = (1\ 2)$. Soit $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$. Par définition de la puissance extérieure, on a $0 = (x_1 + x_2) \wedge (x_1 - x_2) \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_r$. En développant, on obtient $0 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_r + x_2 \wedge x_1 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_r$. D'où le résultat. \square

PROPOSITION 1.35. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, (e_1, \dots, e_n) une base de E et $r \in \mathbb{N}^*$. Si $I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ possède r éléments, on note $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ avec $i_1 < \dots < i_r$ et on pose $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$. Alors la famille $\{e_I \mid I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket, \#I = r\}$ est une base de $\Lambda^r E$.

Preuve Montrons que cette famille est génératrice. La famille $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \mid (i_1, \dots, i_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket^r\}$ forme une base de $E^{\otimes r}$, donc la famille $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid (i_1, \dots, i_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket^r\}$ est génératrice de $\Lambda^r E$. Soit $(i_1, \dots, i_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket^r$. S'il existe $j \neq j'$ tels que $i_j = i_{j'}$, alors $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = 0$. Si i_1, \dots, i_r sont deux à deux distincts et $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, alors $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = \epsilon(\sigma)(e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\sigma(r)}})$. Ainsi, les e_I forment une sous-famille génératrice.

Montrons qu'elle est libre. Pour toute $I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\#I = r$, on souhaite exhiber une forme linéaire $\theta_I: \Lambda^r E \rightarrow K$ vérifiant $\theta_I(e_J) = \delta_{I,J}$ pour toute $J \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\#J = r$. On note $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ avec $i_1 < \dots < i_r$. Soit $\Theta_I: E^{\otimes r} \rightarrow K$ l'unique forme linéaire telle que, pour tout $(j_1, \dots, j_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket^r$, on ait

$$\Theta_I(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{j_1, \dots, j_r\} \neq I, \\ \epsilon(\sigma) & \text{si } \{j_1, \dots, j_r\} = I \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_r \text{ telle que } \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, j_k = i_{\sigma(k)}. \end{cases}$$

Alors l'application Θ_I s'annule sur A . En effet, soient $x_1, x_3, \dots, x_r \in E$. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket \setminus \{2\}$, on note

$$x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} e_j.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Theta_I(x_1 \otimes x_1 \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_r) &= \sum_{j_1, \dots, j_r \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_{1,j_1} \lambda_{1,j_2} \lambda_{3,j_3} \dots \lambda_{r,j_r} \Theta_I(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \epsilon(\sigma) \lambda_{1,\sigma(1)} \lambda_{1,\sigma(2)} \dots \lambda_{r,\sigma(r)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \epsilon(\sigma \tau) \lambda_{1,\sigma\tau(1)} \dots \lambda_{r,\sigma\tau(r)} \quad \text{avec } \tau = (1\ 2) \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \epsilon(\sigma) \lambda_{1,\sigma(1)} \dots \lambda_{r,\sigma(r)}, \end{aligned}$$

D'où $\theta_I(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = -\theta_I(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)$. Donc l'application Θ_I s'annule sur I , donc elle induit une forme linéaire $\theta_I: \Lambda^r E \rightarrow K$ vérifiant $\theta_I(e_J) = \delta_{I,J}$ pour toute $J \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\#J = r$. On prend ensuite une combinaison linéaire des e_i nulle et, en appliquant les θ_I , on montre que chaque coefficient est nul. D'où la liberté. \square

▷ **EXEMPLE.** On se place dans le cas $n = 2$. Soit (e_1, e_2) une base de E . Soient $x, y \in E$. On note $x = ae_1 + be_2$ et $y = ce_1 + de_2$. Alors

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (ae_1 + be_2) \wedge (ce_1 + de_2) \\ &= ace_1 \wedge e_1 + ade_1 \wedge e_2 + bce_2 \wedge e_2 + bde_2 \wedge e_1 \\ &= (ad - bc)e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1.36. Soient E un K -espace vectoriel et $r \in \mathbb{N}$. Alors

$$\dim \Lambda^r E = \binom{n}{r}.$$

▷ **EXEMPLE.** Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, (e_1, \dots, e_n) une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$. Par multilinéarité, on a

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \dots \wedge x_n &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1,1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n,n} e_{i_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} e_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \epsilon(\sigma) e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma) \right)}_{(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)^*(x_1 \wedge \cdots \wedge e_n)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

DÉFINITION 1.37. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ de E . Alors $(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$ est une base de $\Lambda^n E$ et l'unique élément de sa base duale est noté $\det_{\mathcal{B}}$. Il vérifie

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

LEMME 1.38. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $r \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$. Alors (x_1, \dots, x_r) est liée si et seulement si $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = 0$.

Preuve On suppose que la famille est liée. Alors il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $x_i \in \text{Vect} \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r\}$ qu'on écrit $x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$, donc

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_r = 0.$$

Réciproquement on suppose que la famille est libre. On la complète en une base (x_1, \dots, x_n) de E . Or la base correspondante de $\Lambda^r E$ contient le vecteur $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ qui est donc non nul. \square

PROPOSITION 1.39. Soient E un K -espace vectoriel, $r \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E . Alors cette famille est de rang r si et seulement si

- il existe $i_1, \dots, i_r \in I$ tels que $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_r} \neq 0$;
- pour tout $k > r$ et pour tous $i_1, \dots, i_k \in I$, on a $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} = 0$.

Preuve On se place en dimension finie. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . On considère la base des e_I de $\Lambda^r E$ donnée par le théorème 1.35. Soit $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$. Pour $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$. On a

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \cdots \wedge x_r &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_r,r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \\ &= \sum_{\sigma: \llbracket 1, r \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(r),r} e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)}. \end{aligned}$$

Si une application $\sigma: \llbracket 1, r \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ n'est pas injective, alors $e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)} = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \cdots \wedge x_r &= \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \# I = r}} \sum_{\substack{\sigma: \llbracket 1, r \rrbracket \rightarrow I \\ \text{injective}}} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(r),r} e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(r)} \\ &= \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \# I = r \\ I = \{i_1 < \cdots < i_r\}}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} a_{i_{\sigma(1)},1} \cdots a_{i_{\sigma(r)},r} \varepsilon(\sigma) e_I. \end{aligned}$$

Donc le coefficient de $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ sur l'élément e_I est

$$e_I^*(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) a_{i_{\sigma(1)},1} \cdots a_{i_{\sigma(r)},r}.$$

Donc $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = 0$ si et seulement si tous les mineurs de taille r de la matrice $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont nuls. D'où le résultat. \square

◇ **REMARQUE.** On se place dans $E := \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique \mathcal{B} . Alors l'espace $\Lambda^2 E$ est de dimension 3 et il est isomorphe à \mathbb{R}^3 par l'application

$$\left| \begin{array}{l} \Lambda^2 E \longrightarrow E^*, \\ x \wedge y \longmapsto \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}, \\ z \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(z \wedge y \wedge x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

que l'on compose avec l'isomorphisme

$$\left| \begin{array}{l} E^* \longrightarrow E, \\ e_i^* \longmapsto e_i. \end{array} \right.$$

On identifie $\varphi \in E^*$ à l'unique vecteur $v \in E$ tel que $\varphi = \langle \cdot, v \rangle$. Concrètement, si x et y sont fixés, alors il existe un unique $v_{x,y} \in E$ tel que

$$\forall z \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \langle z, v_{x,y} \rangle.$$

L'application

$$\begin{cases} \Lambda^2 E \longrightarrow E, \\ x \wedge y \longmapsto v_{x,y} \end{cases}$$

est un isomorphisme, appelé le produit vectoriel sur \mathbb{R}^3 . Le même argument permet de définir le produit vectoriel sur \mathbb{R}^n en identifiant $\Lambda^{n-1} \mathbb{R}^n$ à \mathbb{R}^n .

DÉFINITION 1.40. Soient E et E' deux K -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, E')$ et $r \in \mathbb{N}$. On définit

$$\Lambda^r u: \begin{cases} \Lambda^r E \longrightarrow \Lambda^r E', \\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \longmapsto u(x_1) \wedge \cdots \wedge u(x_r). \end{cases}$$

Cette définition est correcte par la propriété universelle de la puissance extérieure.

PROPOSITION 1.41. Soient $u \in \mathcal{L}(E, E')$, $v \in \mathcal{L}(E', E'')$ et $r \in \mathbb{N}$. Alors $\Lambda^r(v \circ u) = \Lambda^r v \circ \Lambda^r u$.

Preuve Il suffit de voir que $\Lambda^r(v \circ u)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \Lambda^r v \circ \Lambda^r u(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)$ pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$. C'est vrai d'après les définitions de $\Lambda^r u$ et $\Lambda^r v$. \square

DÉFINITION 1.42. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $\Lambda^n u$ de $\Lambda^n E$ dans lui-même est une homothétie dont le rapport s'appelle le déterminant de u , noté $\det u$. On peut fixer une base et le calculer : le résultat ne dépend de ce choix.

- COROLLAIRE 1.43.**
1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u n'est pas un isomorphisme si et seulement si $\det u = 0$.
 2. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\det(u \circ v) = (\det u)(\det v)$.
 3. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(K)$. Alors $\det(P^{-1}MP) = \det M$.

1.2 RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1.2.1 Polynômes d'endomorphismes

PROPOSITION 1.44 (*propriété universelle d'une K -algèbre*). Soient K un corps, A une K -algèbre et $a \in A$. Alors il existe un unique morphisme de K -algèbre $\varphi_a: K[X] \rightarrow A$ tel que $\varphi_a(X) = a$. Il vérifie

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \quad \varphi_a\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i X^i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i a^i.$$

Cette application linéaire est aussi un morphisme d'anneaux. En général, si $P \in K[X]$, on note $P(a) := \varphi_a(P)$.

Soit E un K -espace vectoriel. Alors $\mathcal{L}(E)$ est une K -algèbre pour les lois $+$ et \circ . Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, d'après la proposition précédente, on sait donner un sens à $P(u)$. Dans toute la suite, l'espace E sera un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION 1.45. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique polynôme unitaire $\pi_u \in K[X]$ tel que $\text{Ker } \varphi_u = \pi_u K[X]$. Le polynôme π_u est appelé polynôme minimal de u .

Preuve L'espace $K[X]$ est de dimension infinie et l'espace $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, donc l'application φ_u n'est pas injective, donc le noyau $\text{Ker } \varphi_u$ est un idéal de $K[X]$. Or l'anneau $K[X]$ est principal, donc il existe un unique polynôme unitaire $\pi_u \in K[X]$ tel que $\text{Ker } \varphi_u = \pi_u K[X]$. \square

THÉORÈME 1.46 (*lemme des noyaux*). Soient E un K -espace vectoriel, $P_1, \dots, P_r \in K[X]$ deux à deux premiers entre eux et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\text{Ker } P_1 \cdots P_r(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(u).$$

Preuve On suppose que $r = 2$. Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, le théorème de BÉZOUT affirme qu'il existe $A, B \in K[X]$ tels que $AP_1 + BP_2 = 1$. Alors $A(u)P_1(u) + B(u)P_2(u) = \text{id}$. Soit $x \in \text{Ker } P(u)$. On note

$$x_2 := A(x)P_1(u)(x) \quad \text{et} \quad x_1 := B(u)P_2(u)(x).$$

On a $x = x_1 + x_2$ avec $P_1(u)(x_1) = P_1(u)(x_2) = 0$. D'où

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u).$$

De plus, si $x \in \text{Ker } P_1(u) \cap \text{Ker } P_2(u)$, alors $x = 0 + 0 = 0$. On a donc montré que

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u).$$

On procède ensuite par récurrence sur r . □

◇ REMARQUE. D'après la preuve, les projections sur les espaces $\text{Ker } P_i(u)$ sont des polynômes en u .

THÉORÈME 1.47 (CAYLEY-HAMILTON). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\chi_u := \det(X \text{id} - u)$. Alors $\chi_u(u) = 0$.

Preuve Soient M la matrice de u dans une base de E et $C := XI_n - M$. Alors

$${}^t(\text{Com } C)C = \chi_u(X)I_n.$$

Les coefficients de la matrice ${}^t\text{Com } C$ sont des polynômes en X de degré inférieur ou égal à $n - 1$. On note

$${}^t\text{Com } C = A_0 + \dots + A_{n-1}X^{n-1} \quad \text{et} \quad \chi_u = a_0 + \dots + a_nX^n.$$

Ainsi, on obtient le système

$$\begin{cases} a_0I_n = -A_0M, & (0) \\ a_1I_n = A_0 - A_1M, & (1) \\ \vdots & \\ a_nI_n = A_{n-1}. & (n) \end{cases}$$

En multipliant chaque ligne (i) par M^i et en sommant, on obtient $\chi_u(M) = 0$. □

1.2.2 Diagonalisation

DÉFINITION 1.48. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle valeur propre tout $\lambda \in K$ tel que $u - \lambda \text{id}$ ne soit pas injective. Pour une valeur propre λ , on appelle vecteur propre associé à λ tout vecteur de $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \setminus \{0\}$.

LEMME 1.49. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) λ est une valeur propre de u ,
- (ii) $\chi_u(\lambda) = 0$,
- (iii) $\pi_u(\lambda) = 0$,

DÉFINITION 1.50. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice de u dans cette base, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, soit diagonale.

THÉORÈME 1.51. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
- (iii) π_u est scindé à racines simples ;
- (iv) χ_u est scindé et, pour tout $\lambda \in K$, la dimension de $\text{Ker}(u - \lambda \text{id})$ est l'ordre de multiplicité de λ dans χ_u .

◇ REMARQUE. Si deux endomorphismes u et v ont les mêmes polynômes minimal et caractéristique et leur polynôme minimal est scindé à racines simples, alors u et v sont semblables. La réciproque est fautive : les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ont les mêmes polynômes caractéristique et minimale, respectivement X^4 et X^2 , mais elles ne sont pas semblables car leurs rangs diffèrent.

1.2.3 Réduction de FROBENIUS

DÉFINITION 1.52. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que

$$\mathcal{B} := (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$$

soit une base de E . Un tel x s'appelle un vecteur cyclique pour u . Dans une telle base, la matrice de u est de la

forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = C_P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

Un telle matrice est appelée matrice compagnon associée au polynôme

$$P := X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$$

et sera notée C_P .

LEMME 1.53. Soit $P \in K[X]$. Alors $\chi_{C_P} = P$.

Preuve On développe le déterminant par rapport à la dernière colonne. □

DÉFINITION 1.54. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On appelle polynôme minimal de u en x l'unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in K[X]$ de degré minimal tel que $\pi_{u,x}(u)(x) = 0$.

◇ REMARQUE. Pour tout $x \in E$, on a $\pi_{u,x} \mid \pi_u$ et, si $(x, u(x), \dots, u^{m-1}(x))$ est libre, alors $\deg \pi_{u,x} \geq m$.

LEMME 1.55. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

Preuve On suppose qu'il existe $P \in K[X]$ irréductible et $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\pi_u = P^r$. Pour tout $x \in E$, comme $\pi_{u,x} \mid \pi_u$, il existe $s \leq r$ tel que $\pi_{u,x} = P^s$. Par l'absurde, si $P^{r-1}(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$, alors $\pi_u \mid P^{r-1}$ ce qui est impossible. Donc il existe $x \in E$ tel que $P^{r-1}(u)(x) \neq 0$ et $P^r(u)(x) = 0$. Ainsi, on a $\pi_{u,x} = P^r = \pi_u$.

On revient au cas général. On écrit $\pi_u = P_1^{r_1} \cdots P_s^{r_s}$ où les polynômes P_i sont irréductibles et distincts et les entiers r_i sont supérieurs à 1. Le lemme des noyaux donne

$$E = \bigoplus_{i=1}^s \underbrace{\text{Ker } P_i^{r_i}(u)}_{E_i}.$$

Soit $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$. Notons u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i . Alors $\pi_{u_i} = P_i^{r_i}$. Le polynôme $P_i^{r_i}$ annule bien u_i . Si $P_i^{r_i-1}(u_i)(x) = 0$ pour tout $x \in E_i$, alors $P_i^{r_i-1}(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$, mais alors $(P_1^{r_1} \cdots P_i^{r_i-1} \cdots P_s^{r_s})(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$ ce qui est absurde par minimalité de π_u . Donc il existe $x_i \in E_i$ tel que $\pi_{u_i, x_i} = P_i^{r_i}$. Soient $(x_1, \dots, x_s) \in E_1 \times \cdots \times E_s$ et $x := x_1 + \cdots + x_s$. Soit $P \in K[X]$. Par stabilité des espaces E_i , on a

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^s P(u)(x_i).$$

Si $P(u)(x) = 0$, alors $P_i^{r_i} \mid P$ pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, donc $\pi_u \mid P$ car les polynômes P_i sont distincts et premiers entre eux deux à deux. D'où $\pi_{u,x} = \pi_u$. □

PROPOSITION 1.56. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est cyclique si et seulement si $\chi_u = \pi_u$.

Preuve On suppose que u est cyclique. Soit $x \in E$ tel que $\mathcal{B} := (x, \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E . Alors

$$\chi_u = \pi_{u,x} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

et les scalaires a_i sont les coefficients dans la matrice de u dans \mathcal{B} .

Réciproquement, on suppose que $\chi_u = \pi_u$. Soit $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. Alors la famille $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est libre car $\deg \pi_{u,x} = \deg \chi_u = \dim E$. □

THÉORÈME 1.57 (*décomposition de FROBENIUS*). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une unique famille de polynômes P_1, \dots, P_r unitaires et une famille de sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_r de E stables par u telles que

- $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$,
- $P_r \mid \cdots \mid P_1$,
- pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'endomorphisme u induit sur E_i un endomorphisme cyclique de polynôme P_i .

De plus, il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}.$$

Preuve • *Existence.* S'il existe une telle décomposition, alors $P_1 = \pi_u$. Soit $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. L'espace

$$F := \text{Vect} \{u^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

est un sous-espace vectoriel stable par u . En notant $d := \deg \pi_u$, la famille $\mathcal{F} := (x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est une base de F (la division euclidienne de X^i par π_u s'écrit $X^i = Q\pi_u + R$ avec $\deg R < d$, donc $u^i(x) = R(u)(x)$ ce qui montre la caractère générateur et on montre aisément la liberté).

On cherche un supplémentaire de F stable par u afin de faire une récurrence. L'espace F est de dimension d . Si $F = E$, alors u est cyclique, c'est clair. Sinon montrons que F admet un supplémentaire stable par u . On complète la famille \mathcal{F} en une base de E et on considère $\varphi \in E^*$ l'élément de la base duale associée qui vérifie $\varphi(u^{d-1}(x)) = 1$. On considère

$$\Gamma := \text{Vect} \{\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, {}^t u^{d-1}(\varphi)\} \subset E^*.$$

Montrons que (i) Γ est stable par ${}^t u$ et que (ii) l'endomorphisme induit par ${}^t u$ sur Γ est cyclique de polynôme minimal π_u . Pour montrer le point (i), il suffit de montrer que ${}^t u({}^t u^{d-1}(\varphi)) \in \Gamma$. En notant $\pi_u = X^d - \dots - a_0$, on a

$${}^t u({}^t u^{d-1}(\varphi)) = \varphi \circ u^d = \varphi \circ \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i \right) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i {}^t u^i(\varphi) \in \Gamma.$$

Montrons le point (ii). Il suffit de montrer que $(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, {}^t u^{d-1}(\varphi))$ est une base de Γ . Il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1} \in K$ tels que $\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i {}^t u^i(\varphi) = 0$. En évaluant cette relation en x , on obtient

$$\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \varphi(u^i(x)) = 0,$$

donc $\lambda_{d-1} = 0$. En appliquant ${}^t u$ à la relation

$$\sum_{i=0}^{d-2} \lambda_i {}^t u^i(\varphi) = 0$$

et en évaluant en x , on obtient $\lambda_{d-2} = 0$. Par récurrence, on montre ainsi que $\lambda_{d-i} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Ce qui montre la liberté de la famille. De plus, on a $\pi_u({}^t u)(\psi) = \psi \circ \pi_u(u) = 0$ pour tout $\psi \in E^*$, donc l'endomorphisme ${}^t u$ est annulé par π_u . Ainsi, l'endomorphisme induit par ${}^t u$ sur Γ est cyclique de polynôme minimal π_u et donc φ est un vecteur cyclique.

On considère

$$G := \{y \in E \mid \forall \psi \in \Gamma, \psi(y) = 0\}.$$

Montrons que (iii) G est stable par u et que (iv) $F \oplus G = E$. Montrons (iii). Pour tout $y \in G$ et tout $\psi \in \Gamma$, on a $\psi(u(y)) = {}^t u(\psi)(y) = 0$, donc $u(y) \in G$. D'où la stabilité.

Montrons (iv). D'abord, montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $y \in F \cap G$ qu'on note $y = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i u^i(x)$. On a $0 = \varphi(y) = \lambda_{d-1}$, donc $0 = {}^t u(\varphi)(y) = \lambda_{d-2}$. Ainsi de suite, on montre que $\lambda_{d-i-1} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Donc $y = 0$. De plus, on a $G = \Psi^{-1}(\Gamma^0)$ où l'application $\Psi: E \rightarrow E^{**}$ est l'isomorphisme canonique et Γ^0 est l'orthogonal de Γ pour la dualité (cf. définition 1.17) ce qui montre que $\dim F + \dim G = \dim E$, donc $F \oplus G = E$.

Comme F et G sont stables par u , l'endomorphisme induit par u sur F est cyclique de polynôme minimal π_u et l'endomorphisme induit par u sur G est annulé par π_u , donc son polynôme minimal divise π_u . On conclut ensuite par récurrence. Ceci montre l'existence.

• *Unicité.* Par l'absurde, supposons que deux familles **distinctes** (P_1, \dots, P_r) et (Q_1, \dots, Q_s) conviennent avec les décompositions associées

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E_i \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{j=1}^s F_j.$$

On a nécessairement $P_1 = Q_1 = \pi_u$. Soit un entier $i \in \llbracket 2, \min(r, s) \rrbracket$ minimal tel que $P_i \neq Q_i$. Un tel entier existe car, comme les deux familles sont distinctes, on a

$$\dim E = \sum_{i=1}^r \deg P_i = \sum_{j=1}^s \deg Q_j.$$

Comme les sous-espaces vectoriels sont stables par u , pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on a

$$P_i(u)(E) = \bigoplus_{k=1}^r P_i(u)(E_k) = \bigoplus_{j=1}^s P_i(u)(F_j).$$

Si $j < i$, alors les endomorphismes engendré par u sur E_j et F_j sont semblables car ils sont cycliques de polynôme minimal $P_j = Q_j$, donc $\dim P_i(u)(E_j) = \dim P_i(u)(F_j)$. Or pour tout $k \geq i$, on a $P_i(u)(E_k) = \{0\}$, donc

$$\dim P_i(u)(E) = \sum_{k=1}^{i-1} \dim P_i(u)(E_k) = \sum_{j=1}^{i-1} \dim P_i(u)(F_j) + \sum_{j=i}^s \dim P_i(u)(F_j),$$

donc

$$\sum_{j=i}^s \dim P_i(u)(F_j) = 0,$$

donc les sous-espaces vectoriels $P_i(u)(F_j)$ sont nuls pour $j \in \llbracket i, s \rrbracket$, donc l'endomorphisme $P_i(u)$ s'annule sur tout les espaces F_j avec $j \in \llbracket i, s \rrbracket$, donc $Q_i \mid P_i$. De même, en échangeant les rôles de P_i et Q_i , on montre que $P_i \mid Q_i$ et donc $Q_i = P_i$ ce qui est absurde. D'où l'unicité. \square

DÉFINITION 1.58. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle invariants de similitude de u les polynômes P_1, \dots, P_r donnés par le théorème précédent.

PROPOSITION 1.59. Deux endomorphismes sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

Preuve Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. S'ils ont les mêmes invariants de similitudes, alors ils sont semblables à la même matrice, donc ils sont semblables. Réciproquement, on suppose qu'ils sont semblables. Dans des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' convenables, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} C_{Q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{Q_s} \end{pmatrix}.$$

Comme ces matrices sont semblables, la matrice

$$\begin{pmatrix} C_{Q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{Q_s} \end{pmatrix}$$

est une forme réduite de u avec des blocs diagonaux compagnons et les bonnes relations de divisibilité. Par unicité, on a donc $r = s$ et $(P_1, \dots, P_r) = (Q_1, \dots, Q_r)$. Finalement, les endomorphisme u et v ont les mêmes invariants de similitude. \square

APPLICATIONS. Pour montre que u et ${}^t u$ sont semblables, il suffit de le faire pour u cyclique.

PROPOSITION 1.60. Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et L un corps contenant K tels

$$\exists P \in \text{GL}_n(L), \quad PMP^{-1} = M'.$$

Alors M et M' sont semblables.

Preuve Une décomposition de FROBENIUS de M sur K en est aussi une sur L . Par unicité, comme les invariants de similitudes de M et M' sont les mêmes sur L , ce sont les mêmes sur K . \square

QUESTIONS OUVERTS. Comment calculer les invariants de similitudes? Comment calculer une décomposition de FROBENIUS?

1.2.4 Réduction de JORDAN

DÉFINITION 1.61. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

PROPOSITION 1.62. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors il existe une unique famille d'entier n_1, \dots, n_k et une base \mathcal{B} de E telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k} \end{pmatrix}$$

où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice J_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant uniquement des 1 sur la sur-diagonale.

Preuve Comme u est nilpotente, son polynôme caractéristique est $\chi_u = X^n$ avec $n := \dim E$. Soient P_1, \dots, P_k les invariants de similitudes de u . On a $P_1 \cdots P_k = \chi_u = X^n$. Donc pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il existe $n_i \in \mathbb{N}^*$ tel que

$P_i = X^{n_i}$. On remarque que $n_1 \geq \dots \geq n_k$ et $n_1 + \dots + n_k = n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice C_{X^k} est semblable à J_k (il suffit de renverser l'ordre des vecteurs de la base). D'où le résultat. \square

◇ REMARQUE. Dans une telle décomposition de u , le nombre de blocs de la forme J_k est égal à $k = \dim \text{Ker } u$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, le nombre de blocs de taille i est égal à $\delta_i := \dim \text{Ker } u^i - \dim \text{Ker } u^{i-1}$.

DÉFINITION 1.63. Pour $\lambda \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_{\lambda,n} := \lambda I_n + J_n$.

THÉORÈME 1.64 (réduction de JORDAN). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé. Alors il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $J_{\lambda,k}$. Les blocs qui apparaissent ne dépendent pas du choix de la base.

Preuve On écrit le polynôme caractéristique sous la forme

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp } u} (X - \lambda)^{m_\lambda}.$$

On peut alors décomposer E sous la forme

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } u} F_\lambda(u) \quad \text{avec} \quad F_\lambda(u) := \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{m_\lambda}.$$

Pour toute $\lambda \in \text{Sp } u$, le sous-espace vectoriel $F_\lambda(u)$ est stable par u et l'endomorphisme u_λ induit par u sur λ est telle que $u_\lambda - \lambda \text{id}$ soit nilpotent d'indice m_λ . Ainsi il existe une base \mathcal{B}_λ de $F_\lambda(u)$ dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(u_\lambda - \lambda \text{id}) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_r} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k_1 \geq \dots \geq k_r \quad \text{et} \quad J_k := J_{k,0}.$$

Dans cette même base, on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(u_\lambda) = \begin{pmatrix} J_{\lambda,k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda,k_r} \end{pmatrix}.$$

En concaténant les bases \mathcal{B}_λ , on obtient une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice de u est de la forme annoncée.

Montrons l'unicité. On suppose que, dans une base \mathcal{B}' , la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la formes $J_{\mu,k}$. Soit F un sous-espace vectoriel stable sur lequel la matrice de l'endomorphisme induit est $J_{\mu,k}$. Alors μ est valeur propre, $k \leq m_\mu$ et $F \subset F_\mu(u)$. Les vecteurs de la base \mathcal{B}' correspondant à une même valeur propre μ sont au nombre de m_μ en calculant le polynôme caractéristique de la matrice. Ces vecteurs forment une base de $F_\mu(u)$, donc il suffit de montrer que les tailles des blocs de la forme $J_{\mu,k}$ à μ fixé sont indépendants du choix de la base. Or sur $F_\mu(u)$, l'endomorphisme $u_\mu - \mu \text{id}$ est nilpotent, donc les tailles des blocs $J_{\mu,k}$ sont les tailles des blocs nilpotents intervenant dans une décomposition de $u_\mu - \mu \text{id}$. Ces tailles sont entièrement déterminées grâce au théorème de JORDAN pour les endomorphismes nilpotents. \square

◇ REMARQUE. Si l'endomorphisme $u_{\lambda_i} - \lambda_i \text{id}$ est nilpotent, alors les invariants de similitude de u_{λ_i} sont

$$(X - \lambda_i)^{k_{i,1}}, \quad \dots, \quad (X - \lambda_i)^{k_{i,r_i}} \quad \text{avec} \quad k_{i,1} \geq \dots \geq k_{i,r_i}.$$

Les entiers $k_{i,p}$ avec $p \in \llbracket 1, r_i \rrbracket$ sont alors les tailles des blocs de JORDAN de l'endomorphisme $u_{\lambda_i} - \lambda_i \text{id}$.

PROPOSITION 1.65. Les polynômes

$$P_1 := (X - \lambda_1)^{k_{1,1}} \dots (X - \lambda_m)^{k_{m,1}}, \quad \dots, \quad P_r := (X - \lambda_r)^{k_{1,r}} \dots (X - \lambda_m)^{k_{m,r}}$$

où $r = \max(r_1, \dots, r_m)$ sont les invariants de similitude de u .

Preuve On note

$$P := (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_m)^{k_m}.$$

La matrice C_P a exactement m blocs de JORDAN qui sont les matrices J_{λ_i, k_i} . Or

$$E = \bigoplus_{i=1}^m F_i(C_P) \quad \text{avec} \quad F_i(C_P) := \text{Ker}(C_P - \lambda_i I_n)^{k_i}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, l'indice de nilpotence de l'endomorphisme induit par $C_P - \lambda_i \text{id}$ sur $F_i(C_P)$ est k_i (sinon P ne serait pas le polynôme minimal de C_P). Dans la décomposition de JORDAN de la matrice

$$\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix},$$

on trouve les mêmes blocs de JORDAN que pour u . □

PROPOSITION 1.66. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_u et χ_v sont scindés. Alors u et v sont semblables si et seulement si u et v ont les mêmes blocs de JORDAN.

Preuve La démonstration repose sur le même argument qu'avec la décomposition de FROBENIUS. □

COROLLAIRE 1.67 (*décomposition de DUNFORD*). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Alors il existe des uniques $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u = d + n$, $dn = nd$, d soit diagonalisable et n soit nilpotent.

Preuve On écrit le polynôme caractéristique sous la forme

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp } u} (X - \lambda)^{m_\lambda}.$$

Grâce au lemme des noyaux et le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on peut alors décomposer E sous la forme

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } u} F_\lambda(u) \quad \text{avec} \quad F_\lambda(u) := \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^{m_\lambda}.$$

Les projections $p_\lambda: E \rightarrow F_\lambda(u)$ sur les sous-espaces vectoriels $F_\lambda(u)$ sont des polynômes en u . On considère l'endomorphisme

$$d := \sum_{\lambda \in \text{Sp } u} \lambda p_\lambda.$$

Montrer que d est diagonalisable. C'est immédiat en remarquant que le polynôme

$$P := \prod_{\lambda \in \text{Sp } u} (X - \lambda)$$

annule d et il est scindé à racine simple ce qui montre que d est diagonalisable. On pose alors $n := u - d$. Montrons que u est nilpotent. On notant m le maximum des ordres de multiplicité des valeurs propres, on a $n^m = (u - d)^m = 0$. Finalement, on a bien $u = n + d$ et $dn = nd$.

Montrons l'unicité. Soit (d', n') un autre couple convenant. Comme d et n sont des polynômes en u , les endomorphismes d' et n' commutent avec u et donc avec d et n . Par conséquent, l'endomorphisme $d - d'$ est diagonalisable, mais il est aussi nilpotent, donc $d = d'$ puis $n = n'$. □

PROPOSITION 1.68. L'application $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

◇ REMARQUE. On fera attention à la décomposition de DUNFORD d'une matrice diagonalisable. Par exemple, l'écriture

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 0$$

est une décomposition, mais l'écriture

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'en est pas une car les deux matrices ne commutent pas.

Chapitre 2

ALGÈBRE BILINÉAIRE

2.1 Formes quadratiques	16	2.1.5 Classification des espaces quadratiques	21
2.1.1 Définitions	16	2.1.6 Groupe orthogonal d'une forme quadratique	21
2.1.2 Formes non dégénérées	17	2.2 Espaces euclidiens et hermitiens	22
2.1.3 Point de vue matriciel	18	2.2.1 Définitions et premières propriétés	23
2.1.4 Bases orthogonales	19	2.2.2 Réduction des endomorphismes normaux	24

2.1 FORMES QUADRATIQUES

Dans toutes la suite, la lettre K désignera un corps de caractéristique qui n'est pas égale à 2.

2.1.1 Définitions

DÉFINITION 2.1. Soit E un K -espace vectoriel. On appelle *forme quadratique* sur E toute application $q: E \rightarrow K$ telle que

- pour tout $\lambda \in K$ et pour tous $x \in E$, on ait $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;
- l'application $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ soit bilinéaire.

▷ **EXEMPLE.** L'application

$$\begin{cases} K^n \longrightarrow K, \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_n^2 \end{cases}$$

est une forme quadratique sur K^n . Plus généralement, si $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in E^*$ et $a_1, \dots, a_r \in K$, alors l'application

$$a_1 \varphi_1^2 + \dots + a_r \varphi_r^2$$

est une forme quadratique sur E .

DÉFINITION 2.2. Soit q une forme quadratique sur E . On appelle l'application

$$b: \begin{cases} E \times E \longrightarrow K, \\ (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] \end{cases}$$

forme polaire de q .

PROPOSITION 2.3. Soit q une forme quadratique sur E . On note b sa forme polaire. Alors l'application b est l'unique forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ qui vérifie

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) = q(x).$$

Preuve Pour tout $x \in E$, la définition de b donne bien $b(x, x) = q(x)$. De plus, elle est bien bilinéaire. Soit b' une autre telle application. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, la bilinéarité de b' donne bien $b(x, y) = b'(x, y)$. \square

◇ **REMARQUE.** Soit $q: E \rightarrow K$ est une forme quadratique de forme polaire b . Alors l'application bilinéaire symétrique b induit une application linéaire $\tilde{b}: E \otimes E \rightarrow K$. Comme b est symétrique, on a

$$\forall x, y \in E, \quad \tilde{b}(x \otimes y) = \tilde{b}(y \otimes x).$$

On note

$$F := \text{Vect} \{x \otimes y - y \otimes x \mid (x, y) \in E^2\} \subset E \otimes E.$$

Alors l'application \tilde{b} induit une application linéaire de $\text{Sym}^2 E := (E \otimes E)/F$ dans K . Pour $x, y \in E$, on note $x \cdot y$ l'image de $x \otimes y$ par cette application. L'espace vectoriel $\text{Sym}^2 E$ possède la propriété universelle suivante :

pour toute application bilinéaire symétrique $\beta: E \times E \rightarrow E'$, il existe une unique application linéaire $B: \text{Sym}^2 E \rightarrow E'$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad B(x \cdot y) = \beta(x, y).$$

L'application qui a une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ associe une telle application $B \in (\text{Sym}^2 E)^*$ est un isomorphisme. Supposons que E soit de dimension finie. On note (e_1, \dots, e_n) une base de E . Alors les $e_i \cdot e_j$ avec $i \leq j$ forment une base de $\text{Sym}^2 E$ et les $e_i^* \cdot e_j^*$ avec $i \leq j$ forment une base de $(\text{Sym}^2 E)^*$.

Soit $q: E \rightarrow K$ une forme quadratique. Alors il existe une unique $B \in (\text{Sym}^2 E)^*$ telle que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = B(x \cdot x).$$

Il existe une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ de K vérifiant

$$q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} e_i^* e_j^*$$

Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors

$$q(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

DÉFINITION 2.4. On appelle *espace quadratique* sur K la donnée d'un K -espace vectoriel E de dimension finie et d'une forme quadratique q sur E .

DÉFINITION 2.5. Soient (E, q) et (E', q') deux espaces quadratiques. On appelle *morphisme métrique* (ou *morphisme quadratique*) de E vers E' toute application linéaire $u: E \rightarrow E'$ telle que

$$\forall x \in E, \quad q'(u(x)) = q(x).$$

Autrement dit, dire que u est un morphisme métrique revient à dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & K \\ u \downarrow & \nearrow q' & \\ E' & & \end{array}$$

commute. On dit qu'un morphisme métrique est une *isométrie* si c'est un isomorphisme.

QUESTIONS. Peut-on classifier les espaces quadratiques à isométries près?

2.1.2 Formes non dégénérées

DÉFINITION 2.6. Soit (E, q) un espace quadratique. On note b la forme polaire de q . On dit que (E, q) est *dégénérée* s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que

$$\forall y \in E, \quad b(x, y) = 0.$$

DÉFINITION 2.7. On appelle *noyau* d'une forme quadratique q l'ensemble

$$N(q) := \{x \in E \mid \forall y \in E, b(x, y) = 0\}.$$

On appelle *cône isotrope* d'une forme quadratique q l'ensemble

$$C(q) := \{x \in E \mid q(x) = 0\}.$$

◇ **REMARQUE.** Le noyau, également noté $\text{Ker } q$ abusivement, est inclus dans le cône isotrope. Une forme quadratique q est dégénérée si et seulement si $N(q) \neq \{0\}$.*

THÉORÈME 2.8. Soit (E, q) un espace quadratique. On note b la forme polaire de q . Alors l'application

$$\Phi: \begin{cases} E \longrightarrow E^*, \\ x \longmapsto \varphi_x: \begin{cases} E \longrightarrow K, \\ y \longmapsto b(x, y) \end{cases} \end{cases}$$

est un isomorphisme si et seulement si q n'est pas dégénérée. Cette application s'appelle l'isomorphisme canonique de E dans E^* .

Preuve Soit $x \in E$. On vérifie que l'application φ_x est bien une forme linéaire. Ainsi l'application Φ est bien définie et linéaire. On remarque que $\text{Ker } \Phi = N(q)$. Comme E est de dimension finie, l'application Φ est un isomorphisme si et seulement si $N(q) = \{0\}$, i. e. la forme quadratique q n'est pas dégénérée. □

DÉFINITION 2.9. Soient (E, q) un espace quadratique et $A \subset E$. On note b la forme polaire de q . On appelle *orthogonal* de A l'ensemble

$$A^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in A, b(x, y) = 0\}.$$

PROPOSITION 2.10. Soient (E, q) un espace quadratique et $F \subset E$ un supplémentaire de $N(q)$. Alors la somme $E = F \oplus N(q)$ est orthogonale et la forme quadratique $q|_F$ n'est pas dégénérée.

Preuve Il suffit de remarquer que $N(q) = E^\perp$. Montrons que $q|_F$ n'est pas dégénérée. Soit $x \in F$. On suppose que $b(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$. Soit $z \in E$ qu'on écrit $z = z_F + z_N$ avec $z_F \in F$ et $z_N \in N(q)$. Par linéarité, on a $b(x, z) = b(x, z_F) + b(x, z_N) = 0$, donc $x \in N(q)$, donc $x = 0$. On en déduit que $N(q|_F) = \{0\}$, donc $q|_F$ n'est pas dégénérée. \square

◇ **REMARQUE.** On peut alors toujours se ramener à un espace non dégénéré. Dans la suite, on prend toujours des espaces non dégénérés.

PROPOSITION 2.11. Soient (E, q) un espace quadratique non dégénéré et $A \subset E$. On note $\Phi: E \rightarrow E^*$ l'isomorphisme canonique. Alors $A^\perp = \Phi^{-1}(A^0)$.

Preuve On note b la forme polaire de q . On a

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{x \in E \mid \forall y \in A, b(x, y) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall y \in A, \varphi_x(y) = 0\} \\ &= \Phi^{-1}(\{\varphi \in E^* \mid \forall y \in A, \varphi(y) = 0\}) = \Phi^{-1}(A^0). \end{aligned} \quad \square$$

COROLLAIRE 2.12. Soient (E, q) un espace quadratique non dégénéré et $A \subset E$. Alors

$$\dim A^\perp + \dim \text{Vect } A = \dim E.$$

Si A est un sous-espace vectoriel F tel que $q|_F$ ne soit pas dégénérée, alors

$$E = F \oplus_\perp F^\perp.$$

Preuve On sait que $\dim A^\perp + \dim \text{Vect } A = \dim E$ et $\dim A^\perp = \dim A^\perp$. Soit F un sous-espace vectoriel de E telle que $q|_F$ ne soit pas dégénérée. Il suffit de montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Mais

$$F \cap F^\perp = \{x \in F \mid \forall y \in F, b(x, y) = 0\} = N(q|_F) = \{0\}$$

ce qui permet de conclure. \square

▷ **EXEMPLE.** On se place dans $E := K^2$ et on considère la forme quadratique

$$q: \begin{cases} K^2 \longrightarrow K, \\ (x, y) \longmapsto xy. \end{cases}$$

Elle n'est pas dégénérée car, si on note b sa forme polaire, on a

$$\forall (x, y), (x', y') \in K^2, \quad b((x, y), (x', y')) = \frac{1}{2}(xy' + x'y).$$

Mais $q(1, 0) = 0$ et, en notant $F := \text{Vect} \{(1, 0)\}$, la forme quadratique $q|_F$ est dégénérée.

2.1.3 Point de vue matriciel

DÉFINITION 2.13. Soient (E, q) un espace quadratique et $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale et Φ l'isomorphisme canonique. On appelle matrice de q dans la base \mathcal{B} la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) := \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*}(\Phi) = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

PROPOSITION 2.14. Soient (E, q) et (E', q') deux espaces quadratiques et M et M' les matrices de q et q' dans des bases quelconques. Alors (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement s'il existe $P \in \text{GL}_n(K)$ telle que

$${}^t P M P = M'.$$

Preuve On suppose que E et E' sont isométriques. Il existe une isométrie $u: E \rightarrow E'$. On note Φ et Φ' les isomorphismes canoniques $E \rightarrow E^*$ et $E' \rightarrow E'^*$. Alors on vérifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi' \\ E^* & \xleftarrow{{}^t u} & E'^* \end{array}$$

est commutatif, i. e. ${}^t u \circ \Phi' \circ u = \Phi$. Si on fixe des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , on a ${}^t P M' P = M$ avec $P := \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe $P \in \text{GL}_n(K)$ telle que ${}^t P M P = M'$. L'application $u \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = P$ est une isométrie. \square

REFORMULATION DE LA QUESTION. Peut-on classifier les matrices symétriques à congruence près ?

DÉFINITION 2.15. On considère l'action de $(K^\times)^2 := \{x^2 \mid x \in K^\times\}$ sur K par multiplication. On dispose de l'ensemble des classes $K/(K^\times)^2$ et de la projection canonique $\pi: K \rightarrow K/(K^\times)^2$. Soit (E, q) un espace quadratique. On appelle *discriminant* de q la classe

$$\text{disc}(q) := \pi(\det M_q) \in K/(K^\times)^2$$

où M_q est la matrice de q dans une base.

◇ REMARQUE. Une forme quadratique q n'est pas dégénéré si et seulement si $\text{disc}(q) \neq 0$.

DÉFINITION 2.16. On appelle *rang* d'une forme quadratique le rang de sa matrice.

2.1.4 Bases orthogonales

Soit \mathcal{F} une famille de représentants de $K^\times/(K^\times)^2$ dans K^\times .

THÉORÈME 2.17. Soit (E, q) un espace quadratique. Alors il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que

- les vecteurs e_i sont deux à deux orthogonaux,
- pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $q(e_i) \in F \cup \{0\}$.

De plus, on a

$$\#\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid q(e_i) \neq 0\} = \text{rg } q.$$

Matriciellement, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale.

Preuve On écrit $E = F \oplus_{\perp} N(q)$. Il suffit de traiter le cas où E est non dégénéré. Comme q n'est pas nulle, soit $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. On note $D := \text{Vect } x$. Alors $E = D \oplus D^{\perp}$. Montrons que $q|_{D^{\perp}}$ est non dégénéré. On a

$$N(q|_{D^{\perp}}) = D \cap D^{\perp} = \{0\}.$$

En effet, en notant b la forme polaire de q , on a

$$\begin{aligned} N(q|_{D^{\perp}}) &= \{y \in D^{\perp} \mid \forall z \in D^{\perp}, b(y, z) = 0\} \\ &= \{y \in E \mid \forall z \in D^{\perp}, b(y, z) = 0\} \cap D^{\perp} \\ &= (D^{\perp})^{\perp} \cap D^{\perp} = D \cap D^{\perp}. \end{aligned}$$

On raisonne ensuite par récurrence sur la dimension de E . C'est clair pour $E = \{0\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que E est de dimension n . Alors $E = D \oplus D^{\perp}$ et on applique l'hypothèse de récurrence à D^{\perp} : il existe une base orthogonale (x_2, \dots, x_n) de D^{\perp} . Alors en notant $x_1 := x$, la famille (x_1, \dots, x_n) est une base orthogonale de E . De plus, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in K^\times$ tel que $\lambda_i^2 q(x_i) \in \mathcal{F}$. On peut remplacer les vecteurs x_i par $\lambda_i x_i$ sans changer le fait que (x_2, \dots, x_n) soit une base orthogonale, i. e. on pose $e_i := \lambda_i x_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et on obtient une base orthogonale (e_1, \dots, e_n) vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad q(e_i) \in \mathcal{F}$$

ce qui conclut la preuve par récurrence.

- *Version calculatoire.* Pour cela, montrons le théorème suivant.

LEMME 2.18 (*réduction de GAUSS*). Alors il existe un algorithme permettant de construire une famille de formes linéaires indépendantes (y_1, \dots, y_r) telle que

$$q = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2, \quad (y_1, \dots, y_r) \in \mathcal{F}^r.$$

Raisonnons par récurrence sur $n := \dim E$. Le résultat est clair pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le théorème pour des espaces vectoriels de dimension $n - 1$. Soient E un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique sur E . Soit (x_1, \dots, x_n) une base de E . On écrit q sous la forme

$$q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j. \tag{*}$$

Si q est nulle, c'est terminé. Sinon distinguons deux cas.

- On suppose que l'un des scalaires $a_{i,i}$ est non nul. On peut supposer que $a_{1,1} \neq 0$. De la relation (*), on écrit

$$q = a_{1,1} \left(x_1^2 + \sum_{j \geq 2} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} x_1 x_j \right) + \sum_{2 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

$$= a_{1,1} \left(x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j \geq 2} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} x_j \right)^2 + q' \quad \text{avec} \quad q' := -\frac{1}{4a_{1,1}} \left(\sum_{j \geq 2} a_{1,j} x_j \right) + \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Par l'hypothèse de récurrence, la forme quadratique q' peut s'écrire

$$q' = \sum_{j=1}^r \lambda_j f_j^2$$

où la famille (f_1, \dots, f_r) est une famille libre de $\text{Vect} \{x_2, \dots, x_n\}$. Alors la famille (f, f_1, \dots, f_r) est libre où

$$f := x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j \geq 2} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} x_j.$$

D'où la propriété au rang n .

– On suppose que tous les scalaires $a_{i,i}$ sont nuls. On peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} q &= a_{1,2} x_1 x_2 + \sum_{j \geq 3} a_{1,j} x_1 x_j + \sum_{j \geq 3} a_{2,j} x_2 x_j + \sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \\ &= a_{1,2} \left(x_1 + \sum_{j \geq 3} \frac{a_{2,j}}{a_{1,2}} x_j \right) \times \left(x_2 + \sum_{j \geq 3} \frac{a_{1,j}}{a_{1,2}} x_j \right) + q' \end{aligned}$$

avec

$$q' := -\frac{1}{a_{1,2}} \left(\sum_{j \geq 3} a_{2,j} x_j \right) \left(\sum_{j \geq 3} a_{1,j} x_j \right) + \sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

De même, on peut écrire la forme quadratique q' sous la forme.

$$q' = \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2$$

où la famille (y_1, \dots, y_r) est une famille libre de $\text{Vect} \{x_3, \dots, x_n\}$. On note

$$f := x_1 + \sum_{j \geq 3} \frac{a_{2,j}}{a_{1,2}} x_j \quad \text{et} \quad g := x_2 + \sum_{j \geq 3} \frac{a_{1,j}}{a_{1,2}} x_j.$$

Or

$$fg = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2],$$

on peut donc écrire

$$q = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] + \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2.$$

Il suffit alors juste de montrer que la famille (f, g, x_3, \dots, x_n) est libre. Dans la base $\mathcal{B} := (x_1, \dots, x_n)$ de E^* , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f+g, f-g, x_3, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \boxed{} & & \\ \vdots & \vdots & & * & \\ * & * & & & \end{pmatrix}$$

qui est de rang plein, *i. e.* son rang vaut son nombre de colonne. On en déduit que la famille est libre. D'où la propriété également au rang n .

L'algorithme se termine car le nombre de variables diminue strictement. On obtient alors bien une famille libre de formes linéaires telle que q en soit une combinaison linéaire de carrés. Cela montre le lemme.

On écrit alors q sous la forme $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2$ où les scalaires λ_i sont non nuls et la famille (y_1, \dots, y_r) est libre. Alors $r = \text{rg } q$. Soit \mathcal{B} une base de E dont la base duale est (y_1, \dots, y_r, \dots) . Alors la matrice de q dans \mathcal{B} est $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ ce qui montre le théorème. \square

▷ EXEMPLE. On considère la forme quadratique

$$q: \begin{cases} E^3 \longrightarrow K, \\ (x, y, z) \longmapsto xy + yz + zx; \end{cases}$$

Pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a

$$q(x, y, z) = (x+z)(y+z) - z^2$$

$$= \frac{1}{4}[(x + y + 2z)^2 - (x - y)^2] - z^2.$$

Le lemme précédent affirme que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre avec

$$f_1: (x, y, z) \mapsto x + y + 2z, \quad f_2: (x, y, z) \mapsto x - y \quad \text{et} \quad f_3: (x, y, z) \mapsto z^2.$$

2.1.5 Classification des espaces quadratiques

THÉORÈME 2.19. Soient (E, q) et (E', q') deux \mathbb{C} -espaces quadratiques. Alors E et E' sont isométriques si et seulement si

$$\dim E = \dim E' \quad \text{et} \quad \text{rg } q = \text{rg } q'.$$

Preuve Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, on a $\mathbb{C}/(\mathbb{C}^\times)^2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose que E et E' ont la même dimension et q et q' ont le même rang. Dans des bases convenables de E et E' , la matrice de q et q' s'écrivent $\text{diag}(I_r, 0)$, donc E et E' sont isométriques. Le même raisonnement fonctionne si K est un corps algébriquement clos. \square

THÉORÈME 2.20. Soit (E, q) un \mathbb{R} -espace quadratique. Alors il existe une base \mathcal{B} de E et $t, s \in \mathbb{N}$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \text{diag}(I_t, -I_s, 0).$$

De plus, les entiers t et s ne dépendent pas du choix de la base \mathcal{B} .

Preuve Comme $\mathbb{R}/(\mathbb{R}^\times)^2 = \{-\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}\}$, il existe bien une telle base \mathcal{B} et $t, s \in \mathbb{N}$. De plus, on a $t + s = \text{rg } q$. On peut supposer que q est non dégénérée. On note (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_n) deux telles bases de E associées respectivement aux entiers (t, s) et (t', s') . Alors

$$\forall i \in \llbracket 1, t \rrbracket, \quad q(e_i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket t + 1, s \rrbracket, \quad q(e_i) = -1$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, t' \rrbracket, \quad q(f_i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket t' + 1, s' \rrbracket, \quad q(f_i) = -1$$

On considère la famille $(e_1, \dots, e_s, f_{s'+1}, \dots, f_n)$. Cette famille est libre. En effet, si

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i e_i + \sum_{j=s'+1}^n \mu_j f_j = 0,$$

alors l'application de q à cette égalité donne

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i^2 = - \sum_{j=s'+1}^n \mu_j^2,$$

donc $\lambda_i = \mu_j = 0$ pour tous $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et $j \in \llbracket s' + 1, n \rrbracket$. On a alors $s + (n - s') \leq n$, donc $s \leq s'$. Par symétrie, on montre que $s = s'$ et donc $t = t'$. \square

DÉFINITION 2.21. On appelle *signature* de q le couple (s, t) du théorème précédent.

THÉORÈME 2.22 (loi d'inertie de SYLVESTER). Soient (E, q) et (E', q') deux \mathbb{R} -espaces quadratiques. Alors E et E' sont isométriques si et seulement si E et E' sont de même dimension et les formes quadratiques q et q' ont la même signature.

2.1.6 Groupe orthogonal d'une forme quadratique

DÉFINITION 2.23. Soient (E, q) un espace quadratique non dégénéré et $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. On note b la forme polaire de q . On appelle *réflexion* d'axe x l'application

$$\sigma_x: \begin{cases} E \rightarrow E, \\ y \mapsto y - \frac{2b(x, y)}{q(x)}x \end{cases}$$

◇ **REMARQUE.** On a $\sigma_x(x) = -x$. Pour tout $z \in x^\perp$, on a $\sigma_x(z) = z$.

PROPOSITION 2.24. Sous les conditions précédentes, l'application σ_x est une isométrie.

Preuve Soit $y \in E$. Montrons que $q(\sigma_x(y)) = q(y)$. La bilinéarité de b donne

$$q(\sigma_x(y)) = b\left(y - \frac{2b(x, y)}{q(x)}x, y - \frac{2b(x, y)}{q(x)}x\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= q(y) - 4b\left(y, \frac{b(x, y)}{q(x)}x\right) + 4\frac{b(x, y)^2}{q(x)^2}b(x, x) \\
 &= q(y) - 4\frac{b(x, y)}{q(x)}b(x, y) + 4\frac{b(x, y)^2}{q(x)^2}q(x) = q(y). \quad \square
 \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.25. Soit (E, q) un espace quadratique. On note $O(q)$ le groupe pour la composition des isométries de E , appelé *groupe orthogonal* de q .

THÉORÈME 2.26. Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors toute isométrie de E est produit d'au plus n réflexions.

Preuve On procède par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, soit $u \in O(q)$. Il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $u = \lambda \text{id}$. Alors pour tout $x \in E$, on a $q \circ u(x) = u(x)$, donc $\lambda^2 = 1$, donc $\lambda = \pm 1$. On en déduit que $u = \pm \text{id}$. L'application id est bien produit de 0 réflexion et l'application $-\text{id}$ est la réflexion d'axe $x \in E - \{0\}$.

Soit $n \geq 2$. On suppose l'hypothèse vraie pour des espaces de dimension inférieure strictement à n . Soient (E, q) un espace quadratique de dimension n et $u \in O(q)$. On suppose d'abord que u admet un point fixe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. On note $F := \text{Vect } x$. Alors $E = F \oplus F^\perp$ et le sous-espace vectoriel F^\perp est stable par u . De plus, la restriction de u à F^\perp est une isométrie de F^\perp . Par hypothèse de récurrence, il existe $r < n$ et $x_1, \dots, x_r \in F^\perp$ tels que $q(x_i) \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et

$$u|_{F^\perp} = \tilde{\sigma}_{x_1} \cdots \tilde{\sigma}_{x_r}$$

où les applications $\tilde{\sigma}_{x_i} : F^\perp \rightarrow F^\perp$ sont les réflexions orthogonales d'axe x_i . Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On note $\sigma_{x_i} : E \rightarrow E$ la réflexion d'axe x_i . Alors l'application σ_{x_i} induit un application $\tilde{\sigma}_{x_i}$ sur F^\perp et l'identité sur F . Ainsi $v := \sigma_{x_1} \cdots \sigma_{x_r}$ vérifie

$$v|_F = \text{id}_F = u|_F \quad \text{et} \quad v|_{F^\perp} = \tilde{\sigma}_{x_1} \cdots \tilde{\sigma}_{x_r} = u|_{F^\perp},$$

donc $u = v$ et l'isométrie u est un produit de $r \leq n - 1$ réflexions.

Maintenant, on suppose que tout point fixe de u est un vecteur isotrope, *i. e.* $\text{Ker}(u - \text{id}) \subset C(q)$. On dispose alors d'un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. Par hypothèse, on a $y := u(x) \neq x$. Montrons qu'un des vecteurs $q(x + y)$ ou $q(x - y)$ est non nul. On a

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y) = 4q(x) \neq 0,$$

donc ces deux vecteurs ne peuvent être nuls simultanément. Supposons que $q(x - y) \neq 0$. Notons que

$$b(x + y, x - y) = q(x) - q(y) = 0,$$

donc $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux. Ainsi, en notant $z := x - y$, on a

$$\sigma_z(x - y) = y - x \quad \text{et} \quad \sigma_z(x + y) = x + y.$$

En sommant et soustrayant ces deux égalités, on obtient que $\sigma_z(x) = y$ et $\sigma_z(y) = x$. En particulier, l'application $\sigma_z \circ u$ est une isométrie admettant x comme point fixe. D'après le premier cas, cette dernière est produit d'au plus $n - 1$ réflexions. Comme $\sigma_z^{-1} = \sigma_z$, on en déduit que u est produit d'au plus n réflexions. Supposons que $q(x + y) \neq 0$. On pose $z := x + y$ et, de même, on montre que $-\sigma_z \circ u$ est une isométrie admettant x comme point fixe, donc cette dernière est produit de réflexions et on peut donc écrire $u = -\sigma_z \sigma_{x_1} \cdots \sigma_{x_r}$ avec $r \leq n$. On peut se débarrasser du « $-$ » en suivant en détail ce qu'on fait dans la récurrence. Cela conclut la preuve. \square

COROLLAIRE 2.27. Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré. Alors les réflexions engendrent le groupe orthogonal.

2.2 ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS

◇ **REMARQUE.** Soient (E, q) et (E', q') deux espaces quadratiques et $u \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{u} & E' \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi' \\
 E^* & \xleftarrow{t_u} & (E')^*
 \end{array}$$

commute.

DÉFINITION-PROPOSITION 2.28. Il existe une unique application linéaire $u^* : E' \rightarrow E$ telle que

$$\forall (x, x') \in E \times E', \quad b'(u(x), x') = b(x, u^*(x')).$$

Cette application u^* s'appelle l'*adjoint* de u .

Preuve Soit $x' \in E'$. On considère la forme linéaire

$$E^* \ni \varphi_{x'} : \begin{cases} E \longrightarrow K, \\ x \longmapsto b'(u(x), x') \end{cases}.$$

Alors il existe un unique $y \in E$ tel que $\varphi_{x'} = b(\cdot, y)$. On note $u^*(x') := y$. On vérifie que l'application $u^* : E' \rightarrow E$ est linéaire. En effet, soient $\lambda \in K$ et $x' \in E'$. Pour tout $x \in E$, on a

$$b'(u(x), \lambda x') = b(x, u^*(\lambda x')) \quad \text{et} \quad b'(u(x), \lambda x') = b(u(\lambda x), x'),$$

donc $b(x, u^*(\lambda x')) = b(x, \lambda u^*(x'))$ pour tout $x \in E$. Par unicité, on a donc $u^*(\lambda x') = \lambda u^*(x')$. De même, on montre que $u^*(x' + y') = u^*(x') + u^*(y')$. \square

PROPOSITION 2.29. L'application

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E, E') \longrightarrow \mathcal{L}(E', E), \\ u \longmapsto u^* \end{cases}$$

est linéaire et $(u^*)^* = u$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E, E')$.

PROPOSITION 2.30. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sous-espace stable par u . Alors F^\perp est stable par u^* .

Preuve Soit $x \in F^\perp$. Pour $y \in F$, on a $b(u^*(x), y) = b(x, u(y)) = 0$ puisque $u(y) \in F$. D'où $u^*(x) \in F^\perp$. \square

RAPPEL. Si u et v commutent et $P \in K[X]$, alors $\text{Ker } P(u)$ est stable par v .

DÉFINITION 2.31. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est *normal* s'il commute avec son adjoint.

PROPOSITION 2.32. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et $P \in K[X]$. Alors $(\text{Ker } P(u))^\perp$ est stable par u .

Preuve Comme u et u^* commutent, le noyau $\text{Ker } P(u)$ est stable par u^* , donc son orthogonal $(\text{Ker } P(u))^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$. \square

Si on veut utiliser ce résultat pour faire la réduction des endomorphismes normaux, on a besoin d'un théorème du type : pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, on a $E = F \oplus F^\perp$. Ce résultat s'obtient dans le contexte des espaces euclidiens.

2.2.1 Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 2.33. – Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

– Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. Un *produit scalaire hermitien* sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive à valeurs dans \mathbb{C} , *i. e.* une application $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

(i) sesquilinéaire : les applications $b(\cdot, y)$ avec $y \in E$ est linéaire et les applications $b(x, \cdot)$ avec $x \in E$ sont antilinéaire, *i. e.* vérifiant

$$\forall x, y \in E, \forall z \in \mathbb{C}, \quad b(x, zy) = \bar{z}b(x, y);$$

(ii) hermitienne : pour tous $x, y \in E$, on a $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$;

(iii) définie positive : pour tout $x \in E$, on a $b(x, x) \in \mathbb{R}_+$ et $b(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

▷ EXEMPLE. L'application $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mapsto z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien sur \mathbb{C}^2 .

THÉORÈME 2.34 (*de représentation de RIESZ*). Soit E un espace euclidien ou hermitien. Alors l'application

$$\Phi : \begin{cases} E \longrightarrow E^*, \\ x \longmapsto \varphi_x : \begin{cases} E \longrightarrow K, \\ y \longmapsto \langle y, x \rangle \end{cases} \end{cases}$$

est un isomorphisme de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Preuve L'application $x \mapsto \varphi_x$ est bien \mathbb{R} -linéaire. Comme $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} E^*$, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi_x = 0$. Comme $\varphi_x(x) = \langle x, x \rangle$, on a $x = 0$. D'où l'injectivité. \square

COROLLAIRE 2.35. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $E = F \oplus F^\perp$.

Preuve Comme $F^\perp = \Phi^{-1}(F^0)$, on a $\dim F^\perp + \dim F = \dim E$. Pour tout $x \in F \cap F^\perp$, on a $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$. On en déduit que $F \cap F^\perp = \{0\}$ ce qui montre la somme directe. \square

PROPOSITION 2.36. Soient E un espace euclidien ou hermitien et (x_1, \dots, x_k) une famille libre de E . Alors il existe une unique famille orthonormée (e_1, \dots, e_k) telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\} = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_i\} \quad \text{et} \quad \langle x_i, e_i \rangle > 0.$$

Preuve On pose

$$e_1 := \frac{x_1}{\sqrt{\langle x_1, x_1 \rangle}}$$

Soit $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$. On pose

$$y_i := x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, e_j \rangle e_j \neq 0.$$

Ce vecteur est orthogonal aux vecteurs e_j avec $j < i$. On cherche $\lambda \in K$ tel que $e_i := \lambda y_i$ vérifie $\langle e_i, x_i \rangle > 0$ et $\langle e_i, e_i \rangle = 1$. Un tel scalaire λ est unique ce qui montre l'unicité de telle base. \square

THÉORÈME 2.37 (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ). Soient E un espace euclidien ou hermitien et $x, y \in E$. Alors

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

et il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve Montrons l'inégalité dans le cas hermitien. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\theta}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $z := te^{-i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle zx + y, zx + y \rangle &= |z|^2 \langle z, x \rangle + 2 \operatorname{Re}(z \langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\ &= t^2 \langle x, x \rangle + 2t |\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Le polynôme $t^2 \langle x, x \rangle + 2t |\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle$ est positif, donc il admet un discriminant négatif ce qui donne l'inégalité. Montrons le cas d'égalité. Il y a égalité si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel $te^{-i\theta}x + y = 0$, i. e. les vecteurs x et y sont colinéaires. \square

COROLLAIRE 2.38. L'application

$$x \in E \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E .

2.2.2 Réduction des endomorphismes normaux

DÉFINITION-PROPOSITION 2.39. Soient E un espace euclidien ou hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle.$$

L'endomorphisme u^* s'appelle l'*adjoint* de u .

Preuve Le cas euclidien a déjà été traité dans la proposition 2.28. On se place dans le cas hermitien. On sait déjà qu'il existe un unique $u^*: E \rightarrow E$ qui vérifie l'identité requise par le théorème de RIESZ. En effet, soit $y \in E$ fixé. On note la forme linéaire

$$\eta: \begin{cases} E \longrightarrow K, \\ x \longmapsto \langle u(x), y \rangle. \end{cases}$$

Le théorème de RIESZ donne l'existence d'un unique vecteur $z \in E$ tel que $\eta = \varphi_z$, i. e. $\langle u(x), y \rangle = \langle x, z \rangle$ pour tout $x \in E$. On note alors $u^*(y) := z$. Il suffit alors de voir que u^* est linéaire. \square

PROPOSITION 2.40. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par u . Alors le sous-espace vectoriel F^\perp est stable par u^* .

Preuve Soit $y \in F^\perp$. Pour $x \in F$, comme $u(x) \in F$, on a $\langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = 0$. D'où $u^*(y) \in F^\perp$. \square

DEFINITION 2.41. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *normal* si $u^*u = uu^*$.

- ▷ EXEMPLE. Dans le cas euclidien/hermitien, on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est
- symétrique/autoadjoint si $u^* = u$,
 - antisymétrique/autoautoadjoint si $u^* = -u$,
 - orthogonal/unitaire sur $u^*u = \text{id}_E$.

LEMME 2.42. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\text{Ker } P(u)$ et $(\text{Ker } P(u))^\perp$ sont stables par u et u^* . En particulier, les sous-espaces propres de u et leurs orthogonaux sont stables par u et u^* .

(i) Cas complexe

THÉORÈME 2.43. Soient E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est normal si et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée.

Preuve Montrons le sens direct. Raisonnons par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 0$, la propriété est évidente. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que c'est vrai pour des espaces de dimension strictement inférieure à n . On suppose que E est de dimension n . Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u . On note

$$E_\lambda(u) := \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}.$$

Par le lemme précédent, les sous-espaces vectoriels $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(u)^\perp$ sont stables par u et u^* . On peut écrire que

$$E = E_\lambda(u) \oplus E_\lambda(u)^\perp.$$

On fixe une base orthonormée de $E_\lambda(u)$: elle est constituée de vecteurs propres de u . Comme $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u , l'endomorphisme induit par u est normal d'adjoint u^* . Par hypothèse de récurrence, l'espace E admet donc une base orthonormée constituée de vecteurs propres de u ce qui termine la récurrence.

Réciproquement, soit \mathcal{B} une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \overline{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}.$$

En particulier, si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$ et donc ces deux matrices commutent ce qui montre que u est normal. □

- ◇ REMARQUE. Les valeurs propres de u^* sont les conjugués des valeurs propres de u .
- ▷ EXEMPLE. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Montrons que ses valeurs propres sont réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u . On note $x \in E - \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors

$$\langle u(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \langle u(x), x \rangle = \langle x, u^*(x) \rangle = \overline{\lambda} \|x\|^2,$$

donc $\lambda = \overline{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Cas réel

LEMME 2.44. Soient E un espace euclidien de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal sans valeur propre réelle. Alors dans toute base orthonormée, la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Preuve On fixe une base orthonormée \mathcal{B} de E . Dans cette base, on note la matrice de u

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de u^* dans cette base est

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Comme u est normal, on doit avoir

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2, \\ ac + bd = ab + cd. \end{cases}$$

La première relation donne $b = \pm c$ et la seconde donne $a(c - b) = d(c - b)$. Il suffit de montrer que $b \neq c$. Remarquons que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

possède des valeurs propres réelles : son polynôme caractéristique est $X^2 - (a + d)X + (ad - b^2)$ de discriminant $(a - d)^2 + 4b^2 \geq 0$. On est donc ici dans le cas $b \neq c$. Donc $b = -c$ et $a = b$. D'où le lemme. \square

THÉORÈME 2.45. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux des blocs de la forme

$$(\lambda) \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Preuve Raisonnons par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 0$, c'est évident. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que c'est vrai pour des espaces de dimension strictement inférieure à n . On suppose que E est de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet une valeur propre, on donne les mêmes arguments que dans le cas des espaces hermitiens. On peut donc supposer que u n'admet aucune valeur propre. On veut exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par u et u^* . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un facteur irréductible de χ_u . Alors P est nécessairement de degré 2. Le noyau $\text{Ker } P(u)$ est un sous-espace vectoriel non nul. En effet, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors $\det(u - \lambda \text{id}_E) = 0$, donc

$$0 = \det((u - \lambda \text{id}_E)(u - \bar{\lambda} \text{id}_E)) = \det P(u).$$

Exhibons un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\text{Ker } P(u)$ stable par u et u^* .

Pour cela, montrons d'abord que uu^* possède une valeur propre (réelle). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u . Montrons que

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(u^* - \bar{\lambda} \text{id}_E).$$

Comme $(u - \lambda \text{id}_E)^* = u^* - \bar{\lambda} \text{id}_E$, il suffit de montrer cette égalité dans le cas $\lambda = 0$. C'est immédiat puisque

$$x \in \text{Ker } u \iff \langle u(x), u(x) \rangle = 0 \iff \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = 0 \iff x \in \text{Ker } u^*.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u . On note $x \in E$ un vecteur propre associé. Comme

$$uu^*(x) = u(\bar{\lambda}x) = |\lambda|^2 u(x),$$

on en déduit que $\mu := |\lambda|^2$ est une valeur propre de $uu^* = u^*u$. Soit $x \in \text{Ker } P(u)$ un vecteur propre associé à μ . Comme u n'a pas de valeurs propres, la famille $(x, u(x))$ est libre. On considère $F := \text{Vect}\{x, u(x)\}$. Ce sous-espace vectoriel est stable par u . Vérifions qu'il est stable par u^* . La famille $(u(x), u^2(x))$ est une base de F et

$$u^*(u(x)) = \mu x \in F \quad \text{et} \quad u^*(u^2(x)) = u(\mu x) \in F.$$

Cela montre que F est stable par u^* . En fixant une base orthonormée de F et en appliquant l'hypothèse de récurrence à F^\perp , on obtient le résultat. \square

3.1 REPRÉSENTATIONS DES GROUPES

▷ EXEMPLE. Soit E un K -espace vectoriel. Le groupe $G := \text{GL}(E)$ agit sur E via l'action $(f, x) \mapsto f \cdot x := f(x)$.

La question générale est la suivante. On va s'intéresser aux actions de groupes de G sur E telles que, pour tout $g \in G$, l'application $x \in E \mapsto g \cdot x \in E$ soit linéaire.

DÉFINITION 3.1. Soit G un groupe. On appelle *représentation K -linéaire* de G la donnée d'un K -espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$.

À partir d'une représentation linéaire d'un groupe, on veut pouvoir extraire des informations sur ce groupe. Pour cela, on va essayer de faire le lien entre les diverses représentations d'un groupe à l'aide des morphismes de représentations et on va tenter de classer les représentations. Dans toute la suite, la lettre G désigne un groupe

DÉFINITION 3.2. Soient (V, ρ) et (V', ρ') deux représentations de G . On appelle *morphisme de représentations* toute application linéaire $f: V \rightarrow V'$ vérifiant, pour tout $g \in G$, la relation

$$\forall x \in V, \quad f(\rho(g)(x)) = \rho'(g)(f(x))$$

ce qui revient à dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

commute. Une telle application f est dite *G -équivariante*. Les représentations V et V' seront dites isomorphes s'il existe un isomorphisme $f: V \rightarrow V'$ tel que

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho(g) \circ f^{-1} = \rho'(g).$$

On notera alors $(V, \rho) \simeq (V', \rho')$

◇ REMARQUES. – Soient E un K -espace vectoriel et $u \in \text{GL}(E)$. On considère

$$\rho_u: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(E), \\ k \mapsto u^k. \end{cases}$$

Soient E' un autre K -espace vectoriel et $v \in \text{GL}(E')$. On peut montrer que les représentations (E, ρ_u) et (E', ρ_v) sont isomorphes si et seulement si les endomorphismes u et v sont semblables.

– Soient (V, ρ) une représentation de G . On suppose que V est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Si on en fixe une base, alors on en déduit un morphisme $\tilde{\rho}: G \rightarrow \text{GL}_n(K)$.

Désormais, on suppose que $K = \mathbb{C}$, que G est un groupe fini et que toute représentation V est de dimension finie de G . Sous ces hypothèses, pour tout $g \in G$, l'endomorphisme $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. En effet, notons $n := |G|$. Alors pour tout $g \in G$, on a $\rho(g)^n = \text{id}_V$, donc l'endomorphisme $\rho(g)$ est annulé par le polynôme $X^n - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

DÉFINITION 3.3 (*sous-représentation*). Soit (V, ρ) une représentation. On appelle *sous-représentation* de V tout sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que

$$\forall g \in G, \quad \rho(g)(W) \subset W.$$

Dans ce cas, chaque endomorphisme $\rho(g)$ induit un endomorphisme noté $\rho_W(g) \in \text{GL}(W)$

LEMME 3.4. On suppose que G est abélien. Toute représentation non réduite à l'espace nulle de G admet un sous-représentation de dimension 1.

Preuve Soit (V, ρ) une représentation. La famille $\{\rho(g) \mid g \in G\}$ est constituée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent, donc ils sont simultanément diagonalisables. En particulier, il existe un vecteur propre $x \in E$ commun à tous les endomorphismes $\rho(g)$. En posant $W := \text{Vect}\{x\}$, on a

$$\forall g \in G, \quad \rho(g)(W) \subset W$$

ce qui fait du sous-espace vectoriel $W \subset V$ une sous-représentation de G . □

THÉORÈME 3.5. Soient V une représentation et $W \subset V$ un sous-représentation. Alors il existe une sous-représentation $W' \subset V$ telle que $V = W \oplus W'$.

Preuve Soit $W_0 \subset V$ un supplémentaire de W . On note $p: V \rightarrow W$ la projection sur W parallèlement à W_0 . On considère

$$p_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}.$$

Montrons que p_G est G -équivariante. Soient $x \in V$ et $\gamma \in G$. Comme $g \mapsto \gamma g$ est une bijection, on a

$$\begin{aligned} p_G(\rho(\gamma)(x)) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}(\rho(\gamma)(x)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g^{-1}\gamma)(x) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(\gamma g') \circ p \circ \rho(g'^{-1})(x) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(\gamma)\rho(g') \circ p \circ \rho(g'^{-1})(x) = \rho(\gamma)(p_G(x)). \end{aligned}$$

Montrons que p_G est un projecteur sur W . Soit $x \in W$. On a

$$p_G(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \underbrace{\rho(g^{-1})(x)}_{\in W} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \rho(g^{-1})(x) = x.$$

Soit $x \in V$. Comme $p(\rho(g^{-1})(x)) \in W$ pour tout $g \in G$, on a $p_G(x) \in W$. On en déduit que $p_G^2 = p_G$ et $\text{Im } p_G = W$. Montrons que $\text{Ker } p_G$ est une sous-représentation. Soit $x \in V$. Si $p_G(x) = 0$, alors

$$\forall g \in G, \quad p_G(\rho(g)(x)) = \rho(g) \circ p_G(x) = 0.$$

Finalement, le sous-espace vectoriel $W' := \text{Ker } p_G$ est un sous-représentation vérifiant $W' \oplus W = V$. □

3.2 REPRÉSENTATION IRRÉDUCTIBLE

DÉFINITION 3.6. Soit V une représentation. On dit que V est *irréductible* si V n'admet pas de sous-représentations autres que V et $\{0\}$.

COROLLAIRE 3.7. Soit V une représentation. Alors il existe des sous-représentations $V_1, \dots, V_r \subset V$ irréductibles telles que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$.

LEMME 3.8 (SCHUR). Soient V et V' deux représentations irréductibles. On note $\text{Hom}_G(V, V')$ l'espace des applications linéaires G -équivariantes de V dans V' . Si V et V' ne sont pas isomorphes, alors $\text{Hom}_G(V, V') = \{0\}$. Si V et V' sont isomorphes, alors $\text{Hom}_G(V, V') = \text{Vect}\{f\}$ pour tout isomorphisme $f \in \text{Hom}_G(V, V')$.

Pour montrer le lemme de SCHUR, on peut montrer facilement le lemme suivant.

LEMME 3.9. Soit $f \in \text{Hom}_G(V, V')$. Alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont resp. des sous-représentations de V et V' .

Preuve du lemme Soit $f \in \text{Hom}_G(V, V')$. Comme V est irréductible, on a $\text{Ker } f \in \{\{0\}, V\}$. Si $\text{Ker } f = V$, alors $f = 0$. Sinon f est injectif. De même, soit $f = 0$ soit f est surjectif. Ainsi, soit $f = 0$ soit f est un isomorphisme. Si V et V' ne sont pas isomorphes, le résultat est alors évident d'après ce qui précède.

On suppose que V et V' sont isomorphes et fixons $f \in \text{Hom}_G(V, V')$. Soit $h \in \text{Hom}_G(V, V')$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que l'endomorphisme $h - \lambda f$ soit non injectif — il suffit de prendre une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de hf^{-1} . D'après ce qui précède, comme $h - \lambda f \in \text{Hom}_G(V, V')$, on a $h - \lambda f = 0$. D'où $\text{Hom}_G(V, V') = \text{Vect}\{f\}$ □

Soit V une représentation de G . Par le corollaire, il existe des sous-représentations $V_1, \dots, V_r \subset V$ irréductibles telles que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Soit V' une représentation irréductible de G . Alors

$$\mathrm{Hom}_G(V, V') \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Hom}_G(V_i, V')$$

de sorte que

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, V') = \#\{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid V_i \simeq V'\}.$$

Le nombre de sous-représentations V_i isomorphes à V' ne dépend pas de la décomposition.

DÉFINITION 3.10. Soit (V, ρ) une représentation. On appelle *caractère* de cette représentation l'application

$$\chi_V : \begin{cases} G \longrightarrow \mathbb{C}, \\ g \longmapsto \mathrm{Tr} \rho(g). \end{cases}$$

On peut munir l'espace \mathbb{C}^G d'une structure hermitienne avec le produit scalaire

$$\begin{cases} \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (f, f') \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f'(g)}. \end{cases}$$

Avec du travail, on montre que, pour toutes représentations V et V' , on a

$$\langle \chi_V, \chi_{V'} \rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(V, V').$$