Dernière édition : 2 décembre 2020

Notes prises par Téofil Adamski

ANALYSE FONCTIONNELLE

(ANAF)

Mihai Gradinaru

2A maths 2019 ENS de Rennes

Chapitre 1
ESPACES DE BANACH

1.1 RAPPELS BASIQUES

DÉFINITION 1.1. Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de E converge vers un vecteur $x\in E$ si

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

L'espace E est dit de BANACH s'il est complet, *i. e.* toute suite de CAUCHY de E converge dans E.

DÉFINITION 1.2. Soit E un espace vectoriel. On appelle *semi-norme* sur E toute application $p\colon E\to\mathbf{R}$ sous-additive et absolument homogène. Une famille $\mathscr{P}$ de semi-norme sur E est dite *séparante* si

$$\forall x\in E,\quad (\forall p\in\mathscr{P},\ p(x)=0)\quad\Longrightarrow\quad x=0.$$

◇ REMARQUES. – Toute semi-norme sur E envoie 0 sur 0 et est positive.
– Soient p une semi-norme sur E et $c>0$. Alors l'ensemble $C\coloneqq \{x\in E \mid p(x)\leqslant c\}$ contient 0 et est
  - *convexe* : pour tout $x,y\in C$ et $\alpha\in[0,1]$, on a $\alpha x+(1-\alpha)y\in C$;
  - *équilibré* : pour tous $x\in C$ et $\alpha\in\mathbf{K}$ tel que $|\alpha|\leqslant 1$, on a $\alpha x\in C$;
  - *absorbant* : pour tout $x\in E$, il existe $\alpha>0$ tel que $\alpha^{-1}x\in C$.

De plus, pour tout $x\in E$, on a

$$p(x)=\inf\{\alpha c \mid \alpha>0, \alpha^{-1}x\in C\}.$$

▷ EXEMPLES. – Une norme est une semi-norme séparante.
– On considère l'espace $E\coloneqq\mathscr{C}(]0,1[,\mathbf{R})$. Pour $a\in[0,1]$, l'application $f\longmapsto p_a(f)\coloneqq|f(a)|$ est une semi-norme sur E. De plus, la famille $\mathscr{P}\coloneqq(p_a)_{a\in[0,1]}$ est séparante.

DÉFINITION 1.3. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'un espace vectoriel normé E. Pour $n\geqslant 1$, on pose $s_n\coloneqq\sum_{j=1}^n x_j$. La série $\sum_{n\geqslant 1}x_n$ est dite convergente dans E si la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente dans E vers un vecteur $s\in E$ et on écrit alors $s=\sum_{n\geqslant 1}x_n$. Cette même série est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geqslant 1}\|x_n\|$ converge.

PROPOSITION 1.4 (caractérisation des espaces de BANACH). Soit E un espace vectoriel normé. Alors les trois assertions sont équivalentes :

(i) l'espace E est de BANACH ;

(ii) toute série absolument convergente est convergente ;

(iii) pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de E vérifiant $\|x_n\|\leqslant c^n$ pour tout $n\geqslant 1$ avec $c\in\,]0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1}x_n$ est convergente.

Preuve Montrons l'implication (iii) ⇒ (i). Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de CAUCHY. En procédant par récurrence, on peut construire une extraction $(n_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\forall k\geqslant 1,\quad \|y_k\|\leqslant 2^{-k}\quad\text{avec}\quad y_k\coloneqq x_{n_{k+1}}-x_{n_k}.$$

La série $\sum_{k\geqslant 1}y_{n_k}$ converge. On en déduit que la suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge vers un vecteur $x_\infty\in E$. Comme la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est de CAUCHY, elle converge vers x_∞ ce qui conclut. □

▷ EXEMPLES. – L'espace $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{K})$ muni de la norme uniforme $\|\ \|_\infty$ est de BANACH.
– Les espaces $\mathbf{K}^d$ muni de la norme $x\longmapsto\|x\|_p\coloneqq(\sum_{j=1}^d|x_j|^p)^{1/p}$ avec $p\geqslant 1$, souvent notés ℓ_p^d, sont de BANACH.
– De même, les espaces $\ell^p(\mathbf{R})$ et $\mathrm{L}^p([0,1],\mathbf{R})$ avec $p\in[1,+\infty]$ sont des espaces de BANACH.

1.2 THÉORÈME DE BAIRE ET CONSÉQUENCES

1.2.1 Théorème de BAIRE

THÉORÈME 1.5 (BAIRE). Soient E un espace de BANACH. Alors

1. pour toute suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de fermés de E d'intérieurs vides, la réunion $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est d'intérieur vide ;
2. pour toute suite $(O_n)_{n\geqslant 1}$ d'ouverts denses de E, l'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1} O_n$ est dense dans E.

Idée de la preuve On veut montrer que, pour tout $x_0 \in E$, il existe $r_0 > 0$ tel que la boule $\mathrm{B}(x_0, r_0)$ intersecte l'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1} O_n$. Pour cela, on construit une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de E et une suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ de réels positifs telles que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \begin{cases} \overline{\mathrm{B}}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathrm{B}(x_n, r_n) \cap O_{n+1}, \\ 0 < r_{n+1} < r_n/2. \end{cases}$$

De là, on montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de CAUCHY ce qui assure sa convergence vers une vecteur $x_\infty \in E$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, la suite $(x_p)_{p\geqslant n}$ est à valeurs dans la boule $\mathrm{B}(x_n, r_n)$, donc

$$x_\infty \in \overline{\mathrm{B}}(x_n, r_n) \subset \mathrm{B}(x_0, r_0) \cap \bigcap_{p\geqslant n} O_p$$

ce qui termine la preuve. □

COROLLAIRE 1.6. Soient E un espace de BANACH et $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fermés de E tels que $E = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$. Alors il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que le fermé F_{n_0} soit d'intérieur non vide.

◇ REMARQUE. La dénombrabilité des suites à son importance, un contre-exemple est la droite $\mathbf{R} = \bigcup_{x\in\mathbf{R}} \{x\}$ muni de sa topologie usuelle. De même, l'hypothèse « espace de BANACH » est important, on peut prendre le même contre-exemple en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{Q}$.

TROIS APPLICATIONS NOTABLES. Il existe trois théorèmes importants qui découlent du théorème de BAIRE :

- le théorème de la borne uniforme (BANACH-STEINHAUS, 1927) ;
- le théorème de l'application ouverte (BANACH-SCHAUDER, 1930) ;
- le théorème du graphe fermé (BANACH, 1930).

1.2.2 Application

NOTATION ET RAPPELS. On note $\mathrm{B}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F que l'on munit de sa norme subordonnée, notée $\| \ \|$. Cette norme est sous-multiplicative.

(i) Théorème de la borne uniforme

PROPOSITION 1.7. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si F est de BANACH, alors $\mathrm{B}(E, F)$ l'est aussi.

◇ REMARQUE. En particulier, l'espace $E' := \mathrm{B}(E, \mathbf{K})$ est de BANACH.

DÉFINITION 1.8. Une famille d'opérateur linéaires bornés $\{T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathrm{B}(E, F)$ est dite

- *ponctuellement bornée* si
$$\forall x \in E,\ \exists c_x > 0, \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| \leqslant c_x \,;$$
- *bornée* si
$$\exists c > 0, \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| \leqslant c.$$

THÉORÈME 1.9 (BANACH-STEINHAUS, principe de la borne uniforme). Soient E un espace de BANACH, F un espace vectoriel normé et $\{T_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathrm{B}(E, F)$ une famille d'opérateurs linéaires continus. Si elle est ponctuellement bornée, alors elle est bornée.

Idée de la preuve Pour $n \geqslant 1$, on considère le fermé $F_n := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \{x \in E \mid \|T_\lambda x\| \leqslant n\}$. Soit $x \in E$. Par hypothèse, il existe $n_x \geqslant 1$ tel que $\|T_\lambda x\| \leqslant n_x$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc $x \in F_{n_x}$. Comme $E = \bigcup_{n\geqslant 1}$, le corollaire du théorème de

BAIRE assure l'existence d'un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que le fermé F_{n_0} soit d'intérieur non vide, donc il existe $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, r_0) \subset F_{n_0}$ ce qui implique

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \forall u \in \mathrm{B}_E(0,1), \quad \| T_\lambda(x_0 + ru)\| \leqslant n_0.$$

Par symétrie, on peut remplacer le « + » par un « − ». Finalement, pour tout $u \in \mathrm{B}_E(0,1)$, en écrivant $ru = \frac{1}{2}(x_0 + ru) + \frac{1}{2}(x_0 - ru)$, on obtient $\|T_\lambda u\| \leqslant n_0/r$ ce qui conclut. □

COROLLAIRE 1.10. Soient E un espace de BANACH, F un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathrm{B}(E,F)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)_{n\geqslant 1}$ converge vers un vecteur $Tx \in F$. Alors l'application $x \longmapsto Tx$ appartient à $\mathrm{B}(E,F)$ et

$$\|T\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|.$$

COROLLAIRE 1.11. Soient E un espace de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E)$. On suppose $\|\mathrm{Id}_E - T\| < 1$. Alors T admet un inverse dans $\mathrm{B}(E)$ et il est donné par

$$T^{-1}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{Id}_E - T)^k x, \quad x \in E.$$

(ii) Théorème de l'application ouverte

THÉORÈME 1.12 (BANACH-SCHAUDER, principe de l'application ouverte). Soient E et F deux espaces de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E,F)$ surjectif. Alors T envoie chaque ouvert de E sur un ouvert de F.

Idée de la preuve Pour assurer la démonstration, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 1.13. Sous les hypothèses du théorème, il existe $\delta > 0$ tel que $T(\mathrm{B}_E(0,1)) \supset \mathrm{B}_F(0,\delta)$. □

COROLLAIRE 1.14 (théorème d'isomorphisme de BANACH, 1929). Soient E et F deux espaces de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E,F)$ bijectif. Alors T^{-1} est un opérateur linéaire continu.

COROLLAIRE 1.15. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ qui en font chacune un espace de BANACH. Si les normes sont comparables, *i. e.* il existe $c > 0$ tel que $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ pour tout $x \in E$, alors elles sont équivalentes.

Preuve Il suffit d'appliquer le corollaire précédent avec l'identité. □

COROLLAIRE 1.16. Soient E un espace de BANACH et $G \subset E$. Alors G est borné si et seulement si, pour tout $f \in E'$, l'ensemble $\{f(x) \mid x \in G\}$ est borné dans $\mathbf{K}$.

Preuve Le sens direct est trivial. Réciproquement, on suppose que, pour tout $f \in E'$, il existe $M_f \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in G$, on ait $\|f(x)\| \leqslant M_f$.

LEMME 1.17 (corollaire du théorème de HAHN-BANACH). Soit E un espace vectoriel normé. On munit le bidual topologie E'' de la norme définie par

$$\|u\|_{E''} := \sup\{|u(f)| \mid f \in E', \|f\|_{E'} \leqslant 1\}, \quad u \in E''.$$

Soit $x \in E$. Alors l'application linéaire

$$J(x) \colon \left| \begin{array}{l} E' \longrightarrow \mathbf{K}, \\ f \longmapsto J(x)f := f(x) \end{array} \right.$$

est continue et l'application linéaire $J \colon E \to E'''$ est une isométrie.

On admet provisoirement ce lemme (voir la proposition 1.34). Pour toute forme linéaire $f \in E'$, on a

$$\sup_{x\in G} |J(x)f| = \sup_{x\in G} |f(x)| \leqslant M_f. \tag{$*$}$$

Or l'espace E' est de BANACH et la famille $\{J(x) \mid x \in G\}$ est une famille de $E'' = \mathrm{B}(E', \mathbf{K})$ vérifiant la relation $(*)$. Le théorème de BANACH-STEINHAUS assure alors

$$\sup_{x\in G} \|J(x)\|_{E'} = \sup_{x\in G} \|x\| < +\infty$$

Cela montre que l'ensemble G est borné. □

COROLLAIRE 1.18. Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de BANACH et $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors T est continue si et seulement si, pour toute $f \in F'$, on a $f \circ T \in E'$.

Preuve En utilisant le corollaire précédente, il y a équivalences entre les propositions suivantes :

(i) l'application T est continue;

(ii) l'ensemble $\{Tx \mid x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ est borné dans F;

(iii) pour toute $f \in F'$, l'ensemble $\{f(Tx) \mid x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ est borné dans $\mathbf{K}$;

(iv) pour toute $f \in F'$, on a $f \circ T \in E'$. □

COROLLAIRE 1.19. Soient E un espace de BANACH et $\tilde{G} \subset E'$. Alors la partie $\tilde{G}$ est bornée dans E' si et seulement si, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in \tilde{G}\}$ est borné dans $\mathbf{K}$.

Preuve Le sens direct est trivial. Réciproquement, on suppose que, pour tout $x \in E$, on a $\sup_{f\in\tilde{G}} |f(x)| < +\infty$. Le théorème de BANACH-STEINHAUS assure alors $\sup_{f\in\tilde{G}} \|f\|_{E'} < +\infty$ et donc l'ensemble $\tilde{G}$ est borné. □

(iii) Théorème du graphe fermé

DÉFINITION 1.20. Soient E et F deux espaces vectoriels. Le *graphe* d'une application linéaire $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est l'ensemble

$$\mathscr{G}(T) := \{(x, Tx) \in E \times F \mid x \in E\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ que l'on munit de la norme $\| \|_E + \| \|_F$. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est dit *fermé* si son graphe est fermé dans $E \times F$.

◇ REMARQUE. Un opérateur linéaire continue est fermé.

THÉORÈME 1.21 (du graphe fermé). Soient E et F deux espaces de BANACH et $T \in \mathscr{L}(E,F)$ un opérateur fermé. Alors T est continue.

Preuve Le graphe $\mathscr{G}(T)$ étant un fermé de l'espace de BANACH $E \times F$, il est lui-même un espace de BANACH. L'application

$$p : \left| \begin{array}{l} \mathscr{G}(T) \longrightarrow E, \\ (x,y) \longmapsto x \end{array} \right.$$

est linéaire, bijective te continue (en utilisant la définition de la norme sur $E \times F$). Le théorème de l'application ouverte assure alors que son inverse p^{-1} est continu. De même, l'application

$$q : \left| \begin{array}{l} \mathscr{G}(T) \longrightarrow \operatorname{Im} T \subset F, \\ (x,y) \longmapsto y \end{array} \right.$$

admet un inverse continu. Mais on remarque que $T = q \circ p^{-1}$ et, par composition, l'opérateur T est continu.

• *Autre méthode.* Pour tout $x \in E$, on pose $|||x|||_T := \|x\|_E + \|Tx\|_F$. Alors l'application $||| \ |||_T$ est une norme sur E et montrons qu'elle en fait un espace de BANACH. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de E de CAUCHY pour $||| \ |||_T$. Alors les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ sont respectivement des suites de CAUCHY de E et F. Comme ces derniers sont complets, elles convergent respectivement vers des vecteurs $x \in E$ et $y \in F$. Comme le graphe est fermé, on en déduit $y = Tx$. De plus, on a

$$|||x_n - x|||_T = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - y\|_F \longrightarrow 0.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x dans l'espace $(E, ||| \ |||_T)$

Pour tout $x \in E$, on a $\|x\|_E \leqslant |||x|||_T$. Le corollaire 1.15 assure alors que les normes $\| \|_E$ et $||| \ |||_T$ sont équivalentes. On en déduit le résultat. □

DÉFINITION 1.22. Soient E un espace de BANACH. Un sous-espace vectoriel fermé M de E est dite *direct* s'il existe un sous-espace vectoriel fermé N de E tel que $M \cap N = \{0\}$ et $E = M + N$.

COROLLAIRE 1.23. Soient E un espace de BANACH et M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M est direct si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{B}(E)$ telle que $P^2 = P$ et $M = \{x \in E \mid Px = x\}$.

Preuve $\Leftarrow$ On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{B}(E)$ telle que $P^2 = P$ et $M = \{x \in E \mid Px = x\}$. L'ensemble $N = P^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. De plus, pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = Px + (x - Px)$ avec $Px \in M$ et $x - Px \in N$ car $P^2 = P$. D'où $E = M \oplus N$.

$\Rightarrow$ Réciproquement, on suppose que M est direct. Alors il existe un sous-espace vectoriel fermé N de E tel que $E = M \oplus N$. Pour tout $x \in E$ qu'on écrit $x = m + n$ avec $m \in M$ et $n \in N$, on pose $Px := m$. Alors on vérifie que l'application $P \colon E \to M$ est linéaire et vérifie $P^2 = P$. Maintenant, montrons qu'elle est continue. Soit $(x_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de E telle que $x_k \to 0$ et $y_k := Px_k \to y \in M$. La suite $(Px_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite du fermé M, donc $y \in M$. Pour chaque $k \geqslant 1$, on note $y_k = m_k + n_k$ avec $m_k \in M$ et $n_k \in N$. Comme $x_k \to 0$ et $m_k \to y$, on en déduit $n_k \to -y$. Or la suite $(n_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite du fermé N, donc $y \in N$. Comme $M \cap N = \{0\}$, on obtient $y = 0$. Cela montre que le graphe $\mathscr{G}(T)$ est fermé ce qui permet de conclure avec le théorème du graphe fermé. □

1.3 Théorèmes de Hahn-Banach et conséquences

Tout d'abord, on rappel le lemme de Zorn montré dans le cours de complément du premier semestre de 1A .

Définition 1.24. Soient P un ensemble muni d'un ordre partiel $\prec$.

- Un sous-ensemble $Q \subset P$ est *totalement ordonné* si, pour tous éléments $a, b \in Q$, on a $a \prec b$ ou $b \prec a$.
- Un élément $c \in P$ est un *majorant* de Q si, pour tout $a \in Q$, on a $a \prec c$.
- Un élément $m \in P$ est *maximal* de P si, pour tout $x \in P$, on a $m \prec x \Rightarrow x = m$.
- L'ensemble P est *inductif* si toute sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme 1.25 (Zorn, 1935). Tout ensemble ordonné, inductif et non vide admet un élément maximal.

1.3.1 Théorèmes et conséquences

◇ Remarque. Une des conséquences de ce lemme est la comparabilité des cardinaux : pour deux ensembles E et F, il existe une injection de l'un dans l'autre. Pour cela, on applique le lemme de Zorn à l'ensemble des injections de E dans F muni de la relation $\subset$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On note $E^* := \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ son dual algébrique. La forme algébrique réelle du théorème de Hahn-Banach concerne le prolongement d'une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel en une forme linéaire sur tout l'espace en préservant une relation de domination.

Théorème 1.26 (d'extension de Hahn-Banach sur des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels, 1927 & 1930). Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $p \colon E \to \mathbf{R}$ une semi-norme sur E. Soient G un sous-espace vectoriel de E et $g \in G^*$ telle que

$$\forall x \in G, \quad g(x) \leqslant p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f|_G = g$ et $f \leqslant p$ sur E.

Preuve • *Un cas particulier.* Supposons $G \neq E$ et qu'il existe $x_0 \notin G$ tel que $E = G + \mathbf{R}x_0$. Comme $x_0 \notin G$, la représentation de tout $x \in E$ sous la forme $x = y + \alpha x_0$ avec $y \in G$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ est unique. Soit $c \in \mathbf{R}$ quelconque pour le moment. Pour tout $x := y + \alpha x_0 \in E$ avec $y \in G$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) := g(y) + \alpha x$. Alors l'application f est une forme linéaire réelle sur E qui étend g. Il reste à choisir la constante $c \in \mathbf{R}$ tel que $f \leqslant p$. Pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) \leqslant p(x) \quad\iff\quad \begin{cases} g(\alpha^{-1}y) + c \leqslant p(\alpha^{-1}y + x_0), & \text{si } \alpha > 0,\\ g(-\alpha^{-1}y) - c \leqslant p(-\alpha^{-1}y - x_0), & \text{si } \alpha < 0,\\ g(y) \leqslant p(y), & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Il faut donc choisir la constante $c \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall y', y'' \in G, \quad g(y') - p(y' - x_0) \leqslant c \leqslant p(y'' + x_0) - g(y'').$$

Or pour tous $y', y'' \in G$, on a

$$\begin{aligned} g(y') - g(y'') = g(y' - y'') &\leqslant p(y' + y'') \\ &\leqslant p(y' - x_0 + y'' + x_0) \\ &\leqslant p(y' - x_0) + p(y'' + x_0). \end{aligned}$$

Finalement, il suffit de prendre la constante $c \in \mathbf{R}$ entre les nombres

$$\sup_{y' \in G}(g(y') - p(y' - x_0)) \quad \text{et} \quad \sup_{y'' \in G}(p(y'' - x_0) - g(y'')).$$

et on a construit une telle application f.

• *Cas général.* On introduit l'ensemble $\mathscr{E}$ des formes linéaires $h\colon D(h)\to\mathbf{R}$ prolongeant g et vérifiant $h\leqslant p$ où l'ensemble $D(h)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant G. Comme $g\in\mathscr{E}$, l'ensemble $\mathscr{E}$ est non vide. On le munit de la relation d'ordre définie par

$$h_1\prec h_2 \iff \begin{cases} D(h_1)\subset D(h_2),\\ h_2|_{D(h_1)}=h_1,\end{cases} \qquad h_1,h_2\in\mathscr{E}.$$

Montrons qu'alors l'ensemble $\mathscr{E}$ est inductif. En effet, soit $\mathscr{F}:=\{h_i\mid i\in I\}\subset E$ un sous-ensemble totalement ordonné de E. On pose

$$D(h):=\bigcup_{i\in I}D(h_i).$$

De plus, pour tout $x\in E$, il existe $i\in I$ tel que $x\in D(h_i)$ et on pose $h(x):=h_i(x)$. Alors l'application h est bien définie, elle appartient à $\mathscr{E}$ et il s'agit d'un majorant de $\mathscr{F}$. Le lemme de ZORN assure alors que l'ensemble $\mathscr{E}$ admet un élément maximal $f\in\mathscr{E}$.

Montrons que $D(f)=E$. Raisonnons par l'absurde et supposons $D(f)\neq 0$. Soit $G':=D(f)$. D'après le cas précédent, on peut construire une extension $F\colon D(F)\to\mathbf{R}$ telle que $F\leqslant p$ et $D(F)\supset D(f)$. Cela contredit la maximalité de f. D'où $D(f)=E$ et l'application h est donc définie sur E : elle convient. □

THÉORÈME 1.27 (d'extension de HAHN-BANACH sur des espaces vectoriels normés). Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. Soient G un sous-espace vectoriel de E et $g\in G'$. Alors il existe une forme linéaire $f\in E'$ telle que $f|_G=g$ et $\|f\|_{E'}=\|g\|_{G'}$.

Preuve Pour $x\in E$, on pose $p(x):=\|g\|_{G'}\|x\|$. L'application p est une semi-norme sur E. Le théorème précédent s'applique et il existe une forme linéaire $f\in E'$ telle que $f|_G=g$ et $f\leqslant p$ sur E. Pour $x\in E$, on a alors $|f(x)|\leqslant p(x)$, donc $\|f\|_{E'}\leqslant\|g\|_{G'}$. L'autre inégalité étant triviale, on a $\|f\|_{E'}=\|g\|_{G'}$. □

COROLLAIRE 1.28 (encadrement). Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $p\colon E\to\mathbf{R}$ une semi-norme sur E. Alors il existe une forme linéaire $f\in E^*$ non nulle telle que

$$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x),\quad \forall x\in E.$$

Preuve Soit $x_0\in E$. On pose $G:=\mathbf{R}x_0$. On considère la fonction $g\colon G\to\mathbf{R}$ définie par

$$g(\alpha x_0)=\alpha p(x_0),\quad \forall\alpha\in\mathbf{R}.$$

C'est une forme linéaire sur G satisfaisant $g\leqslant p$ sur G. D'après le théorème précédente, il existe une forme linéaire $f\in E^*$ telle que $f|_G=g$ et $f\leqslant p$ sur E. Maintenant, pour tout $x\in E$, on a $-f(x)=f(-x)\leqslant p(-x)$ ce qui conclut. □

Passons au cas des espaces vectoriels complexes.

THÉORÈME 1.29. Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et $p\colon E\to\mathbf{R}$ une application sous-additive et absolument homogène. Soient G un sous-espace vectoriel de E et $g\in G^*$ une forme $\mathbf{C}$-linéaire vérifiant $|g|\leqslant p$ sur G. Alors il existe une forme $\mathbf{C}$-linéaire $f\in E^*$ telle que $f|_G=g$ et $|f|\leqslant p$ sur E.

Preuve On considère les parties réelle u et imaginaire v de g. Ce sont des formes $\mathbf{R}$-linéaires sur G et elles vérifient $|u|\leqslant p$ et $|v|\leqslant p$ sur G. De plus, pour tout $x\in G$, on a

$$u(ix)+iv(ix)=g(ix)=ig(x)=i(u(x)+iv(x))=-v(x)+iu(x),$$

donc $v(x)=-u(ix)$. D'après le théorème de HAHN-BANACH algébrique réel, on peut étendre la forme linéaire u en une forme $\mathbf{R}$-linéaire U sur E telle que $U\leqslant p$ sur E. Comme dans la preuve précédente, on a $|U|\leqslant p$ sur E. Maintenant, on considère la forme $\mathbf{R}$-linéaire

$$f\colon \left|\begin{array}{l} E\longrightarrow\mathbf{C},\\ x\longmapsto U(x)-iU(ix).\end{array}\right.$$

Un simple calcul assure que $f(ix)=if(x)$ pour tout $x\in E$ ce qui en fait une forme $\mathbf{C}$-linéaire. De plus, elle étend bien g puisque, pour tout $x\in G$, on a

$$f(x)=U(x)-iU(ix)=u(x)-iu(ix)=u(x)+iv(x)=g(x).$$

Enfin, montrons la domination. Soit $x\in E$. Alors il existe $r\geqslant 0$ et $\theta\in\mathbf{R}$ tels que $f(x)=re^{-i\theta}$. Ainsi, on a

$$|f(x)|=e^{i\theta}f(x)=f(e^{i\theta}x),\quad\text{donc}\quad |f(x)|=|U(e^{i\theta}x)|\leqslant p(e^{i\theta}x)=|e^{i\theta}|p(x)=p(x).$$

Cela conclut. □

COROLLAIRE 1.30 (forme linéaire de norme fixée). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$. Pour tout $x_0 \neq 0$, il existe une forme linéaire $f_0 \in E'$ telle que

$$f_0(x_0) = \|x_0\| \quad \text{et} \quad \|f_0\|_{E'} = 1.$$

Preuve On pose $G := \mathbf{K}x_0$. On considère la fonction $g\colon G \to \mathbf{K}$ définie par

$$g(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|, \quad \forall \alpha \in \mathbf{K}.$$

C'est une forme linéaire sur G de norme 1. Le théorème de HAHN-BANACH complexe assure alors le résultat. ☐

COROLLAIRE 1.31 (norme d'un vecteur à l'aide des formes linéaires). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \max_{\substack{f \in E',\\ \|f\|_{E'} \leqslant 1}} |f(x)|.$$

Preuve Soit $x \in E$. Soit $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} \leqslant 1$. Comme $|f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\| \leqslant \|x\|$, on a

$$\|x\| \geqslant \sup_{\substack{f \in E',\\ \|f\|_{E'} \leqslant 1}} |f(x)|.$$

Montrons l'autre inégalité. Si $x = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose alors $x \neq 0$. Le corollaire précédent assure alors qu'il existe $f_x \in E'$ telle que

$$f_x(x) = \|x\| \quad \text{et} \quad \|f_x\|_{E'} = 1.$$

Cette forme linéaire réalise la borne supérieure ce qui montre l'égalité cherchée. ☐

COROLLAIRE 1.32 (MAZUR). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$. Pour tout $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \geqslant 1$, il existe une forme linéaire $f_0 \in E'$ non nulle telle que

$$f_0(x_0) \geqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_0(x)|.$$

Preuve Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \geqslant 1$. Alors $x_0 \neq 0$ et on applique le corollaire 1.30. ☐

PROPOSITION 1.33 (critère de densité). Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$ et G un sous-espace vectoriel de E. Soit $x_0 \in E$. Alors $x_0 \in \overline{G}$ si et seulement si, pour toute $f \in E'$ telle que $f|_G = 0$, on a $f(x_0) = 0$. En particulier, l'ensemble G est dense dans E si et seulement si, pour toute $f \in E'$ telle que $f|_G = 0$, on a $f = 0$.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose $x_0 \in \overline{G}$. Soit $f \in E'$ telle que $f|_G = 0$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de G telle que $x_n \longrightarrow x$. Comme f est continue, on a $0 = f(x_n) \longrightarrow f(x)$ ce qui assure $f(x) = 0$.

$\Leftarrow$ Raisonnons par contraposée. On suppose $x_0 \notin \overline{G}$. On pose $M := \overline{G} \oplus \mathbf{K}x_0$. On considère la forme linéaire

$$g\colon \left| \begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ y + \alpha x_0 & \longmapsto & \alpha. \end{array} \right.$$

Vérifions qu'elle est continue. Soient $y \in \overline{G}$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ tels que $y + \alpha x_0 \neq 0$. On a

$$\frac{|g(y+\alpha x_0)|}{\|y+\alpha x_0\|} = \frac{|\alpha|}{\|y+\alpha x_0\|} = \frac{1}{\|x_0 - (-y/\alpha)\|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{d}(x_0, \overline{G})} < +\infty.$$

D'après le théorème de HAHN-BANACH topologique, il existe $f \in E'$ telle que $f|_M = g$ et $\|f\|_{E'} = \|g\|_{M'}$. On a alors $f|_G = g|_G = 0$ et $f(x_0) = g(x_0) = 1$ ce qui termine la preuve. ☐

◇ REMARQUE. Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de HILBERT. Alors le théorème de représentation de RIESZ induit la caractérisation suivante :

Soient G un sous-espace vectoriel de H et $x_0 \in H$. Alors $x_0 \in \overline{G}$ si et seulement si

$$\forall y \in H, \quad (\forall x \in G,\ \langle x, y\rangle = 0) \quad \Longrightarrow \quad \langle x_0, y\rangle = 0.$$

1.3.2 Applications à la dualité

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$. On munit son bidual topologique E'' de la norme définie par

$$\|u\|_{E''} := \sup_{\substack{f \in E',\\ \|f\|_{E'} \leqslant 1}} |u(f)|, \quad u \in E''.$$

On veut montrer le lemme 1.17 admis précédemment

PROPOSITION 1.34. Pour tout $x \in E$, la forme linéaire

$$J(x)\colon \left| \begin{array}{l} E' \longrightarrow \mathbf{K}, \\ f \longmapsto J(x)f := f(x) \end{array} \right.$$

est continue et l'application linéaire $J\colon E \to E''$ est une isométrie. De plus, l'image $J(E)$ est fermée dans E'' si et seulement si l'espace E est de BANACH.

Preuve Soit $x \in E$. L'application $J(x)$ est clairement une forme linéaire. De plus, pour toute $f \in E'$, on a

$$|J(x)f| = |f(x)| \leqslant \|f\|_{E'}\,\|x\|$$

ce qui assure la continuité de $J(x)$. Montrons que l'application J est une isométrie. Elle est clairement linéaire. De plus, pour tout $x \in E$, le corollaire 1.31 donne

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{\substack{f\in E',\\ \|f\|_{E'}\leqslant 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f\in E',\\ \|f\|_{E'}\leqslant 1}} |f(x)| = \|x\|.$$

L'espace E'' étant complet, comme $J(E) \subset E''$, l'image $J(E)$ est fermée dans E'' si et seulement si elle est complète si et seulement si l'espace E est complet (car J est une isométrie). □

DÉFINITION 1.35. Un espace vectoriel normé E sur $\mathbf{K}$ est dit *réflexif* si l'application $J\colon E \to E''$ définie précédemment est surjective.

▷ EXEMPLES. – Tout espace vectoriel normé de dimension finie est réflexif.
– Tout espace de HILBERT est réflexif.

Preuve Soit $(H, \langle\, , \rangle)$ un espace de HILBERT. On considère l'application

$$R\colon \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow H' \\ x \longmapsto \varphi_x\colon \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbf{K}, \\ y \longmapsto \langle y, x\rangle. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

C'est une isométrie, bijective (par le théorème de RIESZ) et antilinéaire. Montrons que l'application $J\colon H \to H''$ est surjective. Soit $\varphi \in H''$. Pour toute $f \in H'$, on a $\varphi(f) = (\varphi \circ R \circ R^{-1})(f)$. Enfin, on considère la forme linéaire

$$\Phi\colon \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbf{K}, \\ x \longmapsto \overline{\varphi \circ R(x)}. \end{array} \right.$$

Montrons qu'elle est continue. Pour tout $x \in H$, on a

$$|\Phi(x)| = |\varphi \circ R(x)| \leqslant \|\varphi\|_{H''}\|R(x)\|_{H'} = \|\varphi\|_{H''}\|x\|_H.$$

D'après le théorème de RIESZ, il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que $\Phi(x) = \langle x, a\rangle$ pour tout $x \in H$, *i. e.* $\langle a, x\rangle = \varphi \circ R(x)$. Alors pour toute $f \in H'$, on a

$$\varphi(f) = \varphi \circ R(R^{-1}(f)) = \langle a, R^{-1}(f)\rangle = f(a),$$

donc $\varphi(f) = J(a)f$. D'où $\varphi = J(a)$ ce qui montre la surjectivité de J. □

▷ EXEMPLES. – Le dual de l'espace $c_0(\mathbf{N})$ des suites bornées est l'espace $\ell^1(\mathbf{N})$.
– Le dual de l'espace $c_0(\mathbf{N})$ des suites convergentes est l'espace $\ell^1(\mathbf{N})$.
– Pour tout $p \geqslant 1$, le dual de $\ell^p(\mathbf{N})$ est l'espace $\ell^q(\mathbf{N})$ où le réel $q \geqslant 1$ vérifie $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

COROLLAIRE 1.36 (application au théorème de HAHN-BANACH au problème des moments). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{C}$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E, $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{C}$ et $\gamma > 0$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une forme $\mathbf{C}$-linéaire $f \in E'$ telle que $f(x_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\|f\|_{E'} \leqslant \gamma$;

(ii) pour tous $n > 0$ et $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbf{C}$, on a

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j\Big| \leqslant \gamma \Big\|\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\Big\|.$$

Preuve La nécessité découle de la définition de la quantité $\|f\|_{E'}$. Montrons que la condition est suffisante. On suppose le point (ii). On pose

$$G := \Big\{ y \in E \,\Big|\, \exists \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbf{C},\ y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \Big\}.$$

En vertu de l'inégalité, l'application

$$g : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \longmapsto \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j \end{array} \right.$$

est bien définie et elle est linéaire. Alors le théorème de HAHN-BANACH complexe assure qu'il existe une forme $\mathbf{C}$-linéaire $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} \leqslant \gamma$. De plus, on a bien $f(x_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. D'où le point (i). □

◇ REMARQUE. Une fonction $f \in \mathscr{C}([0,1])$ est représentable sous la forme

$$f(x) = \int_0^1 x(t) m(\mathrm{d}t), \quad x \in [0,1]$$

où l'application m est une mesure sur $[0,1]$ et $x \in \mathscr{C}([0,1])$.

COROLLAIRE 1.37 (théorème de HELLY). Soient E un espace de BANACH et $f_1, \dots, f_n \in E'$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ et $\gamma > 0$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $f_j(x_\varepsilon) = \alpha_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et $\|x_\varepsilon\| \leqslant \gamma + \varepsilon$;

(ii) pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbf{C}$, on a

$$\left| \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j \right| \leqslant \gamma \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \right\|_{E'}.$$

Preuve Montrons que la condition est suffisante. On suppose le point (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Quitte à en enlever, on peut supposer que les formes linéaires f_i sont linéaires indépendantes. On considère l'application continue

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{K}^n, \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{array} \right.$$

Comme φ est surjective, d'après le principe de l'application ouverte, l'image de la boule $\mathrm{B}(0, \gamma + \varepsilon)$ contient le vecteur nul comme point intérieur. Raisonnons par l'absurde et supposons $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \notin \varphi(\mathrm{B}(0, \gamma + \varepsilon))$. Alors le théorème de MAZUR ci-dessous assure qu'il existe une forme linéaire $F \in (\mathbf{R}^n)'$ telle que

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geqslant \sup_{\|x\| < \gamma + \varepsilon} |F(\varphi(x))|. \tag{$*$}$$

Comme $\mathbf{R}^n$ est un espace de HILBERT, le théorème de RIESZ affirme qu'il existe $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j.$$

En réécrivant la relation $(*)$, on obtient alors

$$\left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \right| \geqslant \left| \sum_{j=1}^n f_j(x) \beta_j \right|, \quad \forall x \in \mathrm{B}(0, \gamma + \varepsilon).$$

La borne supérieure du membre de droite de cette inégalité est atteint pour $\|x\| = \gamma + \varepsilon$ et vaut

$$(\gamma + \varepsilon) \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \right\|_{E'}$$

ce qui est contradictoire. Cela conclut le point (i). □

DÉFINITION 1.38. Soient E et F deux espaces vectoriels et. La transposée d'une application linéaire $T : E \to F$ est l'application linéaire

$${}^{\mathrm{t}}T : \left| \begin{array}{l} F' \longrightarrow E', \\ f \longmapsto f \circ T. \end{array} \right.$$

NOTATION. Soit E un espace vectoriel normé. Pour $f \in E'$ et $x \in E$, on note $\langle f, x \rangle_{E,E'} := f(x)$.

PROPOSITION 1.39. Soient E et F deux espace vectoriel normés et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Alors sa transposée ${}^{\mathrm{t}}T$ est continue et elle vérifie $\|{}^{\mathrm{t}}T\|_{\mathrm{B}(F',E')} = \|T\|_{\mathrm{B}(E,F)}$.

Preuve Pour toute $f \in F'$, on a

$$\|{}^{\mathrm{t}}f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |{}^{\mathrm{t}}Tf(x)| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(Tx)| \leqslant \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f\|_{F'} \|Tx\|_F$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|f\|_{F'}\|T\|_{\mathrm{B}(E,F)}\|x\|_E \\ &\leqslant \|f\|_{F'}\|T\|_{\mathrm{B}(E,F)}. \end{aligned}$$

Cela montre la continuité de ${}^{\mathrm{t}}T$ et $\|{}^{\mathrm{t}}T\|_{\mathrm{B}(F',E')} \leqslant \|T\|_{\mathrm{B}(E,F)}$. Soit $x\in E$ un vecteur de norme 1. On a également

$$\begin{aligned} \|Tx\|_F = \max_{\substack{f\in F'\\ \|f\|_{F'}\leqslant 1}} |f(Tx)| = \max_{\substack{f\in F'\\ \|f\|_{F'}\leqslant 1}} |{}^{\mathrm{t}}f(x)| &\leqslant \sup_{\substack{f\in F'\\ \|f\|_{F'}\leqslant 1}} \|{}^{\mathrm{t}}Tf\|_{E'}\|x\|_E \\ &\leqslant \sup_{\substack{f\in F'\\ \|f\|_{F'}\leqslant 1}} \|{}^{\mathrm{t}}T\|_{\mathrm{B}(F',E')}\|f\|_{F'}\|x\|_E \\ &\leqslant \|{}^{\mathrm{t}}T\|_{\mathrm{B}(F',E')}\|x\|_E. \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|Tx\|_F = \|{}^{\mathrm{t}}T\|_{\mathrm{B}(F',E')}$$

ce qui montre l'autre inégalité. □

1.3.3 Formes géométrique du théorème de HAHN-BANACH

THÉORÈME 1.40 (MAZUR). Soient E un espace vectoriel normé et $C\subset E$ un voisinage convexe de 0. Alors pour tout $x_0\in E\setminus C$, il existe une forme linéaire $f\in E'$ telle que

$$f_0(x_0)\geqslant \sup_{x\in C}|f_0(x)|.$$

Preuve La preuve est à venir, elle repose sur la version suivante du théorème de HAHN-BANACH.

PROPOSITION 1.41. Soient E un espace vectoriel normé, $x_0\in E$ et $p\colon E\to \mathbf{R}$ une semi-norme continue sur E, *i. e.* il existe une constante $C>0$ tellle que $p\leqslant c\|\ \|$. Alors il existe une forme linéaire $f\in E'$ telle que

$$f(x_0)=p(x_0) \quad \text{et} \quad \forall x\in E,\ |f(x)|\leqslant p(x).$$

Montrons cette proposition. On pose $G:=\mathbf{K}x_0$ et on considère l'application

$$g\colon \left|\begin{array}{l} G\longrightarrow \mathbf{K}, \\ \alpha x_0\longmapsto \alpha p(x_0). \end{array}\right.$$

Pour tout $\alpha\in K$, on a $|g(\alpha x_0)|=p(\alpha x_0)$. D'après le théorème de HAHN-BANACH algébrique, il existe une extension $f\in E^*$ à g telle que $|f|\leqslant p$. Comme p est continue, on en déduit que f est continue en 0 et donc continue sur E.

Il reste à montrer le théorème de MAZUR qui viendra dans la suite. □

On va maintenant étudier des formes géométriques du théorème de HAHN-BANACH. Soient $f\in E'$ une forme linéaire non nulle et $\alpha\in\mathbf{R}$. Alors il est facile de voir que les ensembles $\{f<\alpha\}$, $\{f>\alpha\}$ et $\{f=\alpha\}$ sont des convexes. L'ensemble $\{f=\alpha\}$ est un hyperplan affine.

DÉFINITION 1.42. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$. Soient A et B deux sous-ensembles de E.

– On dit qu'on peut *séparer A et B au sens large* s'il existe une forme linéaire $f\in E'$ non nulle et $\alpha\in\mathbf{R}$ tels que

$$A\subset\{f\leqslant\alpha\} \quad \text{et} \quad B\subset\{f\geqslant\alpha\}$$

ou, de manière équivalente, tels que

$$\sup_{x\in A} f(x)\leqslant\alpha\leqslant\inf_{x\in B} f(x).$$

– On dit qu'on peut *séparer A et B au sens strict* s'il existe une forme linéaire $f\in E'$ non nulle, $\alpha\in\mathbf{R}$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$A\subset\{f<\alpha-\varepsilon\} \quad \text{et} \quad B\subset\{f\geqslant\alpha+\varepsilon\}$$

ou, de manière équivalente, tels que
$$\sup_{x\in A} f(x) < \alpha < \inf_{x\in B} f(x).$$

▷ EXEMPLES. – On se place dans $E := \mathbf{R}^2$. Alors les ensembles $\{(0,0)\}$ et $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ sont séparés au sens large par la forme $(x,y) \longmapsto x$ et les ensembles $\{(-1,0)\}$ et $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ sont séparés au sens strict.

– Soient E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Alors les ensembles $\mathrm{B}(0, \|x_0\|)$ et $\{x_0\}$ peuvent être séparés au sens large. En effet, d'après le théorème de HAHN-BANACH topologique, il existe une forme linéaire $f \in E'$ non nulle telle que
$$\|f\|_{E'} = 1 \quad \text{et} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$
Alors $\mathrm{B}(0, \|x_0\|) \subset \{f \leqslant \|x_0\|\}$ et $\{x_0\} \subset \{f \geqslant \|x_0\|\}$.

DÉFINITION 1.43 (jauge). Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $C \subset E$ un voisinage convexe de l'origine. On appelle *jauge* de C (ou *fonctionnelle de* MINKOWSKI) l'application
$$p_C : \left| \begin{aligned} & E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}, \\ & x \longmapsto \inf\{t > 0 \mid x/t \in C\} \end{aligned} \right.$$
en posant $\inf \varnothing = +\infty$.

LEMME 1.44. Soit $C \subset E$ un voisinage ouvert et convexe de l'origine. Alors
1. pour tous $\lambda > 0$ et $x, y \in E$, on a $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$ et $p_C(x+y) \leqslant p_C(x) + p_C(y)$;
2. on a $C = \{x \in E \mid p_C(x) < 1\}$;
3. l'application p_C est continue.

Preuve Montrons que l'application p_C est bien définie. On a $p_C(0) = 0$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Comme C est un voisinage de 0, l'ensemble $I_x := \{t > 0 \mid x/t \in C\}$ est non vide. De plus, en considérant l'application continue
$$F_x : \left| \begin{aligned} & \mathbf{R}_+^* \longrightarrow E, \\ & t \longmapsto x/t, \end{aligned} \right.$$
la préimage $I_x = F_x^{-1}(C) \subset \mathbf{R}$ est convexe, *i. e.* c'est un intervalle. Donc c'est bien défini.

1. L'homogénéité est claire. Soient $x, y \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $x/(p_C(x)+\varepsilon) \in C$ et $y/(p_C(y)+\varepsilon) \in C$, donc la convexité de C donne
$$\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon} = \frac{p_C(x)+\varepsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon}\frac{x}{p_C(x)+\varepsilon} + \frac{p_C(y)+\varepsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\varepsilon}\frac{y}{p_C(y)+\varepsilon} \in C$$
ce qui implique $p_C(x+y) \leqslant p_C(x) + p_C(y) + 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit l'inégalité.

2. Montrons l'égalité par double inclusion. Soit $x \in C$. Alors $x/1 \in C$, donc $1 \in I_x =]p_C(x), +\infty[$, donc $p_C(x) < 1$. Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $p_C(x) < 1$. Alors $1 \in I_x$, donc $x = x/1 \in C$. D'où l'égalité.

3. Montrons la continuité de p_C. Il suffit de montrer sa continuité en 0. Comme C est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(0,r) \subset C$. D'après le point 2, tout point $x \in \mathrm{B}(0,r)$ vérifie $p_C(x) < 1$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ quelconque. Alors
$$p_C\left(\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}\right) < 1.$$
Comme p_C est positivement homogène, on en déduit $p_C(x) < 2/r \cdot \|x\|$. Ceci montre la continuité en 0. □

Preuve du théorème de MAZUR *(1.40)* Comme $x_0 \notin C$, on a $p_C(x_0) \geqslant 1$ et $p_C < 1$ sur C. De plus, la forme p_C est continue. D'après la proposition 1.41, il existe une forme linéaire $f_0 \in E'$ telle que
$$f_0(x_0) = p_C(x_0) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in C,\ |f_0(x)| \leqslant p(x) < 1.$$
Alors pour tout $x \in C$, on a $|f_0(x_0)| \geqslant 1 > |f_0(x)|$ ce qui conclut. □

THÉORÈME 1.45 (HAHN-BANACH géométrique, version hyperplan). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$. Soient $C \subsetneq E$ un ouvert convexe de E contenant 0 et $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe une forme linéaire $f \in E'$ non nulle telle que
$$f(x_0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in C,\ f(x) < 1.$$
Autrement dit, les ensembles $\{x_0\}$ et C sont strictement séparés au sens large.

Preuve On pose $G := \mathbf{R}x_0$ et on considère la forme linéaire

$$g : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \lambda x_0 \longmapsto \lambda. \end{array} \right.$$

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on a $g(\lambda x_0) = \lambda \leqslant \lambda p_C(x_0) = p_C(\lambda x_0)$ car $x_0 \notin C$ et, pour tout $\lambda < 0$, on a $g(\lambda x_0) = \lambda < 0 \leqslant p_C(\lambda x_0)$. On en déduit $g \leqslant p_C$ sur G. Comme p_C est une semi-norme, le théorème de HAHN-BANACH algébrique assure qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ non nulle telle que

$$f|_G = g \quad \text{et} \quad \forall x \in E,\ f(x) \leqslant p_C(x).$$

On a bien $f(x_0) = g(x_0) = 1$ et, pour tout $x \in C$, on a $f(x) \leqslant p_C(x) < 1$. Il reste à montrer que la forme f est continue. Comme p_C est continue, il existe $M > 0$ tel que $p_C \leqslant M\|\ \|$. Alors pour tout $x \in E$, on a

$$f(x) \leqslant p_C(x) \leqslant M\|x\| \quad \text{et} \quad -f(x) = f(-x) \leqslant p_C(-x) \leqslant M\|-x\| = M\|x\|$$

ce qui assure $f \in E'$. □

COROLLAIRE 1.46. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$. Soient $C \subsetneq E$ un convexe non vide et $x_0 \in E \setminus C$.

1. Si C est un ouvert, alors on peut séparer $\{x_0\}$ et C au sens large.
2. Si C est un fermé, alors on peut séparer $\{x_0\}$ et C au sens strict.

Preuve 1. On suppose que C est ouvert. Comme $C_0 \neq \emptyset$, soit $c_0 \in C$. Alors l'ensemble $V := C - c_0$ est un convexe contenant 0 et $x_0 - c_0 \notin V$. D'après le théorème précédent, il existe une forme linéaire $f \in E'$ telle que

$$f(x_0 - c_0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in C,\ f(x - c_0) < 1.$$

On a alors $f(c_0) = f(x_0) - 1$ et donc, pour tout $x \in C$, on a $f(x) < f(c_0) + 1 = f(x_0)$. Ainsi on a $\sup_{x \in C} f(x) < f(x_0)$ ce qui assure la séparation au sens large de $\{x_0\}$ et C.

2. On suppose que C est fermé. Comme $x_0 \notin C$, on a $r := \mathrm{d}(x_0, C) > 0$. On considère l'ensemble $\tilde{C} := C + \mathrm{B}(0, r/2)$. Il s'agit d'un ouvert convexe ne contenant pas x_0. Le point 1 affirme alors qu'il existe une forme linéaire $f \in E'$ non nulle telle que

$$\sup_{x \in \tilde{C}} f(x) < f(x_0).$$

Donc pour tout $y \in C$ et $x \in \mathrm{B}(0, r/2)$, on a $f(y) + f(x) \leqslant f(x_0)$. Pour tout $y \in C$, en passant à la borne supérieure quand $x \in \mathrm{B}(0, r/2)$, on a

$$f(y) + \sup_{\|x\| < r/2} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Par ailleurs, on a

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \sup_{\|x\| < 1} f(x) \quad \text{et} \quad \|f\|_{E'} = \sup_{\|x\| < r/2} f(2/r \cdot x) \leqslant 2/r \cdot \sup_{\|x\| < r/2} f(x).$$

En revenant dans l'inégalité précédente, pour tout $y \in C$, on a

$$f(x_0) \geqslant f(y) + \frac{r}{2}\|f\|_{E'}$$

avec $r/2 \cdot \|f\|_{E'} \neq 0$. D'où

$$f(x_0) > \sup_{y \in C} |f(y)|$$

ce qui assure la séparation au sens strict de $\{x_0\}$ et C.

□

THÉORÈME 1.47. Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$, $C \subsetneq E$ un ouvert convexe non vide de E et $x_0 \in E \setminus C$. Alors $x_0 \in \overline{C}$ si et seulement si, pour tout forme linéaire $f \in E'$, on a $f(x_0) \leqslant \sup_{x \in C} f(x)$.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose $x_0 \in \overline{C}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de C telle que $x_n \longrightarrow x_0$. Alors pour toute forme linéaire $f \in E'$, on a

$$f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leqslant \sup_{n \geqslant 1} f(x_n) \leqslant \sup_{x \in C} f(x).$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, raisonnons par contraposée. On suppose $x_0 \notin \overline{C}$. D'après le corollaire précédente, il existe une forme linéaire $f \in E'$ telle que $\sup_{x \in \overline{C}} f(x) < f(x_0)$ et donc $\sup_{x \in C} f(x) < f(x_0)$. □

◇ REMARQUE. On a vu le critère de densité 1.33 pour des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel normé E. Soient G un sous-espace vectoriel de E et $x_0 \in E$. Alors $x_0 \in \overline{G}$ si et seulement si toute forme linéaire $f \in E'$ nulle sur G est nulle en x_0.

Preuve Utilisons le théorème précédent. On suppose que, pour tout forme linéaire $f \in E'$, on a $f(x_0) \leqslant \sup_{x\in C} f(x)$. Soit $f \in E'$ tel que $f|_G = 0$. Alors $f(x_0) \leqslant \sup_{x\in G} f(x) = 0$, donc $f(x_0) = 0$.

Réciproquement, on suppose $x_0 \in \overline{G}$. Soit $f \in E'$. Si $f|_G = 0$, alors l'inégalité $f(x_0) \leqslant \sup_{x\in C} f(x)$ est évidente. On suppose désormais $f|_G \neq 0$. Alors il existe $y_0 \in G \setminus \{0\}$ tel que $f(y_0) \neq 0$. Alors

$$+\infty = \sup_{t\in\mathbf{R}} f(ty_0) \leqslant \sup_{x\in G} f(x).$$

Ainsi on a $\sup_{x\in G} f(x) = +\infty$ et l'inégalité recherchée est vraie. □

THÉORÈME 1.48 (HAHN-BANACH géométrie compact-fermé). Soient E un espace vectoriel normé et A et B deux convexes de E non vides et disjoints. Alors

1. si A est un ouvert, alors on peut séparer A et B au sens large à l'aide d'une forme linéaire continue non nulle ;
2. si A est un compact et B est un fermé, alors on peut séparer A et B au sens stricte à l'aide d'une forme linéaire continue non nulle ;

Preuve On considère le convexe non vide $C := A - B$ qui ne contient pas 0.

1. On suppose que A est un ouvert. Alors $C = \bigcup_{y\in B}(A - b)$ est un ouvert. D'après le corollaire précédent, on peut séparer $\{0\}$ et C au sens large, c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que

$$\sup_{z\in C} f(x) \leqslant f(0) = 0, \textit{ i. e. } -\infty < \sup_{x\in A} f(x) \leqslant \inf_{y\in B} f(y) < +\infty.$$

2. On suppose que A est un compact et B est un fermé. Montrons que C est un fermé. Soient $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de C et $z \in \overline{C}$ telles que $z_n \longrightarrow z$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $z_n := x_n - y_n$ avec $x_n \in A$ et $y_n \in B$. Comme A est compact, il existe une extraction $\varphi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et $x \in A$ tels que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$. On en déduit $y_{\varphi(n)} \longrightarrow x - z \in B$ puisque B est un fermé. D'où $z = x - (x - z) \in C$. Le convexe C est donc un fermé.

D'après le corollaire précédent, on peut séparer $\{0\}$ et C au sens stricte, c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que

$$\sup_{z\in C} f(x) < 0, \quad \text{donc} \quad -\infty < \sup_{x\in A} f(x) < \inf_{y\in B} f(y) < +\infty.$$ □

LEMME 1.49. Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors l'hyperplan affine $\{f = \alpha\}$ est un fermé pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ si et seulement si la forme f est continue.

Preuve Le sens réciproque est évident. Réciproquement, on raisonne par contraposée et on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que l'hyperplan $H := \{f = \alpha\}$ soit fermée. Alors son complémentaire $E \setminus H$ est un ouvert non vide car $f \neq 0$. Soit $x_0 \in E \setminus H$. On peut supposer $f(x_0) < 0$. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, r) \subset E \setminus H$. Montrons que

$$\forall x \in \mathrm{B}(x_0, r), \quad f(x) < \alpha. \tag{$*$}$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_1 \in \mathrm{B}(x_0, r)$ tel que $f(x_1) > \alpha$. Le segment $[x_1, x_0]$ est contenu dans $\mathrm{B}(x_0, r)$, donc la forme f n'est jamais égale à α sur ce segment. On pose

$$t_0 := \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} \in [0, 1].$$

On trouve alors $f((1 - t_0)x_1 + t_0 x_0) = \alpha$ ce qui est absurde. On a ainsi montré l'assertion $(*)$, *i. e.* pour $u \in \mathrm{B}(0, 1)$, on a $f(x_0 + ru) < \alpha$. Cela montre la continuité de f. □

1.4 DUALITÉ ET TOPOLOGIES FAIBLES

1.4.1 Topologie faible

DÉFINITION 1.50. Soit E un espace vectoriel normé. La *topologie faible* sur E est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications de la famille $\{x \in E \longmapsto f(x) \in \mathbf{K} \mid f \in E'\}$. On la note $\sigma(E, E')$.

PROPOSITION 1.51. Soit E un espace vectoriel normé. Alors

1. la topologie faible sur E est séparée ;
2. une base de voisinage d'un point $x_0 \in E$ pour la topologie faible est donnée par tous les sous-ensembles de la

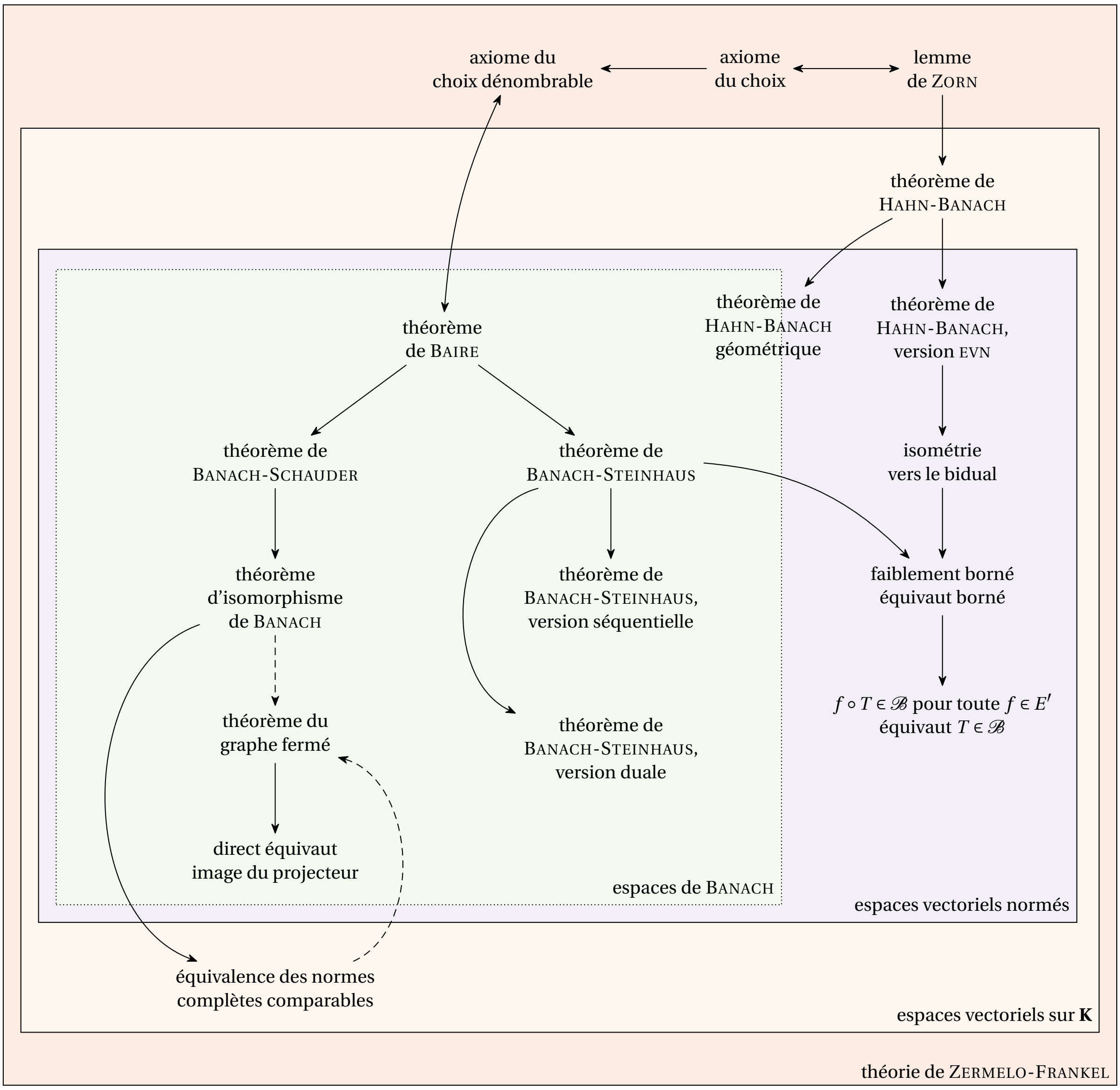

FIGURE 1.1 – Récapitulatif des implications des trois principes (les lignes en pointillés indiquent des démonstrations au choix). Crédit : Éloan.

forme

$$\mathscr{V}(x_0, \varepsilon, (f_j)_{j\in J}) := \{x \in E \mid \forall j \in J,\ |f_j(x - x_0)| < \varepsilon\}$$

où $(f_j)_{j\in J}$ est une famille finie de E' et $\varepsilon > 0$.

DÉFINITION 1.52. Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est dite *faiblement convergente* si elle est convergente pour la topologie faible sur E vers un vecteur $x_\infty \in E$. On note alors $x_n \rightharpoonup x_\infty$.

PROPOSITION 1.53. Soient E un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E et $x_\infty \in E$. Alors

1. $x_n \rightharpoonup x_\infty$ si et seulement si $f(x_n) \to f(x_\infty)$ pour toute $f \in E'$;
2. si $x_n \to x_\infty$, alors $x_n \rightharpoonup x_\infty$;
3. si $x_n \rightharpoonup x_\infty$, alors la suite $(\|x_n\|)_{n\geqslant 0}$ est bornée et $\|x_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$;
4. si $x \rightharpoonup x_\infty$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de E' telle que $f_n \to f \in E'$, alors $f_n(x_n) \to f(x_\infty)$.

RAPPEL. Soient S un ensemble et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologique. Pour tout $i \in I$, soit $\varphi_i : S \longrightarrow T_i$. On veut définir une topologie sur S telle que toutes les applications φ_i soient continues, de manière « économique ».

LEMME 1.54. Soient S un ensemble et $\mathscr{O} \subset \mathscr{P}(S)$ une classe de parties de S telle que

– $\emptyset$ et S sont dans $\mathscr{O}$;
– $\mathscr{O}$ est stable par intersection finie.

Alors le classe de partie $\tau := \{\bigcup_{O\in\mathscr{O}'} O \mid \mathscr{O}' \subset \mathscr{O}\}$ est une topologie sur S.

Preuve Il suffit de vérifier que τ est stable par intersection finies. Soient $\mathscr{O}'_1, \mathscr{O}'_2 \subset \mathscr{O}$. On pose

$$A_1 := \bigcup_{O\in\mathscr{O}'_1} O \quad \text{et} \quad A_2 := \bigcup_{O\in\mathscr{O}'_2} O.$$

Alors

$$A_1 \cap A_2 = \bigcap_{O\in\mathscr{O}'} O \in \tau \quad \text{avec} \quad \mathscr{O}' := \{O_1 \cap O_2 \mid O_1 \in \mathscr{O}'_1, O_2 \in \mathscr{O}'_2\} \subset \mathscr{O}.$$ □

COROLLAIRE 1.55. La classe de parties constituées de toutes les unions d'intersections finis d'ensembles de la forme $\varphi_i^{-1}(O_i)$, où $i \in I$ et O_i est un ouvert de T_i, est une topologie, appelée *topologie faible engendrée par la famille* $(\varphi_i)_{i\in I}$ et notée $\sigma(S, (\varphi_i)_{i\in I})$.

LEMME 1.56. Soient $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de S et $s \in S$. Alors cette suite converge vers s pour la topologie $\sigma(S, (\varphi_i)_{i\in I})$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, on a $\varphi_i(s_n) \longrightarrow \varphi_i(s)$.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose que la suite $(s_n)_{n_i n\mathbf{N}}$ converge vers s pour la topologie $\sigma(S, (\varphi_i)_{i\in I})$. Pour tout $i \in I$, comme φ_i est continue pour cette topologie, on a $\varphi_i(s_n) \longrightarrow \varphi_i(s)$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose que, pour tout $i \in I$, on a $\varphi_i(s_n) \longrightarrow \varphi_i(s)$. Soit $O \subset C$ un ouvert contenant s. Il existe une sous-ensemble fini J de I et des ouverts $O_j \subset T_j$ pour tout $j \in J$ tels que

$$s \in \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(O_j).$$

On a donc $\varphi_j(s) \in O_j$ pour tout $j \in J$. Soit $j \in J$. On sait que $\varphi_j(s_n) \longrightarrow \varphi_j(s)$, donc il existe $N_j \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_j, \quad \varphi_j(s_n) \in O_j.$$

On note $N := \max_{j\in J} N_j$. Alors

$$\forall n \geqslant N, \quad s_n \in \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(O_j) \subset O.$$

On en déduit la convergence pour la topologie $\sigma(S, (\varphi_i)_{i\in I})$. □

LEMME 1.57. Soient $(Z, \mathscr{Z})$ un espace topologique et $\Phi : Z \longrightarrow S$ une application. Alors cette application est continue de $(S, \sigma(S, (\varphi_i)_{i\in I}))$ dans $(Z, \mathscr{Z})$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i \circ \Phi$ est continue.

Preuve Le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose que, pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i \circ \Phi$ est continue. Soit $O \in \sigma(S, (\varphi_i)_{i\in I})$. Montrons que $\Phi^{-1}(O] \in \mathscr{Z}$. On peut alors l'écrire comme une union quelconque d'ennsemble de la forme

$$\bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(O_j)$$

où l'ensemble J est fini et, pour tout $j \in I$, l'ensemble O_j est un ouvert de T_j. En passant à la pré-image par Φ, l'ensemble $\Phi^{-1}(O)$ est bien un ouvert. □

DÉFINITION 1.58. Soit E un espace vectoriel normé. Sa *topologie faible* est la topologie $\sigma(E,(f)_{f\in E'})$.

Preuve de la proposition 1.51 1. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y \notin \mathrm{B}(x,\varepsilon)$. Le théorème de HAHN-BANACH géométrique assure que la boule $\overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon/2)$ est un convexe fermé strictement séparé du fermé $\{y\}$, c'est-à-dire qu'il existe une forme **R**-linéaire $f \in E'$ telle que

$$\forall u \in \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon/2), \quad f(z) < \alpha < f(y).$$

En particulier, on a $f(x) < \alpha < f(y)$, *i. e.* $x \in f^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ et $y \in f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$. Or $f^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ et $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ sont faiblement ouverts et disjoints. Ceci montre la séparation.

2. Pour $f_1,\dots,f_n \in E'$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$\mathscr{V}(x_0,\varepsilon,f_1,\dots,f_n) := \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(]f_i(x_0)-\varepsilon, f_i(x_0)+\varepsilon[)$$

qui est un ouvert pour la topologie faible contenant x_0. Inversement, soit U un ouvert pour la topologie faible contenant x_0. Alors il existe un voisinage $W \subset U$ de x_0 de la forme

$$W = \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(O_j)$$

où, pour tout $j \in J$, l'ensemble O_j est un voisinage de $a_j := f_j(x_0)$ dans **R**. Il existe alors une constante $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall j \in J, \quad]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[\subset O_j.$$

puisque l'ensemble J est fini. On a donc $x_0 \in \mathscr{V}(x_0,\varepsilon,(f_j)_{j\in J}) \subset W \subset U$ ce qui montre que le proposition. □

◇ REMARQUE. Le topologie $\sigma(E,E')$ est moins fine que celle donnée par la norme.

Preuve de la proposition 1.53 Les points 1 et 2 sont assez clairs.

Montrons le point 3. On va utiliser le corollaire du théorème de BANACH-STEINHAUS. On suppose $x_n \rightharpoonup x_\infty$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère la forme linéaire

$$T\colon \left|\begin{array}{l} E' \longrightarrow \mathbf{R}, \\ f \longmapsto \langle f, x_n\rangle \end{array}\right. .$$

Alors pour toute $f \in E'$, la suite réelle $(T_n f)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Par le théorème de BANACH-STEINHAUS, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall f \in E', \quad |T_n f| \leqslant C\|f\|_{E'}.$$

Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\|x_n\| = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leqslant 1}} |\langle f, x_n\rangle| \leqslant C.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. De plus, comme $|\langle f, x_n\rangle| \leqslant \|f\|_{E'}\,\|x_n\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|\langle f, x_\infty\rangle| \leqslant \|f\|_{E'} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

De même que précédemment, on en déduit $\|x_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\|x_n\|$.

Le point 4 se montre alors en découpant en deux morceaux la différence. □

◇ REMARQUE. La réciproque du point 3 est fausse en général. En effet, soit $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de $\ell^2(\mathbf{N})$ définie par

$$x^n := (\delta_{n,m})_{m\in\mathbf{N}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Alors $\|x_n\| = 1 \not\to 0$. Par ailleurs, pour toute $f \in \ell^2(\mathbf{N})'$, le théorème de RIESZ assure qu'il existe une suite $(\xi_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de $\ell^2(\mathbf{N})$ telle que

$$\forall x := (\xi_m)_{m\geqslant 0} \in \ell^2(\mathbf{N}), \quad f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m \overline{\eta_m},$$

donc

$$f(x_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta_{n,m}\overline{\eta_m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit $x_n \rightharpoonup 0$.

PROPOSITION 1.59. Soient E un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E et $x_\infty \in E$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si elle est bornée pour la norme et il existe un ensemble D' dense dans E' pour la norme tel que

$$\forall f \in D', \quad \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x_\infty\rangle.$$

THÉORÈME 1.60. Soit E un espace vectoriel normé. Alors sa topologie issue de la norme et sa topologie faible coïncident si et seulement si l'espace E est de dimension finie.

Preuve $\Leftarrow$ On suppose que la dimension est finie. Montrons que les deux topologies coïncident. Il suffit de montrer que la topologie forte est contenue dans la topologie faible. On note $d := \dim E$. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1e_1 + \dots + x_de_d$ et on note

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_d|).$$

Comme on est en dimension finie, cette norme $\| \, \|_\infty$ est équivalente à toute norme sur E. Soit O un ouvert pour la norme $\| \, \|$. Alors c'est un ouvert pour la norme $\| \, \|_\infty$. Pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, \varepsilon_x) \subset O$. Donc

$$O = \bigcup_{x\in O} \mathrm{B}(x, \varepsilon_x).$$

Il suffit alors de montrer que toute boule ouverte est faiblement ouverte. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Les formes linéaires

$$x := \sum_{j=1}^{e} dx_je_j \longmapsto f_j(x) := x_j, \quad j \in [\![1, d]\!]$$

sont continues, donc la boule

$$\mathrm{B}_\infty(x, \varepsilon) = \{y \in E \mid \forall j \in [\![1, d]\!],\ |\langle f_j, x\rangle - \langle f_j, y\rangle| < \varepsilon\}$$

est faiblement ouverte par le point 2 de la proposition 1.51.

$\Rightarrow$ Réciproquement, raisonnons par contraposée. On suppose que la dimension est infinie. Montrons que les deux topologies ne peuvent coïncider. On considère la sphère $S := \mathrm{S}(0, 1)$ qui est un fermé fort. Montrons qu'elle n'est pas faiblement fermé. Pour cela, montrons que le neutre 0 appartient à la fermeture faible de S. Soit O un voisinage faible de 0. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \dots, f_n \in E'$ tels que $\mathscr{V}(0, \varepsilon, f_1, \dots, f_n) \subset O$. L'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}^n, \\ x \longmapsto (\langle f_1, x\rangle, \dots, \langle f_n, x\rangle) \end{array} \right.$$

est linéaire de noyau $\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_j$. Par ailleurs, comme l'image de Φ est de dimension finie, le théorème du rang donne assure que son noyau est de dimension infinie. Il existe donc $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $x \in \operatorname{Ker} f_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Ainsi pour tous $j \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $|\langle f_j, \lambda x\rangle| = 0 < \varepsilon$, donc $\lambda x \in \mathscr{V}(0, \varepsilon, f_1, \dots, f_n) \subset O$. On pose $\lambda := 1/\|x\|$. Alors $\lambda x \in O \cap S$. Ceci montre que le neutre 0 appartient à la fermeture faible de S. Ainsi les fermetures faibles et fortes de S sont différentes ce qui conclut. □

◇ REMARQUE. Avec un raisonnement identique, on peut montrer que la fermeture faible de S contient la fermeture de la boule unité pour la norme.

Si la topologie faible est strictement plus moins fine de celle de la norme en dimension infinie, existe-t-il des ensembles pour lesquels on peut garantir qu'être fermé pour la topologie forte implique être faiblement fermé ? Le théorème de MAZUR apporte la réponse.

THÉORÈME 1.61 (MAZUR). Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ et $C \subset E$ un convexe non vide. Alors C est fortement fermé si et seulement si C est faiblement fermé.

Preuve Le sens réciproque est clair. On suppose que C est fortement fermé. Montrons qu'il est faiblement fermé. On a $C = \overline{C} \subset \overline{C}^{\sigma(E,E')}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in C^{\mathrm{c}}$. Comme C est un convexe fermé et $\{x\}$ est un convexe compact, le théorème de HAHN-BANACH géométrique assure qu'ils peuvent être séparés strictement par un hyperplan, *i. e.* il existe une forme linéaire $f \in E'$ et un réel $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall y \in C, \quad \langle f, y\rangle < \alpha < \langle f, x\rangle.$$

Ainsi l'ouvert faible $f^{-1}(]a, +\infty[)$ contient x et ne coupe pas x, donc $x \in (\overline{C}^{\sigma(E,E')})^{\mathrm{c}}$. Cela termine la preuve. □

COROLLAIRE 1.62. Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E convergeant faiblement vers un vecteur $x_\infty \in E$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors il existe des réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \quad \text{et} \quad \left\| x_\infty - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| < \varepsilon.$$

NOTATION. Pour une partie A de E, on note $\operatorname{Conv} A \subset E$ l'enveloppe convexe de A. Il s'agit de l'ensemble des combinaisons convexes finies d'éléments de A et c'est le plus petit convexe contenant A.

Preuve Posons $C_n := \operatorname{Conv}\{x_k \mid k \geqslant n\}$. Comme la suite converge faiblement, on a $x_\infty \in \overline{C_n}^{\sigma(E,E')}$. Comme la partie C_n est convexe, le théorème de MAZUR assure $\overline{C_n} = \overline{C_n}^{\sigma(E,E')}$. On a donc $x_\infty \in \overline{C_n}$, donc il existe $y_n \in C_n$ tel que $\|x_\infty - y_n\| < \varepsilon$. □

PROPOSITION 1.63. Soient E et F deux espaces de BANACH et $T\colon E \to F$ une application linéaire. Alors elle est continue pour les normes si et seulement si elle est continue pour les topologies faibles.

Preuve On sait que la continuité forte implique la continuité faible. Démontrons la réciproquement. On suppose que l'application T est continue pour les topologies faibles. Montrons qu'elle est continue pour les normes. Pour cela, on montre que son graphe est fermé pour les normes. En effet, soient $(x_n)_{n\in E}$ une suite de E et $(x,y) \in E \times F$ tels que $(x_n, y_n) \to (x,y)$. Montrons que $y = Tx$. Comme $x_n \to x$, on a $x_n \rightharpoonup x$, donc $Tx_n \rightharpoonup Tx$. De plus, comme $Tx_n \to Tx$, on a $Tx_n \rightharpoonup y$. Comme la topologie faible est séparé, on a $Tx = y$. Ceci montre que le graphe de T est fermé ce qui montre sa continuité forte. □

◇ REMARQUE. – Une application linéaire continue pour les topologies forte et faible est continue pour les topologies forte et forte.
– L'hypothèse de linéarité est essentielle.

1.4.2 Topologie faible-$*$

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$. Sur E', il y a déjà deux topologies : la topologie forte associée à la norme $\| \ \|_{E'}$ et la topologie faible $\sigma(E', E'')$. On va en introduire une troisième.

DÉFINITION 1.64. La *topologie faible-$*$* sur E' est topologie la moins fine sur E' rendant continues les applications $\operatorname{ev}_x\colon f \longmapsto f(x)$ avec $x \in E$, notée $\sigma(E', E)$.

◇ REMARQUE. Pour tout $x \in E$, on confondra les notations x et $\operatorname{ev}_x \in E''$. Ainsi on a une injection naturelle $E \to E''$.

PROPOSITION 1.65. 1. Le topologie $\sigma(E', E)$ est séparée.
2. Une base de voisinage d'une forme $f_0 \in E'$ est donnée par les ensembles

$$\mathscr{W}(f_0, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) := \{f \in E' \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\langle f, x_i\rangle - \langle f_0, x_i\rangle| < \varepsilon\}$$

où $\varepsilon > 0$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.

Preuve Montrons le point 1. Contrairement à la preuve de la proposition 1.51, le théorème de HAHN-BANACH n'est pas utile. Soient $f, g \in E'$ des formes distincts. Alors il existe $x \in E$ tel que $\langle f, x\rangle \neq \langle g, x\rangle$. Par exemple, supposons $\langle f, x\rangle < \langle g, x\rangle$. Alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\langle f, x\rangle < \alpha < \langle g, x\rangle$. D'où $f \in x^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ et $g \in x^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ où les deux pré-images sont deux ouverts disjoints pour la topologie faible-$*$. Cela conclut. □

PROPOSITION 1.66. 1. La topologie faible-$*$ de E' est plus faible que la topologie faible $\sigma(E', E'')$, elle-même plus faible que la topologie forte donnée par la norme $\| \ \|_{E'}$.
2. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E' est faiblement-$*$ converge si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a $\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.
3. Toute suite de E' fortement convergente est faiblement-$*$ convergente.
4. Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E' convergeant faiblement-$*$ vers une forme $f_\infty \in E'$, la suite $(\|f_n\|_{E'})_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et $\|f_\infty\|_{E'} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}$.
5. Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E' convergeant faiblement-$*$ vers une forme $f_\infty \in E'$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant fortement vers un vecteur $x_\infty \in E$, on a $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

◇ REMARQUE. Si E est de dimension finie, alors les trois topologies coïncident.

PROPOSITION 1.67 (représentation des éléments de E''). Soit $\varphi \in E''$ un élément du bidual continu pour la topologie faible-$*$ sur E'. Alors il existe $x \in E$ tel que

$$\forall f \in E', \quad \langle \varphi, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Preuve Puisque φ est faiblement-$*$ continue, l'ensemble

$$V := \{f \in E' \mid |\langle \varphi, f \rangle| < 1\}$$

est faiblement ouvert et il contient 0. D'après la proposition 1.65, il existe $\varepsilon > 0$ et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que

$$\mathscr{W}(0, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) \subset V.$$

Soit $f \in E'$. On suppose que $\langle f, x_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a alors $\langle \lambda f, x_i \rangle = 0 < 1$. On obtient alors $\lambda f \in W \subset V$, donc $|\lambda| |\langle \varphi, f \rangle| < 1$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, cela montre $\langle \varphi, f \rangle = 0$.

LEMME 1.68. Soient $f_1, \dots, f_n, f$ des formes linéaires sur un espace vectoriel. Alors $f \in \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_n \subset \operatorname{Ker} f$.

Admettons-le provisoirement. On a montré que, pour tout $f \in \operatorname{Ker} x_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} x_n$, on a $f \in \operatorname{Ker} \varphi$. D'après le lemme, l'application φ est une combinaison linéaire des éléments $x_1, \dots, x_n$, *i. e.* il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall f \in E', \quad \langle \varphi, f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, f \rangle.$$

Il suffit alors de poser $x := \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. □

Preuve du lemme Il reste à montrer le lemme. Le sens direct est évident. On suppose $\operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_n \subset \operatorname{Ker} f$. En premier lieu, supposons que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. L'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}, \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_n(x), f(x)) \end{array} \right.$$

est une application linéaire vérifiant $(0, \dots, 0) \notin \operatorname{Im} \Phi$. Ainsi son image est un sous-espace vectoriel strict de $\mathbf{R}^{n+1}$, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \in \mathbf{R}^*$ tels que

$$\forall (y_1, \dots, y_n, y) \in \operatorname{Im} \Phi, \quad \alpha y + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0.$$

Avec la définition de Φ, pour tout $x \in E$, on a alors

$$\alpha f(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0.$$

Ceci montre que l'application $\alpha f + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$. Comme $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, on a $\alpha \neq 0$ et

$$f = -\alpha^{-1} (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n) \in \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n).$$

On suppose que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ n'est plus libre. Alors quitte à renuméroter, il existe $p \leqslant n$ tel que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ soit libre. Les éléments $f_{p+1}, \dots, f_n$ sont alors des combinaisons linéaires de $f_1, \dots, f_p$. D'après ce qui précède, comme $\operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_p \subset \operatorname{Ker} f$, on a $f \in \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_p) = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n)$. □

PROPOSITION 1.69 (hyperplan faiblement-$*$ fermé). Soit H un hyperplan de E' faiblement-$*$ fermé. Alors il existe $x \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que

$$H = \{f \in E' \mid \langle f, x \rangle = \alpha\}.$$

Preuve Comme H est un hyperplan, il existe $\varphi : E' \to \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que $H = \{f \in E' \mid \langle \varphi, f \rangle = \alpha\}$. Il reste à montrer que l'application φ est faiblement-$*$ continue. Comme H est faiblement-$*$ fermé, son complémentaire H^{c} est faiblement-$*$ ouvert. Soit $f_0 \in H^{\mathrm{c}}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \dots, f_n \in E'$ tel que $\mathscr{W}(f_0, \varepsilon, f_1, \dots, f_n) \cap H = \varnothing$. Notons $W := \mathscr{W}(f_0, \varepsilon, f_1, \dots, f_n)$. Comme $f_0 \in H^{\mathrm{c}}$, on a $\langle \varphi, f_0 \rangle \neq \alpha$. Par exemple, on suppose $\langle \varphi, f_0 \rangle < \alpha$. Montrons que $\langle \varphi, f \rangle < \alpha$ pour tout $f \in W$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $f_1 \in W$ tel que $\langle \varphi, f_1 \rangle > \alpha$. Alors l'application

$$u : \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \quad t \longmapsto \langle \varphi, t f_1 + (1 - t) f_0 \rangle \end{array} \right.$$

est continue et vérifie $u(0) < \alpha$ et $u(1) > \alpha$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $g \in [f_0, f_1] \subset E'$ tel que $g \in H$. Par ailleurs, comme W est convexe, on a $[f_0, f_1] \subset W$, donc $g \in W$. Ceci est absurde ! D'où $\langle \varphi, f \rangle < \alpha$ pour tout $f \in W$. Par ailleurs, l'ensemble $W - f_0$ est un voisinage faible-$*$ de 0. Pour tout $g \in W - f_0$, on a

$$\langle \varphi, g \rangle = \langle \varphi, g + f_0 \rangle - \langle \varphi, f_0 \rangle < \alpha - \langle \varphi, f_0 \rangle.$$

En procédant de même avec $-g \in W - f_0$, on obtient

$$|\langle \varphi, g\rangle| < \alpha - \langle \varphi, f_0\rangle, \quad \forall g \in W - f_0.$$

En supposant $\langle \varphi, f_0\rangle > \alpha$, on obtient

$$|\langle \varphi, g\rangle| < \langle \varphi, f_0\rangle - \alpha, \quad \forall g \in W - f_0.$$

Ainsi pour tout $f_0 \in H^{\mathrm{c}}$, il existe un voisinage faible-$*$ de 0 contenant dans $\varphi^{-1}(]-|\langle \varphi, f_0\rangle - \alpha|, |\langle \varphi, f_0\rangle - \alpha|[)$. Ainsi l'application φ est faiblement-$*$ continue en 0 et, comme elle est linéaire, elle est faiblement-$*$ continue. □

THÉORÈME 1.70 (BANACH-ALAOGLU). La boule fermée $B_{E'}$ de E' est faiblement-$*$ compacte.

Preuve Montrons que la boule $B_{E'}$ est fermée pour la topologie faible-$*$. Soit $f_0 \in \overline{B_{E'}}^{\sigma(E',E)}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la norme $\|f_0\|$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $\|x_\varepsilon\| = 1$ et $\langle f_0, x_\varepsilon\rangle > \|f_0\| - \varepsilon$. On considère le voisinage faible-$*$ de f_0

$$\mathscr{W}(f_0, \varepsilon, x_\varepsilon) = \{f \in E' \mid |\langle f - f_0, x_\varepsilon\rangle| < \varepsilon\}.$$

Ce dernier intersecte la boule, *i. e.* il existe $f \in E'$ telle que

$$\|f\| < 1 \quad \text{et} \quad |\langle f - f_0, x_\varepsilon\rangle| < \varepsilon.$$

Alors

$$\|f_0\| - \varepsilon < \langle f_0, x_\varepsilon\rangle < \langle f, x_\varepsilon\rangle + \varepsilon \leqslant \|f\|\,\|x_\varepsilon\| + \varepsilon \leqslant 1 + \varepsilon.$$

D'où $\|f_0\| < 1 + 2\varepsilon$. En laissant tendre ε vers 0^+, on obtient $\|f_0\| \leqslant 1$ et donc $f_0 \in B_{E'}$. Ainsi la boule $B_{E'}$ est faiblement-$*$ fermée.

On considère $S := \mathbf{R}^E$ l'espace des formes linéaires sur E que l'on munit de la topologie produit. Cette dernière est la topologie la moins fine rendant continues les applications d'évaluations $\mathrm{ev}_x \colon w \in S \longmapsto w(x) \in \mathbf{R}$ pour $x \in E$. Considérons l'application

$$\Lambda \colon \left| \begin{array}{l} E' \longrightarrow S, \\ f \longmapsto [x \in E \longmapsto \langle f, x\rangle]. \end{array} \right.$$

Montrons que cette dernière est continue pour la topologie faible-$*$ et la topologie produit. Pour tout $x \in E$, l'application $\mathrm{ev}_x \circ \Lambda$ est continue de E' dans $\mathbf{R}$. Par définition de la topologie produit, l'inverse de sa restriction à $\Lambda(E')$, c'est-à-dire $\Lambda^{-1} \colon \Lambda(E') \longrightarrow E'$, est continu. Donc pour tout $x \in E$, l'application

$$u_x \colon w \in \Lambda(E') \longmapsto \Lambda^{-1}(w)(x)$$

est continue et vérifie

$$u_x(\Lambda(f)) = \langle f, x\rangle = \mathrm{ev}_x(\Lambda(f)), \quad \forall f \in E',$$

c'est-à-dire $u_x = \mathrm{ev}_x|_{\Lambda(E')}$. Ceci montre que l'application Λ est un homéomorphisme sur son image.

Enfin, montrons que la boule $B_{E'}$ est l'image par Λ d'un compact. On considère l'ensemble

$$K := \prod_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|] = \{w \in S \mid \forall x \in E, |\mathrm{ev}_x(w)| \leqslant \|x\|\}.$$

C'est un compact de S par le théorème de TYCHONOV. Il vient alors $B_{E'} = \Lambda^{-1}(K \cap F)$ où l'ensemble

$$F := \{w \in S \mid \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, w(\alpha x + \beta y) = \alpha w(x) + \beta w(y)\}$$

est un fermé comme image réciproque de $\{0\}$ par une fonction continue. Alors l'intersection $K \cap F$ est compacte et, comme Λ^{-1} est continue, la boule $B_{E'}$ est faiblement-$*$ compacte. □

1.4.3 Revisiter la réflexivité

THÉORÈME 1.71 (KAKUTANI). Soit E un espace de BANACH. Alors il est réflexif si et seulement si sa boule unité est faiblement compacte.

Preuve On note $B_E \subset E$ sa boule unité.

$\Rightarrow$ On suppose qu'il est réflexif. Soit $J \colon E \longrightarrow E''$ l'isométrie canonique. Alors $J(E) = E''$. On peut alors identifier la topologie faible de E à la topologie faible-$*$ de E''. Mais le théorème précédent assure que la boule unité $B_{E''} = J(B_E)$ est faiblement-$*$ compacte et donc la boule B_E est faiblement compacte. En effet, montrons que l'application $J^{-1} \colon E'' \longrightarrow E'$ est continue pour les topologies faible-$*$ et faible. Soit $O \subset E$ un ouvert faible. Montrons que l'image $J(O)$ est un ouvert faible-$*$. Soit $x_0 \in O$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \dots, f_n \in E'$ tels que $V := \mathscr{V}(x_0, \varepsilon, f_1, \dots, f_n) \subset O$. Montrons que $J(V) \subset J(O)$. On a

$$J(V) = \{\varphi \in E'' \mid \exists x \in E,\ \varphi = J(x), |\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon, \forall i \in [\![1, n]\!]\}$$

$$= \{\varphi \in E'' \mid |\langle \varphi - J(x_0), f_i\rangle| < \varepsilon, \forall i \in [\![1,n]\!]\} \subset J(O).$$

Ceci montre que l'application J^{-1} est continue.

$\Leftarrow$ On suppose que la boule B_E est faiblement compacte. Montrons que $J(E) = E''$. Pour cela, on va montrer que $J(B_E) = B_{E''}$. Aidons-nous du lemme suivant.

LEMME 1.72 (GOLDSTINE). Soit E un espace de BANACH. Alors sa boule unité B_E a son image par l'isométrie canonique $J\colon E \longrightarrow E''$ dense dans la boule unité $B_{E''}$ de E' pour la topologie faible-$*$.

Admettons provisoirement ce lemme. Comme J est une isométrie, elle est continue pour les topologies fortes, D'après la proposition 1.63, elle est continue pour les topologies faibles $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E'',E''')$. Ainsi elle est continue pour les topologies $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E'',E')$ car cette dernière est moins fine que la topologie $\sigma(E'',E''')$. Comme B_E est faiblement compacte, son image $J(B_E)$ est compacte pour la topologie faible-$*$. De plus, le lemme de GOLDSTINE assure que cette image $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible-$*$. D'où $J(B_E) = B_{E''}$. □

Montrons à présent le lemme de GOLDSTINE. Ce dernier est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 1.73. Soient E un espace de BANACH et $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire bornée. Alors pour tous $\varepsilon > 0$ et toutes $f_1,\dots,f_n \in E'$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que

$$\|x_\varepsilon\| \leqslant \|\varphi_0\|_{E''} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \langle f_j, x_\varepsilon\rangle = \langle \varphi_0, f_j\rangle,\ \forall j \in [\![1,n]\!].$$

En effet, ce lemme entraîne le lemme de GOLDSTINE. Soit $\varphi_0 \in B_{E''}$ et $V \subset E''$ un voisinage faible-$*$ de φ_0. Montrons que $V \cap J(B_E) \neq 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1,\dots,f_n \in E'$ tels que $W := \mathscr{W}(\varphi_0,\varepsilon,f_1,\dots,f_n) \subset V$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on pose $\alpha_j := \langle \varphi_0, f_j\rangle$. Alors le lemme précédent assure qu'il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $J(x_\varepsilon) \in W$ en prenant $\varepsilon \leqslant 1 - \|\varphi\|_{E''}$ ce qui entraîne le lemme de GOLDSTINE puisqu'alors $J(x_\varepsilon) \in V \cap J(B_E)$.

Preuve du lemme On utilise le théorème de HELLY. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on pose $\alpha_j := \varphi_0(f_j)$ et $\gamma := \|\varphi_0\|_{E''}$. Alors pour tous $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j\Big| &= \Big|\varphi_0\Big(\sum_{j=1}^n \beta_j f_j\Big)\Big| \\ &\leqslant \|\varphi_0\|_{E''} \Big\|\sum_{j=1}^n \beta_j f_j\Big\|_{E'} \leqslant \gamma \Big\|\sum_{j=1}^n \beta_j f_j\Big\|_{E'}.\end{aligned}$$

Le théorème de HELLY assure alors l'existence d'un vecteur $x_\varepsilon \in E$ tel que

$$\|x_\varepsilon\| \leqslant \gamma + \varepsilon \quad \text{et} \quad f_j(x_\varepsilon) = \alpha_j,\ \forall j \in [\![1,n]\!]$$

ce qui conclut. □

COROLLAIRE 1.74 (fermés réflexifs). Soit E un espace de BANACH. Alors tout sous-espace vectoriel fortement fermé de E est réflexif.

Preuve Soit G un sous-espace vectoriel fortement fermé de E. Vérifions que la boue unité B_G de G est compacte pour la topologie faible. La topologie faible de G est la trace de la topologie faible de E sur G. Comme E est réflexif, sa boule B_E est faiblement compacte. De plus, la partie G est un convexe faiblement fermé, donc la boule B_G est un compact faible de E et donc un compact faible de G. □

COROLLAIRE 1.75. Soit E un espace de BANACH. Alors il est réflexif si et seulement si son dual topologique est réflexif.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose que l'espace E est réflexif. D'après le théorème de BANACH-ALAOGLU, la boule $B_{E'}$ est faiblement-$*$ compacte. Comme E est réflexif, les topologies $\sigma(E',E)$ et $\sigma(E',E'')$ coïncident, donc le boule $B_{E'}$ est faiblement compacte. Alors le théorème de KAKUTANI assure que le dual E' est réflexif.

$\Leftarrow$ On suppose que le dual E' est réflexif. D'après le sens direct, son bidual E'' est réflexif. Comme $J(E)$ est fortement fermé de E'', le corollaire précédente assure que ce sous-espace vectoriel $J(E)$ est réflexif. Comme J^{-1} est un isomorphisme isométrique entre $J(E)$ et E, on en déduit que l'espace E est réflexif. □

1.4.4 Uniforme convexité

DÉFINITION 1.76. Un espace vectoriel normé E est *uniformément convexe* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel

que
$$\forall x, y \in \mathrm{B}_E(0,1), \quad \|x-y\| \geqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|x+y\| \leqslant 2(1-\delta).$$

▷ EXEMPLES. – L'espace vectoriel normé $(\mathbf{R}^2, \|\ \|_2)$ est uniformément convexe. Il ne l'est pas pour la norme $\|\ \|_1$. De plus, tout espace préhilbertien est uniformément convexe.
– Pour $p \in]1, +\infty[$, les espaces $\ell^p(\mathbf{N})$ et $\mathrm{L}^p(S)$ sont uniformément convexes.

THÉORÈME 1.77 (MILMAN-PETTIS). Un espace de BANACH uniformément convexe est réflexif.

Preuve Soit E un espace de BANACH uniformément convexe. On considère l'isométrie canonique $J\colon E \to E''$. Montrons que $B_{E''} = J(B_E)$. Soit $\varphi_0 \in E''$ tel que $\|\varphi_0\| = 1$. Par définition $\|\varphi_0\|$, il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de $B_{E'}$ telles que
$$\forall n \geqslant 1, \quad \varphi_0(f_n) \geqslant 1 - 1/n.$$
D'après le théorème de HELLY, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in E$ tel que
$$\|x_n\| \leqslant \|\varphi_0\| + 1/n \quad \text{et} \quad f_j(x_n) = \varphi_0(f_j), \quad \forall j \in [\![1, n]\!].$$
Pour tout $n \geqslant 1$, puisque
$$1 - 1/n \leqslant \varphi_0(f_n) = f_n(x_n) \leqslant \|f_n\|\,\|x_n\| = \|x_n\| \leqslant 1 + 1/n,$$
on a $\|x_n\| \longrightarrow 1$. Quitte à diviser les vecteurs x_n par la borne supérieure $\sup_{n\geqslant 1}\|x_n\| < +\infty$, on peut supposer que ce sont des éléments de la boule unité. Montrons que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge fortement. Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et des entiers $n_1 < m_1 < \cdots < n_k < m_k < \cdots$ tels que
$$\varepsilon \leqslant \|x_{n_k} - x_{m_k}\|, \quad \forall k \geqslant 1.$$
Comme $\|x_n\| \longrightarrow 1$ et comme E est uniformément convexe, on obtient
$$\limsup_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - x_{m_k}\| \leqslant 2(1-\delta) < 2$$
où le réel $\delta > 0$ est associé au réel $\varepsilon > 0$ dans la définition de l'uniforme convexité de E. Or pour tout $k \geqslant 1$, comme $n_k < m_k$, on a $f_{n_k}(x_{m_k}) = f_{n_k}(x_{n_k}) = \varphi_0(x_{n_k})$ et
$$\begin{aligned} 2\left(1 - \frac{1}{m_k}\right) &\leqslant 2\varphi_0(f_{n_k}) = f_{n_k}(x_{n_k} - x_{m_k}) \\ &\leqslant \|f_{n_k}\|\|x_{n_k} - x_{m_k}\| = \|x_{n_k} - x_{m_k}\|, \end{aligned}$$
donc $\limsup_{k\to+\infty}\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geqslant 2$ ce qui est impossible. Ainsi la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un vecteur $x_0 \in E$ qui satisfait les relations
$$\|x_0\| = 1 \quad \text{et} \quad f_j(x_0) = \varphi_0(f_j), \quad \forall j \geqslant 1. \tag{$*$}$$
Montrons qu'un tel vecteur est unique. Supposons qu'il y en a deux distincts $x_0, y_0 \in E$. Par l'uniforme convexité, on a $\|x_0 + y_0\| < 1$. De plus, pour tout $j \geqslant 1$, on a $f_j(x_0 + y_0) = 2\varphi_0(f_j)$ et, de même, on a $2(1 - 1/j) \leqslant \|x_0 + y_0\|$, donc $\|x_0 + y_0\| \geqslant 2$ ce qui est contradictoire. On obtient alors l'unicité du vecteur $x_0 \in E$ vérifiant les relations $(*)$.

Soit $f_0 \in E'$ une forme linéaire quelconque. Montrons que $f_0(x_0) = \varphi_0(f_0)$. On peut reprendre, comme dans le raisonnement précédent, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et on peut trouver une unique vecteur $\tilde{x}_0 \in E$ vérifiant
$$\|\tilde{x}_0\| = 1 \quad \text{et} \quad f_j(\tilde{x}_0) = \varphi_0(f_j), \quad \forall j \geqslant 0.$$
L'unicité de la solution des relations $(*)$ montre que $x_0 = \tilde{x}_0$ ce qui termine la preuve. □

PROPOSITION 1.78 (condition suffisante de convergence forte). Soient E un espace de BANACH uniformément convexe et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E qui converge faiblement vers un vecteur $x_\infty \in E$. On suppose
$$\limsup_{n\to+\infty} \|x_n\| \leqslant \|x_\infty\|.$$
Alors cette suite converge fortement vers x_∞.

Preuve Si $x_\infty = 0$, le résultat est immédiat. Supposons alors $x_\infty \neq 0$. Pour $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, posons
$$a_n := \max(\|x_n\|, \|x_\infty\|) \quad \text{et} \quad y_n := x_n / a_n.$$
Comme la suite converge faiblement, on a $\liminf_{n\to+\infty}\|x_n\| \geqslant \|x_\infty\|$, donc $a_n \longrightarrow \|x_\infty\|$. De plus, comme la multiplication par un scalaire est continue, la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers y_∞. De plus, comme la suite $((y_n + y_\infty)/2)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers y_∞, on a
$$\|y_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left\| \frac{y_n + y_\infty}{2} \right\|.$$

Comme $\|y_\infty\| = 1$ et $\|y_n\| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on obtient

$$\left\| \frac{y_n + y_\infty}{2} \right\| \longrightarrow 1.$$

D'après l'uniforme convexité, on en déduit $\|y_n - y_\infty\| \longrightarrow 0$ et donc $\|x_n - x_\infty\| \longrightarrow 0$. □

1.4.5 Séparabilité

DÉFINITION 1.79. Un espace vectoriel normé E est *séparable* s'il existe un sous-ensemble dense dans E et dénombrable.

PROPOSITION 1.80. Un espace vectoriel normé dont le dual est séparable l'est aussi.

Preuve Soit E un espace vectoriel normé tel quel le dual E' est séparable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E' dense dans E'. Choisissons une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E telle que $\|x_n\| = 1$ et $\langle f_n, x_n\rangle \geqslant \|f_n\|/2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On considère les sous-espaces vectoriels

$$G := \operatorname{Vect}_{\mathbf{K}}(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad G_0 := \operatorname{Vect}_{\mathbf{Q}}(x_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Alors le sous-espace vectoriel G_0 est dénombrable et dense dans G. Il suffit alors de montrer que le sous-espace vectoriel G est dense dans E. Soit $f \in E'$ une forme linéaire nulle sur G. Montrons que $f = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans E, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\|f - f_n\| < \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\|f_n\| \leqslant \langle f_n, x_n\rangle &\leqslant |\langle f - f_n, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle| \\ &\leqslant \|f - f_n\|\,\|x_n\| = \|f - f_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit $\|f\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n\| < 3\varepsilon$ et ceci pour tout réel $\varepsilon > 0$. Cela montre $f = 0$. □

COROLLAIRE 1.81. Soit E un espace de BANACH. Alors il est réflexif et séparable si et seulement si son dual E' est réflexif et séparable.

Preuve Le sens réciproque est évident avec la proposition précédente. Réciproquement, supposons que l'espace E est réflexif et séparable. Alors son bidual E'' est réflexif et séparable. La proposition précédente assure alors que l'espace E' est réflexif et séparable. □

DÉFINITION 1.82. Un espace topologique E est *métrisable* s'il existe une distance sur E qui engendre la topologie sur E.

PROPOSITION 1.83 (métrisabilité faible-∗). Un espace vectoriel normé E est séparable si et seulement si la topologie faible-∗ sur la boule $B_{E'}$ de son dual est métrisable.

Preuve $\Leftarrow$ On suppose que l'espace E est séparable. Alors il existe un sous-ensemble $A \subset E$ dénombrable et dense dans E. Alors l'intersection $D := A \cap B_E$ est dénombrable. On note alors $D = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Enfin, pour toutes formes linéaires $f, g \in B_{E'}$, on pose

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\langle f - g, x_n\rangle|}{2^n} < +\infty.$$

Montrons d'abord que l'ensemble D est dense dans B_E. Soient $x \in B_E$ et O un ouvert contenant x. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subset O$. Quitte à réduire ε, on a $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \subset B_E$. Comme A est dense dans A, l'intersection $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap A$ contient un point $y \in D$. Cela montre la densité de D dans B_E. Cela permet de dire que l'application d est bien une distance sur $B_{E'}$.

Soit τ la topologie induite par d sur $B_{E'}$. Montrons que $\tau \subset \sigma(E', E)$. Soient $f_0 \in B_{E'}$ et $O \in \tau$ un ouvert contenant f_0. Alors il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_d(f_0, r) \subset O$. Soient $\varepsilon > 0$ et $k \geqslant 0$ tels que $1/2^k < r/2$ et $\varepsilon < r/4$. Alors l'ensemble $V := \mathscr{W}(f_0, \varepsilon, x_1, \dots, x_k)$ est un voisinage faible-∗ de f_0. Il reste à montrer $V \subset \mathrm{B}_d(f_0, r) \subset O$ pour avoir l'inclusion. Pour tout $f \in V$, on a

$$\begin{aligned} d(f_0, f) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{|\langle f - g, x_n\rangle|}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{|\langle f - g, x_n\rangle|}{2^n} \\ &\leqslant 2\varepsilon + 1/2^k < r. \end{aligned}$$

Réciproquement, montrons que $\sigma(E', E) \subset \tau$. Soient $f_0 \in B_E$ et O un ouvert faible-∗ contenant f_0. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $y_1, \dots, y_k \in E$ tel que $V := \mathscr{V}(f_0, \varepsilon, y_1, \dots, y_k) \subset O$. Notons $m := \max(\|y_1\|, \dots, \|y_k\|)$. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $y_j/m \in B_E$ et la densité de D dans B_E assure que, pour tout $\eta > 0$, il existe $n_j \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|x_{n_j} - x_j/m\| < \eta.$$

Soit $r > 0$ tel que $m2^{n_j} r < \varepsilon/2$ pour tout $j \in [\![1,k]\!]$. Alors pour toute $f \in \mathrm{B}_d(f_0,r)$, on a

$$\sum n0i \frac{|\langle f - f_0, x_n\rangle|}{2^n} < r,$$

donc $\left|\langle f - f_0, x_{n_j}\rangle\right| < 2^{n_j} r \leqslant \varepsilon/2 + 2\eta m$ pour tout $j \in [\![1,k]\!]$. En choisissant $\eta > 0$ suffisamment petit, on a montré $\mathrm{B}_d(f_0,r) \subset V \subset O$. □

PROPOSITION 1.84 (métrisabilité faible). Le dual d'un espace vectoriel normé E est séparable si et seulement si la topologie faible sur la boule B_E de cet espace est métrisable.

THÉORÈME 1.85 (compacité séquentielle faible-$*$). Soient E un espace de BANACH séparable. Alors toute suite bornée de E' admet une sous-suite faiblement-$*$ convergente.

Preuve Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de E'. Alors il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad g_n := f_n/M \in B_{E'}.$$

D'après le théorème de BANACH-ALAOGLU, la boule $B_{E'}$ est faiblement-$*$ compacte. L'espace E étant séparable, la topologie faible-$*$ sur $B_{E'}$ est métrisable, donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente pour la métrique et donc pour la topologie faible-$*$. Il en va donc de même pour la suite $(f_n)_{n\in E}$ □

THÉORÈME 1.86 (compacité séquentielle faible). Soient E un espace de BANACH réflexif. Alors toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de E. Alors l'ensemble $G := \overline{\mathrm{Vect}(x_n)_{n\in\mathbf{N}}}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, donc il est réflexif et séparable par construction. On en déduit que son dual G' est réflexif et séparable, donc la boule unité $B_{G''}$ de G'' est métrisable pour la topologie faible-$*$. Or cette boule $B_{G''}$ est faiblement-$*$ compacte. Ainsi comme les deux boules B_G et $B_{G''}$ sont isomorphe, on en déduit que la boule B_G est compacte et métrisable pour la topologie faible-$*$. □

PROPOSITION 1.87. Soit E un espace de BANACH tel qu'il existe une famille non dénombrable d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ de E deux-à-deux disjoints. Alors E n'est pas séparable.

Idée de la preuve Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dense de E. Pour tout $i \in I$, on a $O_i \cap \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\} \neq \emptyset$, donc il existe $n_i \in \mathbf{N}$ tel que $u_{n_i} \in O_i$. On montre que l'application $i \in I \longmapsto n_i$ est injective, donc l'ensemble I est dénombrable ce qui est impossible. □

1.4.6 Les espaces L^p

Soit $(S,\mathscr{B},m)$ un espace mesuré où l'espace S est polonais, *i. e.* métrique, complet et séparable, et la tribu $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne sur S. Soit $p \geqslant 1$. On note

$$\mathrm{L}^p(S) := \left\{ x\colon S \longrightarrow \mathbf{R} \;\middle|\; \int_S |x(s)|^p\, m(\mathrm{d}s) < +\infty \right\}$$

et $\mathrm{L}^\infty(S)$ l'ensemble des fonctions de S dans $\mathbf{R}$ essentiellement bornées. Pour $x \in \mathrm{L}^\infty(S)$, on note

$$\|x\|_\infty := \sup_{s\in S} \mathrm{ess}\, |x(s)|$$

qui définit une norme sur $\mathrm{L}^\infty(S)$. De même, pour tous $p \geqslant 1$ et $x \in \mathrm{L}^p(S)$, on note

$$\|x\|_p := \int_S x^p(s)\, m(\mathrm{d}s).$$

◇ REMARQUE. 1. Si $m(S) < +\infty$, alors $\|x\|_p \longrightarrow \|x\|_\infty$ quand $p \to +\infty$.

2. Pour $p \in [1,+\infty[\cup \{\infty\}$, l'espace $\mathrm{L}^p(S)$ est un espace de BANACH.

3. Soit $p \in\,]1,+\infty[$. Montrons que $\mathrm{L}^p(S)$ est uniformément convexe. On suppose $p \geqslant 2$. On peut montrer l'inégalité de CLARKSON

$$\forall x,y \in \mathrm{L}^p(S), \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p).$$

Cette dernière se montre en remarquant que $\alpha^p + \beta^p \leqslant (\alpha^2+\beta^2)^{p/2}$ pour tous $\alpha,\beta > 0$. Soient $x,y \in B_{\mathrm{L}^p(S)}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\|x-y\|_p \geqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p \leqslant 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

et il suffit de prendre $\delta := 1-(1-(\varepsilon/2)^p)^{1/p}$. D'où l'uniforme convexité.

On suppose $1<p<2$. En étudiant la fonction convexe

$$h\colon \left|\begin{array}{l}\mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R},\\ \quad r \longmapsto (1+r^{1/p})^p + |1-r^{1/p}|^p,\end{array}\right.$$

on obtient l'inégalité

$$\forall x,y\in \mathrm{L}^p(S),\quad \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \geqslant (\|x\|_p+\|y\|_p)^{p/2}.$$

Alors pour tous $x,y\in\mathrm{L}^p(S)$, en posant $\tilde{x} := x+y$ et $\tilde{y} := x-y$, on a

$$\left(\left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\|_p + \left\|\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right\|_p\right)^p + \left|\left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\| - \left\|\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right\|_p\right|^p \leqslant 2.$$

De là, on peut en déduire l'uniforme convexité. On a ainsi traité tous les cas : l'espace $\mathrm{L}^p(S)$ est uniformément convexe. En particulier, il est réflexif.

4. Soit $p\in\,]1,+\infty[$. On note $q>1$ son exposant conjugué. Le théorème de représentation de RIESZ assure que, pour tout $f\in\mathrm{L}^p(S)'$, il existe $u\in\mathrm{L}^q(S)$ tel que

$$\forall x\in\mathrm{L}^p(S),\quad \langle f,x\rangle = \int_S u(s)x(s)m(\mathrm{d}s)$$

et on a alors $\|u\|_q = \|f\|_{\mathrm{L}^p(S)'}$. Montrons que l'application

$$T\colon \left|\begin{array}{l}\mathrm{L}^q(S) \longrightarrow \mathrm{L}^p(S)',\\ \quad u \longmapsto \left|\begin{array}{l}\mathrm{L}^p(S)\longrightarrow \mathbf{R},\\ \quad x\longmapsto \langle Tu,x\rangle := \displaystyle\int_S u(s)x(s)m(\mathrm{d}s)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

est une isométrie surjective. Soit $u\in\mathrm{L}^q(S)$. D'après l'inégalité de HÖLDER, on a $\|Tu\|_{\mathrm{L}^p(S)'}\leqslant\|u\|_q$. Montrons l'inégalité inversible. On considère la fonction $v\colon S\to\mathbf{R}$ définie par

$$v(s) = \begin{cases}|u(s)|^{q-2}u(s) & \text{si } u(s)\neq 0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors $v\in\mathrm{L}^p(S)$ et $\|v\|_p = \|u\|_q^{q-1}$. Par ailleurs, on a

$$\langle Tu,v\rangle = \int_S Tu(s)v(s)m(\mathrm{d}s) = \|u\|_q^q,$$

donc

$$\|Tu\|_{\mathrm{L}^p(S)'} \geqslant \frac{\langle Tu,v\rangle}{\|v\|_p} = \|u\|_q.$$

D'où $\|Tu\|_{\mathrm{L}^p(S)'} = \|u\|_q$. Ainsi l'application T est une isométrie.

Montrons qu'elle est surjective. L'ensemble $G := T(\mathrm{L}^q(S))$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{L}^p(S)'$ puisque l'espace $\mathrm{L}^q(S)$ est complet et l'application T est une isométrie. Il suffit alors de montrer que celui-ci est dense dans $\mathrm{L}^p(S)'$. Pour cela, on utilise le critère de densité et le fait que l'espace $\mathrm{L}^p(S)$ est réflexif. Soit $h\in\mathrm{L}^p(S)$ une fonction telle que

$$\forall u\in\mathrm{L}^q(S),\quad \langle Tu,h\rangle = 0.$$

En considérant la fonction $u\colon s\longmapsto |h(s)|^{p-2}h(s)$, on montre que $h=0$. Ceci montre la densité de G dans $\mathrm{L}^p(S)'$ et donc la surjectivité de l'application T.

5. Soient $S\subset\mathbf{R}^d$ et $p\in[1,+\infty[$. Montrons que l'espace $\mathrm{L}^p(S)$ est séparable. On considère le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel engendré par les indicatrices des ensembles de la forme

$$\prod_{k=1}^d\,]a_k,b_k[\,\subset S,\quad a_k,b_k\in\mathbf{Q}.$$

Alors ce sous-espace vectoriel E est dense dans $\mathrm{L}^p(S)$.

6. Étudions l'espace $\mathrm{L}^1(S)$. Soit $f\in\mathrm{L}^1(S)'$. Alors il existe une unique fonction $u\in\mathrm{L}^\infty(S)$ tel que

$$\forall x\in\mathrm{L}^1(S),\quad \langle f,x\rangle = \int_S u(s)x(s)m(\mathrm{d}s).$$

Admettons ce résultat. Dans ce cas, on a $\|u\|_\infty = \|f\|_{\mathrm{L}^1(S)'}$.

Soit $S \subset \mathbf{R}^d$ un sous-ensemble ouvert contenant 0. Montrons que l'espace $\mathrm{L}^1(S)$ n'est pas réflexif. À partir d'un certain rang $n \geqslant N_0$, on a $\mathrm{B}(0,1/n) \subset S$. Pour $n \geqslant N_0$, on pose

$$x_n := \frac{\mathbb{1}_{\mathrm{B}(0,1/n)}}{m(\mathrm{B}(0,1/n))}.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de la sphère de $\mathrm{L}^1(S)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'espace $\mathrm{L}^1(S)$ est réflexif. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 0}$ qui converge faiblement vers un vecteur $x \in \mathrm{L}^1(S)$. Alors pour tout $f \in \mathrm{L}^\infty(S)$, on a

$$\int_S x_{n_k}(s) f(s) m(\mathrm{d}s) \longrightarrow \int_S x(s) f(s) m(\mathrm{d}s).$$

Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{c}}(S \setminus \{0\})$. Pour $k \geqslant 0$ assez grand, on a

$$\int_S x_{n_k}(s) f(s) m(\mathrm{d}s) = 0$$

et, d'après la convergence ci-dessus, on a

$$\int_S x(s) f(s) m(\mathrm{d}s) = 0.$$

On en déduit que $x = 0$ presque partout sur $S \setminus \{0\}$ et donc sur S. En prenant $f = 1$, on obtient

$$\int_S x(s) m(\mathrm{d}s) = 1$$

ce qui est absurde. On en déduit la non réflexivité de l'espace $\mathrm{L}^1(S)$.

7. Étudions l'espace $\mathrm{L}^\infty(S)$. Celui-ci est sympathique car ils est isomorphe au dual $\mathrm{L}^1(S)'$. On a les propriétés suivantes :

- Sa boule unité est faiblement-$*$ compacte, *i. e.* pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty(S), \mathrm{L}^1(S))$.
- Pour toute suite bornée de $\mathrm{L}^\infty(S)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible-$*$.
- Il n'est pas réflexif car sinon l'espace $\mathrm{L}^1(S)$ le serait.
- Le dual de $\mathrm{L}^\infty(S)$ contient $\mathrm{L}^1(S)$, mais il est strictement plus grand que $\mathrm{L}^1(S)$.
- Il n'est pas séparable. En effet, lorsque $S \subsetneq \mathbf{R}^d$, on considère la famille

$$(\{x \in \mathrm{L}^\infty(S) \mid \|x - \mathbb{1}_{\mathrm{B}(a,r)}\|_\infty < 1/2\})_{(a,r)\in I} \quad \text{avec} \quad I := \{(a,r) \in S \times \mathbf{R} \mid r < \mathrm{d}(a, S^{\mathrm{c}})\}$$

et on applique la proposition 1.87.

Chapitre 2

ANALYSE SPECTRALE ET THÉORIE DES OPÉRATEURS

2.1 OPÉRATEURS : GÉNÉRALITÉS

2.1.1 Opérateur et opérateur dual

DÉFINITION 2.1. Soient E et F deux espaces de BANACH. Un *opérateur* de E sur F est une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $\operatorname{Dom}(T) \subset E$ et à valeurs dans F. L'ensemble $\operatorname{Dom}(T)$ est appelé le *domaine* de l'opérateur T. On dira qu'un opérateur T de E sur F est

- borné si son domaine est E et s'il est continue;
- à domaine dense si $\overline{\operatorname{Dom}(T)} = E$;
- fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé dans $E \times F$.

NOTATION. On note $\mathrm{R}(T) \subset F$ l'image d'un opérateur $T\colon \operatorname{Dom}(T) \to F$.

DÉFINITION 2.2. Soient $T_1\colon \operatorname{Dom}(T_1) \to F$ et $T_2\colon \operatorname{Dom}(T_2) \to F$ deux opérateurs de E sur F. On dit que l'opérateur T_2 est une *extension* de l'opérateur T_1 si $\operatorname{Dom}(T_1) \subset \operatorname{Dom}(T_2)$ et s'ils coïncident sur $\operatorname{Dom}(T_1)$.

DÉFINITION-PROPOSITION 2.3. Soit $T\colon \operatorname{Dom}(T) \to F$ un opérateur à domaine dense. Alors il existe un unique opérateur T' de F' sur E' vérifiant

$$\forall f \in \operatorname{Dom}(T'),\ \forall x \in \operatorname{Dom}(T), \quad \langle T' f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle.$$

On appelle cet opérateur T' le *dual* de T.

Preuve On définit le sous-espace vectoriel de F

$$\operatorname{Dom}(T') := \{f \in F' \mid (x \longmapsto \langle f, Tx\rangle) \in \mathrm{B}(\operatorname{Dom}(T), \mathbf{R})\}.$$

Pour tout $f \in \operatorname{Dom}(T')$, on définit l'application linéaire continue

$$g_f : \left| \begin{array}{l} \operatorname{Dom}(T) \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \qquad x \longmapsto \langle f, Tx\rangle \end{array} \right.$$

et, comme $\mathbf{R}$ est complet, on peut la prolonger sur E en une unique application $g_f \in E'$. On définit alors l'opérateur

$$T' : \left| \begin{array}{l} \operatorname{Dom}(T') \longrightarrow E', \\ \qquad f \longmapsto g_f. \end{array} \right.$$

□

PROPOSITION 2.4. Soit $T\colon \operatorname{Dom}(T) \subset E \to F$ un opérateur à domaine dense. Alors son dual T' est fermé.

Preuve Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\operatorname{Dom}(T')$ et $(f, g) \in F' \times E'$ tels que $f_n \to f$ dans F' et $Tf_n \to g$ dans E'. Alors pour tout $x \in \operatorname{Dom}(T)$, on a

$$\begin{aligned} \langle f, Tx\rangle - \langle g, x\rangle &= \lim_{n \to +\infty} (\langle f_n, Tx\rangle - \langle g, x\rangle) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (\langle f_n, Tx\rangle - \langle Tf_n, x\rangle) = 0, \end{aligned}$$

donc $\langle f, Tx\rangle = \langle g, x\rangle$ et $|\langle f, Tx\rangle| \leqslant \|g\| \|x\|$. Ceci montre que $f \in \operatorname{Dom}(T')$ et $T'f = g$. Le graphe de T' est fermé. □

◇ REMARQUES. – Soit $T \in \mathrm{B}(E, F)$. On note T' sa transposée. Alors $T' \in \mathrm{B}(F', E')$ et $\|T\|_{\mathrm{B}(F', E')} = \|T\|_{\mathrm{B}(E, F)}$.

– L'application $T \in \mathrm{B}(E,F) \longmapsto T' \in \mathrm{B}(F',E')$ n'est pas continue en général pour la convergence simple des opérateurs.
– Pour tout $T \in \mathrm{B}(E,F)$, sa transposée T' est continue pour les topologies faibles-$*$.

▷ EXEMPLES. Soit $n \geqslant 0$ un entier. On pose

$$T_n : \left| \begin{aligned} \ell^2(\mathbf{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbf{N}), \\ (a_p)_{p\in\mathbf{N}} &\longmapsto (a_{n+p})_{p\in\mathbf{N}}. \end{aligned} \right.$$

Alors son applications transposée est

$$T_n' : \left| \begin{aligned} \ell^2(\mathbf{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbf{N}), \\ (z_p)_{p\in\mathbf{N}} &\longmapsto (0,\dots,0,z_0,z_1,\dots) \end{aligned} \right.$$

où les zéros apparaissent n fois.

PROPOSITION 2.5. Soit $T \in \mathrm{B}(E,F)$. Alors $T' \in \mathrm{B}(F',E')$ et $\|T\| = \|T'\|$.

Preuve Comme T est bornée, pour tout $g \in F'$, l'application $x \longmapsto \langle g, Tx\rangle$ est une forme linéaire sur E et on a

$$|\langle g, Tx\rangle| \leqslant \|g\|_{F'} \|T\| \|x\|_E, \quad x \in E.$$

Donc l'application T' est définie sur tout F' et $\|T'\| \leqslant \|T\|$. Montrons l'inégalité réciproque. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un vecteur $x_\varepsilon \in E$ de norme 1 telle que

$$\|Tx_\varepsilon\| \geqslant \|T\| - \varepsilon.$$

On note $y_\varepsilon := Tx_\varepsilon$. Soit $g_\varepsilon \in F'$ tel que $g_\varepsilon(y_\varepsilon) = 1$ et $\|g_\varepsilon\| = 1$. Alors

$$\|T'\| \geqslant \|T' g_\varepsilon\| \geqslant |[T' g_\varepsilon](x_\varepsilon)| = \|y_\varepsilon\| \geqslant \|T\| - \varepsilon.$$

En laissant tendre ε vers 0, on obtient $\|T'\| \geqslant \|T\|$. Cela termine la preuve. □

PROPOSITION 2.6. Soit $T \in \mathrm{B}(E,F)$. Alors T'' est une extension de T définie sur E'' à valeurs dans F'' et elle vérifie $\|T''\| = \|T\|$. En particulier, si E est réflexif, alors $T'' = T$.

Preuve On a $T'' = (T')'$, donc $T'' \in \mathrm{B}(E'',F'')$ et $\|T''\| = \|T'\| = \|T\|$. Soit $x_0 \in E$. On note $\varphi_0 \in E''$ son image par l'isomorphisme canonique. Alors pour tout $f \in E'$, on a

$$(T'\varphi_0)(f) = \langle T'\varphi_0, f\rangle = \langle \varphi_0, Tf\rangle = \langle Tf, x_0\rangle = \langle f, T'x_0\rangle$$

car $\langle \varphi_0, f\rangle = \langle f, x_0\rangle$. Donc l'image de Tx_0 est $T'\varphi_0$. On en déduit $T'' = T$ sur E. □

◇ REMARQUE. Il est facile de voir que l'application $T \in \mathrm{B}(E,F) \longmapsto T'$ est un endomorphisme $\mathbf{K}$-linéaire.

2.1.2 Opérateurs compacts

On considère toujours deux espaces de BANACH E et F.

DÉFINITION 2.7. Un opérateur $T : E \to F$ est dit *compact* si l'image de la boule unité de E par T est compact dans F, *i. e.* l'adhérence $\overline{T(B_E)}$ est compacte dans F.

◇ REMARQUES. – Un opérateur $T : E \to F$ est compact si et seulement si l'image par T de tout ensemble bornée est relativement compacte dans F. En effet, le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose que l'opérateur T est compact. Soit A une partie bornée de E. Alors il existe $r > 0$ tel que $A \subset rB_E$. Mais comme T est linéaire, on a $T(A) \subset rT(B_E)$, donc $\overline{T(A)} \subset r\overline{T(B_E)}$ où la partie $r\overline{T(B_E)}$ est compacte, donc la partie $\overline{T(A)}$ est compacte.
– Un opérateur compact est borné et donc continu.
– Si E est de dimension infinie, alors l'identité $\mathrm{Id}_E : E \to E$ n'est pas un opérateur compact.

PROPOSITION 2.8 (caractérisation séquentielle). Soit $T : E \to F$ un opérateur. Alors T est compact si et seulement s'il envoie chaque suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E sur une suite $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dont on peut extraire une sous-suite convergente dans F.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose que T est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de E. Alors l'ensemble $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc l'ensemble $\{Tx_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est relativement compact, *i. e.* son adhérence est compacte dans F : on peut donc extraire une sous-suite convergente de la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose qu'on peut extraire une sous-suite convergente de l'image par T de toute suite bornée. Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $T(B_E)$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe $x_n\in B_E$ tel que $y_n = Tx_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc il existe une extraction $\varphi\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ telle que la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ soit convergente dans F. On en déduit que la partie $\overline{T(B_E)}$ est compacte. □

NOTATION. On note $\mathrm{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

PROPOSITION 2.9. 1. L'ensemble $\mathrm{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{B}(E,F)$.

2. Soient W et Z deux espaces de BANACH. Soient $A\colon W\to E$ et $B\colon W\to Z$ deux applications linéaires bornées. Soit $T\in\mathrm{K}(E,F)$. Alors la composée $B\circ T\circ A\colon W\to Z$ est compacte. Algébriquement, l'ensemble $\mathrm{K}(E,F)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{B}(E,F)$.

3. Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'opérateur compacts convergeant vers un opérateur T. Alors T est compact.

Preuve 2. On note B_W et B_E les boules unités de W et E. Alors $A(B_W)\subset\|A\|\,B_E$, donc $T(A(B_W))\subset\|A\|\,\overline{T(B_E)}$ où l'ensemble à droite est compact, donc $B(T(A(B_W)))\subset\|A\|\,B(\overline{T(B_E)})$ où l'ensemble de droite est également un compacte car c'est l'image d'un compact par une application continue. On en déduit que la composée BTA est un opérateur compacte.

3. Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de B_E. Alors il existe une extraction $\varphi\colon\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ tel que, pour tout entier $n\in\mathbf{N}$ fixé, la suite $(T_n x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ soit convergente dans F. Pour tous $k,k'\in\mathbf{N}$ et $n\in\mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\|Tx_{\varphi(k)}-Tx_{\varphi(k')}\| &\leqslant \|Tx_{\varphi(k)}-T_nx_{\varphi(k')}\|+\|T_nx_{\varphi(k)}-T_nx_{\varphi(k')}\|+\|T_nx_{\varphi(k')}-Tx_{\varphi(k')}\|\\ &\leqslant 2\,\|T-T_n\|+\|T_nx_{\varphi(k)}-T_nx_{\varphi(k')}\|,\end{aligned}$$

donc

$$\limsup_{k,k'\to+\infty}\|Tx_{\varphi(k)}-Tx_{\varphi(k')}\|\leqslant 2\,\|T-T_n\|.$$

Ainsi la suite $(Tx_{\varphi(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ est de CAUCHY dans l'espace complet F. Elle converge donc ce qui implique la compacité de l'opérateur T. □

◇ REMARQUE. Dans le point 3, la convergence simple ne suffit pas pour assurer la conclusion. Pour $n\in\mathbf{N}$, on note

$$T_n\colon \left|\begin{array}{rcl}\ell^2(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbf{N}),\\ (x_k)_{k\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (\mathbb{1}_{[0,n]}(k)x_k)_{k\in\mathbf{N}}.\end{array}\right.$$

Alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers l'identité qui n'est pas compacte.

DÉFINITION 2.10. Un opérateur $T\in\mathrm{B}(E,F)$ est dit de *rang finie* si $\dim\mathrm{R}(T)<+\infty$.

PROPOSITION 2.11. L'ensemble $\mathrm{K}(E,F)$ contient l'adhérence de l'ensemble des opérateurs de rang fini.

Preuve Il suffit de montrer que tout opérateur de rang fini est compact. Soit $T\in\mathrm{B}(E,F)$ un opérateur de rang fini. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de B_E. Comme T est de rang fini, la partie $\{Tx_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathrm{R}(T)$ est relativement compacte. Donc l'opérateur T est compact. □

PROPOSITION 2.12 (cas hilbertien). On suppose que l'espace F est de HILBERT. Alors tout opérateur $T\in\mathrm{K}(E,F)$ est limite d'opérateurs de rang fini.

Preuve Soit $\varepsilon>0$. Comme $\overline{T(B_E)}$ est un compact, il existe une famille finie $(y_i)_{i\in I}$ de F telle que

$$\overline{T(B_E)}\subset\bigcup_{i\in I}\mathrm{B}(y_i,\varepsilon).$$

On note $G:=\mathrm{Vect}\{y_i\}_{i\in I}$ et on considère la projection $p_G\colon F\to G$ la projection orthogonal sur G. Alors cette projection est un opérateur de rang fini. Soit $x\in B_E$. Il existe $i_0\in I$ tel que $\|Tx-y_{i_0}\|<\varepsilon$, donc

$$\|p_GTx-y_{i_0}\|=\|p_GTx-p_Gy_{i_0}\|<\varepsilon.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on trouve $\|p_GTx-Tx\|<2\varepsilon$. Ceci montre $\|p_GT-T\|<2\varepsilon$ où l'opérateur p_GT est de rang fini. □

COROLLAIRE 2.13. On suppose que l'espace E est de dimension finie. Soit $T\colon E\to F$ un opérateur. Alors il est compact.

Preuve En effet, l'opérateur T est borné et on a $\dim\mathrm{R}(T)<\dim E$. □

◇ REMARQUE. On suppose que l'espace E est réflexif. Soit $T \in \mathrm{B}(E,F)$. Alors cet opérateur est continue pour les topologies faible et faible. Comme E est réflexif, sa topologie faible coïncide sa topologie faible-$*$. D'après le théorème de BANACH-ALAOGLU, la boule B_E est donc faiblement compacte. On en déduit que l'image $T(B_E)$ est faiblement compacte dans F, donc elle est faiblement fermée dans F. D'après le théorème de MAZUR, elle est fortement fermée. Si T est compact, alors $T(B_E)$ est fortement compact dans F. Ainsi l'image $T(B_E)$ est compact si et seulement si l'opérateur T est compact.

Si E n'est pas réflexif, alors $T(B_E)$ peut ne pas être fermée même si T est compact. En effet, soit $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. On considère l'application

$$T : \left| \begin{array}{l} c_0(\mathbf{N}^*) \longrightarrow \mathbf{R}, \\ (x_n)_{n\geqslant 1} \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n. \end{array} \right.$$

C'est un opérateur compact et il vérifie $T(B_{c_0(\mathbf{N}^*)}) = \left]-\|x\|_1, \|x\|_1\right[$.

PROPOSITION 2.14 (convergence faible). Soient $T \in \mathrm{K}(E,F)$ et $(x_n)_{n\in E}$ une suite de E convergeant faiblement vers un vecteur $x \in E$. Alors la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers Tx.

Preuve Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $y_n := Tx_n$ et $y := Tx$. Montrons d'abord que $y_n \rightharpoonup y$. Soit $g \in F'$. On considère l'application linéaire

$$f : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto g(Tx). \end{array} \right.$$

Comme T est compact, cette application est bornée. Comme $x_n \rightharpoonup x$, on a alors $f(x_n) \rightharpoonup f(x)$, donc $g(y_n) \rightharpoonup g(y)$. Ceci étant vrai pour tout $g \in F'$, on a montre $y_n \rightharpoonup y$.

Montrons que $y_n \to y$. Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \|y_{\varphi(n)} - y\| > \varepsilon.$$

Or $x_n \rightharpoonup x$, donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Comme T est compact, la suite $(Tx_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente, *i. e.* il existe $\tilde{y} \in F$ et une extraction $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $y_{\psi\circ\varphi(n)} \to \tilde{y}$. Or $y_{\psi\circ\varphi(n)} \rightharpoonup y$ et, comme la topologie faible est séparée, on obtient $y = \tilde{y}$. Ceci est impossible. D'où $y_n \to y$. □

THÉORÈME 2.15 (SCHAUDER). Soit $T \in \mathrm{B}(E,F)$. Alors l'opérateur T est compact si et seulement si son dual est compact.

Preuve ⇒ On suppose que l'opérateur T est compact. Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $B_{F'}$. On veut montrer que la suite $(T'g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente. On considère le compact $K := \overline{T(B_E)} \subset F$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la forme linéaire

$$G_n : \left| \begin{array}{l} K \longrightarrow \mathbf{R}, \\ y \longmapsto \langle g_n, y \rangle. \end{array} \right.$$

Comme $\|g_n\| = 1$, cette application G_n est 1-lipschitzienne sur K. Ainsi la partie $\{G_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est équicontinue et aussi équibornée. Le théorème d'ASCOLI assure que cette partie est relativement compacte, donc la suite $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers une fonction $G \in \mathscr{C}(K,\mathbf{R})$. Quitte à prendre cette sous-suite, on peut considérer que la suite $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers G. Mais pour tout $x \in E$ et tous $n, m \in \mathbf{N}$, on a

$$\langle Tx, g_n \rangle = \langle x, T'g_n \rangle = G_n(Tx),$$

donc

$$|\langle T'g_n - T'g_m, x \rangle| = |G_n(Tx) - G_m(Tx)| \leqslant \sup_{y\in K} |G_n(y) - G_m(y)|,$$

donc

$$\|T'g_n - T'g_m\| \leqslant \sup_{y\in K} |G_n(y) - G_m(y)|.$$

Ainsi la suite $(T'g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de CAUCHY dans E et donc elle converge dans E. Par conséquent, l'opérateur dual T' est compact.

⇐ On suppose que l'opérateur T' est compact. D'après le sens direct, l'image $T''(B_{E''})$ est relativement compact dans F''. Comme $T''|_E = T$, l'image $T(B_E) = T''(B_{E''})$ et l'espace F est fermé dans son bidual F''. On conclut que la partie $\overline{T(B_E)}$ est compact. □

THÉORÈME 2.16 (RIESZ). Soit E un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée B_E est compacte.

LEMME 2.17 (RIESZ). Soient E un espace vectoriel normé et $G \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $\|x_\varepsilon\| = 1$ et $\mathrm{d}(x_\varepsilon, G) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Preuve Le sens direct est évident. Admettons provisoirement le lemme et montrons le sens réciproque. On suppose que le boule B_E est compacte. Raisonnons par l'absurde et supposons que E est de dimension infinie. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$. Par le lemme, il existe $x_1 \in E$ tel que $\|x_1\| = 1$ et $\mathrm{d}(x_1, E_0) \geqslant 1/2$ où $E_0 := \mathrm{Vect}\{x_0\}$. En recommençant, il existe $x_2 \in E$ tel que $\|x_2\| = 1$ et $\mathrm{d}(x_2, E_1) \geqslant 1/2$ avec $E_1 := \mathrm{Vect}\{x_0, x_1\}$. Ainsi par récurrence, on construit une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de norme 1 tels que

$$\mathrm{d}(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2 \quad \text{avec} \quad E_{n-1} := \mathrm{Vect}\{x_0, \dots, x_{n-1}\}, \quad n \geqslant 1.$$

En particulier, pour tous $m, n \in \mathbf{N}$ tels que $m < n$, on a $\|x_m - x_n\| \geqslant 1/2$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de B_E n'admet pas de valeur d'adhérence ce qui est impossible. □

Preuve du lemme Soient $y \in E \setminus G$ et $\varepsilon > 0$. Comme G est fermé, on a $\mathrm{d}(y, G) > 0$, donc il existe $z_\varepsilon \in G$ tels que

$$\mathrm{d}(y, G) \leqslant \|y - z_\varepsilon\| \leqslant \frac{\mathrm{d}(y, G)}{1 - \varepsilon}.$$

On pose alors

$$x_\varepsilon := \frac{y - z_\varepsilon}{\|y - z_\varepsilon\|}.$$

Soit $u \in G$. Alors

$$\begin{aligned} x_\varepsilon - u &= \frac{1}{\|y - z_\varepsilon\|}[y - z_\varepsilon - u\|y - z_\varepsilon\|] \\ &= \frac{1}{\|y - z_\varepsilon\|}[y - (z_\varepsilon + u\|y - z_\varepsilon\|)] \end{aligned}$$

avec $z_\varepsilon + u\|y - z_\varepsilon\| \in G$. D'où

$$\|x_\varepsilon - u\| \geqslant \frac{\mathrm{d}(y, G)}{\|y - z_\varepsilon\|} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

On obtient le résultat en passant à la borne supérieure. □

THÉORÈME 2.18. Soient E un espace de BANACH et $T \in \mathrm{K}(E)$. Alors

1. le noyau $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - T)$ est de dimension finie ;
2. l'image $\mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T)$ est un fermé de E ;
3. l'application $\mathrm{Id}_E - T$ est injective si et seulement si elle est surjective ;
4. on a $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - T) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{E'} - T')$.

◇ REMARQUE. Ce résultat s'applique à l'opérateur $\lambda\,\mathrm{Id}_E - T$ avec $\lambda \in \mathbf{K}^*$ car l'opérateur $\lambda^{-1}T$ est compact.

Preuve 1. Notons $G := \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - T)$ et soit B_G la boule unité fermé de G. Pour tout $x \in G$, on a $x = Tx$ ce qui implique $B_G = T(B_G) \subset T(B_E)$. Comme $T(B_E)$ est relativement compacte dans E, le fermé B_G est compact. Par le théorème de RIESZ, on en déduit $\dim G < +\infty$.
2. Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T)$ qui converge vers $y \in E$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Il existe $x_n \in E$ tel que $y_n = x_n - Tx_n$. Notons $d_n := \mathrm{d}(x_n, G)$. Comme G est de dimension finie, il existe $z_n \in G$ tel que $d_n = \|x_n - z_n\|$. Il suffit de montrer la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. En effet, cela montrera que la suite $(x_n - z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Comme T est compact, quitte à extraire, il existe $x \in E$ tel que $T(x_n - z_n) \longrightarrow x$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $y_n = x_n - Tx_n = x_n - z_n - T(x_n - z_n)$, donc $x_n - z_n = y_n + T(x_n - z_n) \longrightarrow y + x$. De plus, on a

$$\begin{aligned} y = \lim_{n\to+\infty} y_n &= \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{Id}_E - T)(x_n - z_n) \\ &= (\mathrm{Id}_E - T)(\lim_{n\to+\infty}(x_n - z_n)) = (\mathrm{Id}_E - T)(y + x) \in \mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T). \end{aligned}$$

Montrons alors que la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Quitte à extraire, on peut supposer $d_n \longrightarrow +\infty$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, en posant $w_n := (x_n - z_n)/d_n$, on a

$$\mathrm{d}(w_n, G) = \frac{1}{d_n}\mathrm{d}(x_n - z_n, G) = \frac{1}{d_n}\mathrm{d}(x_n, G) = 1$$

et

$$w_n - Tw_n = \frac{1}{d_n}[x_n - z_n - T(x_n - z_n)] = \frac{y_n}{d_n} \longrightarrow 0.$$

De plus, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de la boule unité. Comme T est compact, quitte à extraire, il existe $w \in E$ tel que $Tw_n \longrightarrow w$. Comme $w_n - Tw_n \longrightarrow 0$, on en déduit $w_n \longrightarrow w$. De plus, on a

$$(\mathrm{Id}_E - T)w = \lim_{n\to+\infty}(\mathrm{Id}_E - T)w_n = \lim_{n\to+\infty}(w_n - Tw_n) = 0,$$

donc $w \in G$, donc $\mathrm{d}(w, G) = 0$. Or $d(w_n, G) = 1 \longrightarrow \mathrm{d}(w, G)$ ce qui est impossible. Donc la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, le paragraphe précédent permet alors de conclure.

3. $\Rightarrow$ On suppose que l'application $\mathrm{Id}_E - T$ est injective. Raisonnons par l'absurde et supposons que celle-ci n'est pas surjective. Alors l'image $E_1 := \mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T)$ est un sous-espace vectoriel strict et fermé de E par le point précédent. Comme T et $\mathrm{Id}_E - T$ commutent, on a $T(E_1) \subset E_1$. Alors la restriction $T|_{E_1}$ est un opérateur compact sur l'espace de BANACH E_1. Posons $E_2 := (\mathrm{Id}_E - T)^2(E) = (\mathrm{Id}_E - T)(E_1)$. L'application $\mathrm{Id}_E - T$ est injective et non surjective, donc l'espace E_2 est un sous-espace vectoriel strict et fermé de E_1. En effet, il est bien strict; raisonnons par l'absurde et supposons que $E_1 = E_2$. Soit $z \in E \setminus E_1$. Alors $z - Tz \in E_1 = E_2$, donc il existe $z' \in E_1$ tel que $z - Tz = z' - Tz'$. Comme $\mathrm{Id}_E - T$ est injective, on obtient $z = z' \in E_1$ ce qui est impossible. D'où $E_2 \subsetneq E_1$.

On réitère ce procédé et, en posant $E_n := (\mathrm{Id}_E - T)^n(E)$ pour tout $n \geqslant 1$, la suite $(E_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite strictement décroissante de sous-espaces vectoriels fermés de E. En appliquant le lemme de RIESZ, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de E tels que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2, \quad n \geqslant 1.$$

Pour tous $m, n \geqslant 1$ tels que $m < n$, on a

$$T(x_n - x_m) = [(x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n] - x_m$$

avec $(x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n \in E_{m+1}$, donc $\|T(x_n - x_m)\| \geqslant \mathrm{d}(x_n, E_{m+1}) \geqslant 1/2$ ce qui est impossible car la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et l'opérateur T est compact.

$\Leftarrow$ On suppose que l'application $\mathrm{Id}_E - T$ est surjective. Pour cela, utilisons le lemme suivant.

LEMME 2.19. Soient E et F deux espaces de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E, F)$. Alors l'image $\mathrm{R}(T)$ est fermée dans F si et seulement si $\mathrm{R}(T) = {}^{\perp}\operatorname{Ker} T'$.

Alors $\mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T) = E$, donc le lemme donne $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_{E'} - T') = \{0\}$. D'après le sens direct, l'application $\mathrm{Id}_{E'} - T'$ est injective, donc $\mathrm{R}(\mathrm{Id}_{E'} - T') = E'$. Mais on a aussi $\operatorname{Ker} T' = \mathrm{R}(T)^{\perp}$ et $\operatorname{Ker} T = {}^{\perp}\mathrm{R}(T)$. On en déduit

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - T) = {}^{\perp}\mathrm{R}(\mathrm{Id}_{E'} - T') = \{0\}$$

ce qui montre que l'application $\mathrm{Id}_E - T$ est injective.

4. Notons $d := \dim\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - T)$ et $d' := \dim\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_{E'} - T')$. Montrons que $d \geqslant d'$. Raisonnons par l'absurde et supposons $d < d'$. D'après le point 1, le sous-espace vectoriel G est de dimension finie. On écrit $E = G \oplus M$ avec un sous-espace vectoriel M bien choisi. En effet, on note $(x_1, \dots, x_n)$ une base de G. Soient $g_1, \dots, g_n \colon G \to \mathbf{K}$ les applications coordonnées. Avec le théorème de HAHN-BANACH, on peut prolonger ces applications g_i à E. On pose alors

$$M := g_1^{-1}(\{0\}) \cap \dots \cap g_n^{-1}(\{0\}).$$

de sorte que $E = G \oplus M$. On note $p \colon E \to G$ la projection sur G qui est continue d'après le théorème du graphe fermé. Utilisons le lemme suivant.

LEMME 2.20. Soient E un espace de BANACH et G un sous-espace vectoriel de E tel que

$$\operatorname{codim} G := \dim E/G < +\infty.$$

Alors $\dim G^{\perp} = \operatorname{codim} G$.

Comme le sous-espace vectoriel $\mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T) = {}^{\perp}\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_{E'} - T')$ est de codimension finie, il admet une supplémentaire topologique N de dimension d'. Comme $d < d'$, il existe une application linéaire $\ell \colon G \longrightarrow N$ injective et non surjective. Les opérateurs T et $\ell \circ p$ étant respectivement compact et de rang fini, l'opérateur $S := T + \ell \circ p$ est compact. Pour tout $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - S)$, on a

$$0 = (x - Tx) - \ell(p(x)) \quad \text{avec} \quad x - Tx \in \mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T) \quad \text{et} \quad \ell(p(x)) \in N,$$

et, comme $E = \mathrm{R}(\mathrm{Id}_E - T) \oplus N$, on a $x - Tx = 0$ et $\ell(p(x)) = 0$, donc $x \in G$ et $p(x) = 0$ car ℓ est injective, donc $x = 0$. D'où $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - S) = \{0\}$. Or pour tout élément $y \in N \setminus \operatorname{Im}\ell \neq \emptyset$, l'équation

$$x - Sx = y \iff x - Tx - \ell(p(x)) = y$$

n'admet pas de solution. Cela est impossible. D'où $d \geqslant d'$.

Pour obtenir $d \leqslant d'$, on applique ce qui précède à T' : on obtient

$$\dim\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_{E''} - T'') \leqslant \dim\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_{E'} - T') \leqslant \dim\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - T).$$

Or T'' est un prolongement de T, donc $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_{E''} - T'') \supset \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_E - T)$. D'où $d = d'$. □

Preuve du lemme 2.20 Il existe une famille libre $(e_1, \dots, e_k)$ de E telle que $E = G \oplus M$ où $M := \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Les projections p_G et p_M sur G et M sont alors continues [§1]. Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, l'application linéaire

$$\tilde f_j : \left| \begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & \mathbf{K}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i & \longmapsto & \alpha_i \end{array} \right.$$

est continue puisque M est de dimension finie; notons $f_j := \tilde f_j \circ p_M \in E'$. Alors pour tout $x \in E$ et tout $j \in [\![1, k]\!]$, on a $f_j(x) = \tilde f_j(p_M(x)) = 0$, donc $f_j \in G^\perp$. De plus, la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est bien libre car, si $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_j f_k = 0$, alors une évaluation de cette égalité en e_j nous donne $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$. Montrons que cette famille génère $G^\perp$. Soit $g \in G^\perp$. On pose

$$\ell := g - g(e_1) f_1 - \cdots - g(e_k) f_k \in G^\perp.$$

Cette application est nulle sur M, donc $\ell \in M^\perp$. Comme $\ell \in G^\perp$, on a donc $\ell \in E^\perp = \{0\}$. D'où $g \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$. Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est une base de $G^\perp$. D'où $\dim G^\perp = k = \dim M = \operatorname{codim} G$. □

▷ EXEMPLE. Soit $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$. Les applications linéaires

$$T_{\mathrm{d}} : \left| \begin{array}{rcl} \ell^p(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \ell^p(\mathbf{N}), \\ (x_0, x_1, \dots) & \longmapsto & (0, x_0, x_1, \dots) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T_{\mathrm{g}} : \left| \begin{array}{rcl} \ell^p(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \ell^p(\mathbf{N}), \\ (x_0, x_1, \dots) & \longmapsto & (x_1, x_2, \dots) \end{array} \right.$$

sont injectives et non surjectives

2.2 SPECTRE D'UN OPÉRATEUR BORNÉ

2.2.1 Opérateurs inversibles

Soit E un espace de BANACH. Muni de la composition, l'ensemble $\mathrm{B}(E)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre unitaire dont l'unité est Id_E. De plus, on peut le normer avec la norme d'opérateur, toujours notée $\| \ \|$.

DÉFINITION 2.21. Un opérateur $T \in \mathrm{B}(E)$ est dit *inversible* s'il est bijectif dont la bijection réciproque appartient à $\mathrm{B}(E)$. On note $\mathrm{GB}(E)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathrm{B}(E)$.

◇ REMARQUE. Pour tout opérateur bijectif $T \in \mathrm{B}(E)$, sa bijection réciproque est linéaire. De plus, pour un espace de BANACH E, le principe de l'application ouverte assure qu'un opérateur de $\mathrm{B}(E)$ est inversible si et seulement s'il est bijectif.

PROPOSITION 2.22 (théorème d'isomorphisme de Banach – bis). Soient E un espace de BANACH, F un espace vectoriel normé et $T \in \mathrm{B}(E, F)$ un opérateur bijectif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'inverse T^{-1} est continu;

(ii) il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$;

(iii) l'espace F est de BANACH.

Preuve L'implication (i) ⇒ (ii) est claire et l'implication (iii) ⇒ (i) vient de la remarque précédente.

Supposons le point (ii) et montrons le point (iii). Soit $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de CAUCHY de F. Comme T est bijectif, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $y_n = Tx_n$. Avec l'inégalité du point (ii), on obtient alors que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de CAUCHY et, comme E est de BANACH, elle converge vers un vecteur $x \in E$. Mais comme T est continue, on en déduit $y_n \longrightarrow Tx$. Cela assure que l'espace F est de BANACH. □

PROPOSITION 2.23. Soient E et F deux espaces de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$;

(ii) l'opérateur T est injectif et son image $\mathrm{R}(T)$ est fermée dans F.

Preuve ⇒ On suppose le point (i). Alors l'opérateur T est bien injectif. De plus, soient $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de E et $y \in F$ tels que $y_n := Tx_n \longrightarrow y$. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de CAUCHY, donc elle converge vers un élément $x \in E$ et, par continuité de T, on a $y = Tx \in \mathrm{R}(T)$.

⇐ Réciproquement, on suppose le point (ii). On considère la co-restriction $T : E \longrightarrow \mathrm{R}(T)$. Comme $\mathrm{R}(T)$ est complet et T est continue, il suffit d'appliquer la proposition précédente. □

§1. L'application p_M est continue d'après le théorème du graphe fermé ce qui implique la continuité de $p_G = \mathrm{Id}_E - p_M$.

COROLLAIRE 2.24. Soient E et F deux espaces de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E,F)$. Alors T est inversible si son image $\mathrm{R}(T)$ est dense dans F et il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Preuve On suppose que son image $\mathrm{R}(T)$ est dense dans F et il existe $c > 0$ tel que $\|T\cdot\| \geqslant c\|\cdot\|$. Alors T est bien injectif et $\mathrm{R}(T)$ est bien fermée. Mais $\mathrm{R}(T) = \overline{\mathrm{R}(T)} = F$ ce qui montre la surjectivité de T. Comme F est complet, la proposition 2.22 assure l'inversibilité de T. Le sens direct est assuré par cette même proposition ☐

◇ REMARQUE. Un opérateur $T \in \mathrm{B}(E,F)$ est inversible si et seulement si son dual $T' \in \mathrm{B}(F',E')$ l'est. Dans ce cas, on a $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

PROPOSITION 2.25 (Neumann et homéomorphisme). Soit E un espace de BANACH. Alors

1. pour tout $T \in \mathrm{B}(E)$ tel que $\|T\| < 1$, l'opérateur $\mathrm{Id}_E - T$ est inversible et son inverse est

$$(\mathrm{Id}_E - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n\,;$$

2. le groupe $\mathrm{GB}(E)$ est un ouvert de $\mathrm{B}(E)$ et l'application $T \longmapsto T^{-1}$ est un homéomorphisme de $\mathrm{GB}(E)$.

Preuve 1. Comme $\|T\| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\|T\|^n$ converge ce qui implique que la suite $(\sum_{n=0}^{N} T^n)_{N\geqslant 0}$ est de CAUCHY, donc cette dernière converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$. Pour tout $N \geqslant 0$, on a

$$(\mathrm{Id}_E - T)\sum_{n=0}^{N} T^N = 1 - T^{N+1} \longrightarrow 1.$$

De même pour la multiplication à gauche. D'où le résultat.
2. Soit $T_0 \in \mathrm{GB}(E)$. Pour tout $T \in \mathrm{B}(E)$, on a $T = T_0[\mathrm{Id}_E + T_0^{-1}(T - T_0)]$ et l'opérateur $\mathrm{Id}_E + T_0^{-1}(T - T_0)$ est inversible lorsque $\|T_0^{-1}(T - T_0)\| < 1$. Montrons alors que $\mathrm{B}(T_0, r_0) \subset \mathrm{GB}(E)$ avec $r_0 := 1/\|T_0^{-1}\| > 0$. Soit $T \in \mathrm{B}(T_0, r_0)$. Alors

$$\|T_0^{-1}(T - T_0)\| \leqslant \|T_0^{-1}\|\,\|T - T_0\| < 1.$$

Ceci assure alors $T^{-1} = (\mathrm{Id}_E + T_0^{-1}(T - T_0))^{-1}T_0^{-1} \in \mathrm{GB}(E)$ avec la remarque précédente. Ainsi le groupe $\mathrm{GB}(E)$ un ouvert de $\mathrm{B}(E)$. De plus, cela montre également

$$T^{-1} - T_0^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n [T_0^{-1}(T - T_0)]^n T_0^{-1},$$

donc

$$\begin{aligned}\|T^{-1} - T_0^{-1}\| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \|T_0^{-1}\|^{n+1}\|T - T_0\|^n \\ &= \frac{\|T_0^{-1}\|^2\,\|T - T_0\|}{1 - \|T_0^{-1}\|\,\|T - T_0\|} \xrightarrow[T\to T_0]{} 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que l'application $T \longmapsto T^{-1}$ est continue. Comme son inverse est elle-même, c'est un homéomorphisme de $\mathrm{GB}(E)$. ☐

2.2.2 Spectre d'un opérateur

DÉFINITION 2.26. Soient E un espace de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E)$.

1. Une *valeur résolvante* de T est un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\lambda\,\mathrm{Id}_E - T \in \mathrm{GB}(E)$. On note $\rho(T)$ l'ensemble de ses valeurs résolvantes.
2. L'ensemble $\sigma(T) := \mathbf{K} \setminus \rho(T)$ est le *spectre* de T et ses éléments sont les *valeurs spectrales* de T.
3. Une *valeur propre* de T est un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\lambda\,\mathrm{Id}_E - T$ n'est pas injective. On note $\mathrm{vp}(T) \subset \sigma(T)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

◇ REMARQUE. En dimension finie, le spectre d'un endomorphisme $T \in \mathscr{L}(E)$ correspond l'ensemble de ses valeurs propres au sens défini avant ce cours.

▷ EXEMPLES. – Le décalage à gauche $T_g : \ell^p(\mathbf{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbf{N})$ admet 0 comme valeurs spectrale mais pas comme valeur propre.
– On considère l'opérateur

$$T : \left|\begin{array}{rcl}\mathscr{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathscr{C}([0,1]), \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\cdot} x(s)\,\mathrm{d}s.\end{array}\right.$$

Alors il est injectif et non surjectif, donc $0 \in \sigma(T) \setminus \operatorname{vp}(T)$.

PROPOSITION 2.27. Soient E un espace de BANACH et $T \in \mathrm{B}(E)$. Alors

1. on a $\sigma(T) \subset \overline{\mathrm{B}_{\mathbf{K}}(0, \|T\|)}$;
2. l'ensemble $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbf{K}$;
3. l'ensemble $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbf{K}$;
4. on a $\overline{\operatorname{vp}(T)} \subset \sigma(T)$.

Preuve 1. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$. On peut supposer $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda \operatorname{Id}_E - T = \lambda(\operatorname{Id}_E - \lambda^{-1}T)$ avec $\|\lambda^{-1}T\| < 1$. La proposition de NEUMANN donne alors $\lambda \notin \sigma(T)$. D'où l'inclusion.
2. L'application $\Phi \colon \lambda \in \mathbf{K} \longmapsto \lambda \operatorname{Id}_E - T$ est continue, donc sa préimage $\rho(T) = \Phi^{-1}(\mathrm{GB}(E))$ est un ouvert de $\mathbf{K}$.
3. L'ensemble $\sigma(T) = \mathbf{K} \setminus \rho(T)$ est donc fermé et borné par les points 1 et 2, donc c'est un compact de $\mathbf{K}$.
4. Il suffit d'utiliser le point 3. □

◇ REMARQUE. On définit également le *spectre continu* et le *spectre résiduel*

$$\sigma_{\mathrm{c}}(T) = \{\lambda \in K \mid \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id}_E - T) = \{0\}, \overline{\mathrm{R}(\lambda \operatorname{Id}_E - T)} = E\} \quad \text{et}$$
$$\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \{\lambda \in K \mid \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{Id}_E - T) = \{0\}, \overline{\mathrm{R}(\lambda \operatorname{Id}_E - T)} \subsetneq E\}$$

de sorte que $\sigma(T) = \operatorname{vp}(T) \sqcup \sigma_{\mathrm{c}}(T) \sqcup \sigma_{\mathrm{r}}(T)$.

LEMME 2.28. Soit $T \in \mathrm{B}(E)$. Alors la suite $(\|T^n\|^{1/n})_{n \geqslant 1}$ converge dans $\mathbf{R}_+$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \geqslant 1} \|T^n\|^{1/n} \leqslant \|T\|.$$

Preuve Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$, donc $\|T^n\|^{1/n} \leqslant \|T\|$, donc

$$t := \liminf_{n \to +\infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \leqslant \|T\|. \tag{$*$}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $q \geqslant 1$ tel que $\|T^q\|^{1/q} \leqslant t + \varepsilon$. Soit $n \geqslant 1$. En effectuant la division euclidienne de n par q, on peut écrire $n = a_n q + r_n$ avec $0 \leqslant r_n < q$. On a alors

$$\begin{aligned} \|T^n\|^{1/n} = \|T^{a_n q + r_n}\|^{1/n} &\leqslant \|T_q\|^{a_n/n} \|T\|^{r_n/n} \\ &= (\|T^q\|^{1/q})^{a_n q/n} \|T\|^{r_n/n}. \end{aligned}$$

Comme $a_n q \leqslant n \leqslant (a_n + 1)q$, on en déduit que $a_n q/n \longrightarrow 1$ et $r_n/n \longrightarrow 0$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant \|T^q\|^{1/q} \leqslant t + \varepsilon.$$

En laissant tendre ε vers 0 et en utilisant l'inégalité $(*)$, on obtient. □

PROPOSITION 2.29. Soit $T \in \mathrm{B}(E)$. Notons $\tilde{r} := \lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{1/n} \in [0, \|T\|]$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $|\lambda| > \tilde{r}$. Alors

1. la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|T^n/\lambda^{n+1}\|$ converge;
2. la suite $(\sum_{n=0}^{N} T^n/\lambda^{n+1})_{N \in \mathbf{N}}$ converge et

$$(\lambda \operatorname{Id}_E - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Preuve 1. Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que $|\lambda| > a > \tilde{r}$. Alors il existe un rang $n_1 \geqslant 1$ tel que $\|T^n\|^{1/n} > a$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Avec le point 1, cette suite est de CAUCHY dans l'espace de BANACH $\mathrm{B}(E)$, donc elle converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n/\lambda^{n+1}$. Pour tout $N \geqslant 0$, on a

$$(\lambda \operatorname{Id}_E - T) \sum_{n=0}^{N} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} = \operatorname{Id}_E - \frac{T^{N+1}}{\lambda^{N+1}}$$

et, par hypothèse, on a

$$\left\| \frac{T^{N+1}}{\lambda^{N+1}} \right\| < \left(\frac{a}{|\lambda|} \right)^{N+1} \longrightarrow 0$$

ce qui assure

$$(\lambda \operatorname{Id}_E - T) \sum_{n=0}^{N} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \longrightarrow 0 = (\lambda \operatorname{Id}_E - T) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

De même pour la multiplication à gauche. D'où l'égalité.

□

DÉFINITION 2.30. Le *rayon spectral* d'un opérateur $T \in \mathrm{B}(E)$ est la quantité

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

◇ REMARQUE. Avec les propositions précédentes, on a $r(T) \leqslant \tilde{r}(T) \leqslant \|T\|$.

2.2.3 Résolvante associée à un opérateur

DÉFINITION 2.31. Soit E un espace de BANACH. La *résolvante* associée à un opérateur $T \in \mathrm{B}(E)$ est l'application

$$\mathrm{R}_T : \left| \begin{array}{l} \rho(T) \longrightarrow \mathrm{B}(E), \\ \quad \lambda \longmapsto (\lambda \,\mathrm{Id}_E - T)^{-1}. \end{array} \right.$$

PROPOSITION 2.32 (propriété de la résolvante). Soit $T \in \mathrm{B}(E)$. Alors

1. on a $\mathrm{R}_T(\lambda) - \mathrm{R}_T(\mu) = (\mu - \lambda)\mathrm{R}_T(\lambda)\mathrm{R}_T(\mu)$ pour tous $\lambda, \mu \in \rho(T)$;
2. si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, l'application R_T est dérivable sur l'ouvert $\rho(T)$ et
$$\mathrm{R}_T' = -\mathrm{R}_T^2 ;$$
si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, cette dernière est holomorphe sur $\rho(T)$;
3. elle est analytique sur $\rho(T)$ et, pour tous $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|\mathrm{R}_T(\lambda_0)\|$, on a
$$\mathrm{R}_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)\mathrm{R}_T(\lambda_0)^{n+1}$$
où la série converge normalement dans $\mathrm{B}(E)$;
4. pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $|\lambda| > \tilde{r}(T)$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} T^n/\lambda^{n+1}$ converge normalement et sa somme vaut $\mathrm{R}_T(\lambda)$;
5. pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$, on a
$$\|\mathrm{R}_T(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Preuve 1. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_T(\lambda) - \mathrm{R}_T(\mu) &= \mathrm{R}_T(\lambda)[1 - \mathrm{R}_T(\lambda)^{-1}\mathrm{R}_T(\mu)] \\ &= \mathrm{R}_T(\lambda)[\mathrm{Id}_E - (\lambda \,\mathrm{Id}_E - T)\mathrm{R}_T(\mu)] \\ &= \mathrm{R}_T(\lambda)[\mathrm{Id}_E - ((\lambda - \mu)\mathrm{R}_T(\mu) + (\mu \,\mathrm{Id}_E - T)\mathrm{R}_T(\mu))] \\ &= \mathrm{R}_T(\lambda)[\mathrm{Id}_E - (\lambda - \mu)\mathrm{R}_T(\mu) - \mathrm{Id}_E] \\ &= (\mu - \lambda)\mathrm{R}_T(\lambda)\mathrm{R}_T(\mu). \end{aligned}$$

2 et 3. Soient $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $r_0 > 0$ tels que $\mathrm{B}_{\mathbf{K}}(\lambda_0, r_0) \subset \rho(T)$. Soit $\lambda \in \mathrm{B}_{\mathbf{K}}(\lambda_0, r_0) \setminus \{\lambda_0\}$. Alors

$$\frac{\mathrm{R}_T(\lambda) - \mathrm{R}_T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\mathrm{R}_T(\lambda)\mathrm{R}_T(\lambda_0) \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} -\mathrm{R}_T(\lambda)^2$$

car l'application $\lambda \longmapsto \mathrm{R}_T(\lambda)$ est continue. Cela assure que cette dernière est dérivable et $\mathrm{R}_T' = -\mathrm{R}_T^2$.

Soient $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|\mathrm{R}_T(\lambda_0)\|$. Alors

$$\lambda \,\mathrm{Id}_E - T = (\lambda_0 \,\mathrm{Id}_E - T)[\mathrm{Id}_E + (\lambda - \lambda_0)\mathrm{R}_T(\lambda_0)].$$

Comme $|\lambda - \lambda_0| \|\mathrm{R}_T(\lambda_0)\| < 1$, l'opérateur $\lambda \,\mathrm{Id}_E - T$ appartient à $\mathrm{GB}(E)$. Ainsi on a $\mathrm{B}_{\mathbf{K}}(\lambda_0, 1/\|\mathrm{R}_T(\lambda_0)\| \subset \rho(T)$ et, sur cette boule, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_T(\lambda) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)\mathrm{R}_T(\lambda_0)^n \right) \mathrm{R}_T(\lambda_0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)\mathrm{R}_T(\lambda_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

5. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$. Alors

$$\|\mathrm{R}_T(\lambda)\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}. \qquad \square$$

THÉORÈME 2.33 (rayon spectral sur **C**). Soient E un espace de BANACH complexe et $T \in \mathrm{B}(E)$. Alors

$$r(T) = \tilde{r}(T) \quad \text{et} \quad \sigma(T) \neq \emptyset.$$

Preuve On a vu que, si $|\lambda| > \tilde{r}(T)$, alors $\mathrm{R}_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n/\lambda^{n+1}$. Soit $t > \tilde{r}(T)$. La série précédente converge normalement sur le cercle de rayon t. Pour $p \geqslant 0$, on pose

$$J_p(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}_T(te^{i\theta})(te^{i\theta})^{p+1}\,\mathrm{d}\theta.$$

Comme la série converge normalement, pour tout $p \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} J_p(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{(te^{i\theta})^{n+1}}(te^{i\theta})^{p+1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} T^n t^{p-n}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{i\theta})^{p-n}\,\mathrm{d}t}_{\delta_{p,n}} = T^p. \end{aligned}$$

On peut remarque que la définition de $J_p(t)$ est encore valable lorsque $t > \tilde{r}(T)$ car alors la quantité $\mathrm{R}_T(te^{i\theta})$ est bien définie pour tout $\theta \in [0,2\pi]$.

Montrons que $\sigma(T) \neq \emptyset$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\sigma(T) = \emptyset$. Pour tout $t \geqslant 0$, l'intégrale $J_0(t)$ est bien définie. De plus, la fonction J_0 est dérivable sur $]0,+\infty[$ car la fonction $(t,\theta) \longmapsto \mathrm{R}_T(te^{i\theta})te^{i\theta}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times[0,2\pi]$ d'après la proposition précédente et, pour tout $t > 0$, on a

$$J_0'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{R}_T(te^{i\theta})te^{i\theta}]\,\mathrm{d}\theta.$$

En faisait le calcul, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{R}_T(te^{i\theta})te^{i\theta}] = \frac{1}{it}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\mathrm{R}_T(te^{i\theta})te^{i\theta}].$$

D'où

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{it}[\mathrm{R}_T(te^{i\theta})te^{i\theta}]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0.$$

Finalement, la fonction J_0 est constante sur $[0,+\infty]$ et égale à Id_E en l'évaluant en un réel $t > 0$ assez grand. Or comme l'intégrande est continue sur $[0,+\infty[\times[0,2\pi]$, on a $J_0(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to 0$ ce qui est impossible.

Comme on a déjà $r(T) \leqslant \tilde{r}(T)$, montrons que $r(T) \geqslant \tilde{r}(T)$. Comme précédemment, on peut voir que $J_p' = 0$ sur $]r(T),+\infty[$ ce qui montre que $J_p = T^p$ sur $]r(T),+\infty[$. Soit $t > r(T)$. On a alors

$$\begin{aligned} \|T^p\| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\mathrm{R}_T(te^{i\theta})\|\,t^{p+1}\,\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant At^{p+1} \quad \text{avec} \quad A := \max_{\theta\in[0,2\pi]}\|\mathrm{R}_T(te^{i\theta})\|, \end{aligned}$$

donc $\|T^p\|^{1/p} \leqslant (tA)^{1/p}t$. En laissant tendre p vers l'infini, on obtient $\tilde{r}(T) \leqslant t$ et ceci pour tout $t > r(T)$. En particulier, on trouve $\tilde{r}(T) \leqslant r(T)$ ce qui termine la preuve. □

COROLLAIRE 2.34. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < r(T)$, alors la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} T^n/\lambda^{n+1}$ diverge.

2.2.4 Spectre d'un opérateur compact

RAPPEL. Soient E un espace de BANACH, $T \in \mathrm{K}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Alors

- le noyau $\mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{Id}_E - T)$ est de dimension finie et l'image $\mathrm{R}(\lambda\,\mathrm{Id}_E - T)$ est un fermé;
- l'application $\lambda\,\mathrm{Id}_E - T$ est injective si et seulement si elle est surjective.

Dans cette sous-section, on considérera toujours un espace de BANACH E de dimension infinie et un opérateur compact $T \in \mathrm{K}(E)$.

PROPOSITION 2.35. Alors $0 \in \sigma(T)$.

Cette proposition est une conséquence directe de l'alternative de FREDHOLM et du lemme suivant.

LEMME 2.36. Soient E et F deux espaces de BANACH de dimension infinie et $T \in \mathrm{K}(E,F)$. Alors T n'est pas surjectif.

Preuve Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il est surjectif. D'après le théorème de l'application ouvert, l'opérateur $T \in \mathrm{B}(E,F)$ est ouvert, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}_F(0,\delta) \subset T(\mathrm{B}_E(0,1))$. On a alors

$$\overline{\mathrm{B}_F(0,\delta/2)} \subset T(\mathrm{B}_E(0,1)) \subset \overline{T(B_E)}$$

où ce dernier ensemble est un compact de F, donc la partie $\overline{\mathrm{B}_F(0,\delta/2)}$ est un compact de F, donc la boule unité fermé B_F est un compact de F, donc le théorème de RIESZ assure que l'espace F est de dimension finie ce qui est impossible. □

PROPOSITION 2.37. Alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}$.

Preuve L'inclusion $\supset$ a déjà été montrée. Réciproquement, soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\lambda \notin \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}$. Dans ce cas, le noyau $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - T)$ est nulle. Alors l'alternative de FREDHOLM assure que $\mathrm{R}(\lambda \mathrm{Id}_E - T) = E$ ce qui implique $\lambda \in \rho(T)$ ce qui est absurde. D'où $\lambda \in \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}$. □

◇ REMARQUE. Sous les mêmes hypothèses, si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, alors $\lambda \in \sigma(T') \setminus \{0\}$ car $(\lambda \mathrm{Id}_E - T)' = \lambda \mathrm{Id}_{E'} - T'$.

COROLLAIRE 2.38. Pour toute valeur propre $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}$, le sous-espace propre correspondant est de dimension finie.

On rappel que le spectre $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbf{K}$.

PROPOSITION 2.39. On a l'alternative suivante :

– soit $\sigma(T) = \{0\}$;
– soit $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est au plus dénombrable et, s'il est dénombrable, alors il existe une suite de valeurs propres décroissante qui tend vers 0.

LEMME 2.40. Soit $N_0 \geqslant 1$. On note $E_{N_0} \subset \mathbf{K}$ l'ensemble des valeurs propres $\lambda \in \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}$ telles que $|\lambda| > 1/N_0$. Alors cet ensemble est fini.

Preuve Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il est infini. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite injective de valeur propre $\lambda \in \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}$ telle que $|\lambda| > 1/N_0$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des vecteurs propres unitaires associés, *i. e.* $Te_n = \alpha_n e_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le sous-espace vectoriel $F_n := \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_n\}$ est de dimension fini. Comme les scalaires α_n sont distincts et la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est indépendante, on a $F_n \subsetneq F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. D'après le lemme de RIESZ, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un vecteur unitaire $x_n \in F_{n+1}$ tel que $\mathrm{d}(x_n, F_n) \geqslant 1/2$. Soient $m, n \in \mathbf{N}$ tels que $m < n$. On peut écrire x_n sous la forme $x_n = \beta_0 e_0 + \dots + \beta_{n+1} e_{n+1}$, donc $\alpha_{n+1} x_n - T x_n \in F_n$. On a alors

$$T\frac{x_n}{\alpha_{n+1}} - T\frac{x_m}{\alpha_{m+1}} = x_n - \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_{n+1}\mathrm{Id}_E - T)x_n + T\frac{x_m}{\alpha_{n+1}}\right)}_{\in F_n},$$

donc

$$\left\| T\frac{x_n}{\alpha_{n+1}} - T\frac{x_m}{\alpha_{m+1}} \right\| \geqslant \mathrm{d}(x_n, F_n) \geqslant 1/2. \tag{$*$}$$

Mais on trouve $\|x_k/\alpha_{k+1}\| \leqslant 1/(1/N_0) = N_0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, donc la suite $(x_k/\alpha_{k+1})_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée. Or l'image par T de cette suite n'admet pas de sous-suite convergente d'après la relation $(*)$ ce qui contredit la compacité de T. Ainsi l'ensemble E_{N_0} est fini. □

Preuve de la proposition D'après le lemme, les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ sont tous isolés et les ensembles E_N sont soit vides soit finis. Si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est infini, on peut alors ranger les valeurs propres avec une suite qui tend vers 0 car le spectre est compact. □

◇ REMARQUE. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{K}$ qui tend vers 0. Alors on peut construire un opérateur T dont le spectre est constitué des scalaires α_k. Par exemple, sur $\ell^2(\mathbf{N})$, il suffit de considérer l'opérateur définie par

$$T(x_0, x_1, \dots) := (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \dots).$$

Cet opérateur est compact car il existe une suite d'opérateurs compacts de rang fini qui tend vers T. Remarquons qu'un des scalaires α_n peut être nul.

2.3 ANALYSE SPECTRALE HILBERTIENNE

2.3.1 Rappels et compléments

DÉFINITION 2.41. Soient H un espace de HILBERT et $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés de G. On dit que l'espace H est la somme hilbertienne des sous-espaces vectoriels F_n si

- ces sous-espaces vectoriels sont deux à deux orthogonaux;
- on a $H = \overline{\mathrm{Vect}(F_n)_{n\geqslant 0}}$.

On note alors

$$H = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} F_n.$$

◇ REMARQUE. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors $H = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{K}e_n$.

PROPOSITION 2.42. Soient H un espace de HILBERT et $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés tels que $H = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} F_n$. Pour $n\in\mathbf{N}$, on note $p_n : H \longrightarrow F_n$ la projection orthogonale sur F_n. Soit $x\in H$. Alors

1. on a $x = \sum_{n\in\mathbf{N}} p_n(x)$ où la convergence est dans H;
2. on a $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} \|p_n(x)\|^2$. (égalité de PARSEVAL)

Réciproquement, soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de H telle que $x_n\in F_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$ et la série $\sum_{n\in\mathbf{N}}\|x_n\|^2 < +\infty$. Alors

3. la suite $(\sum_{n=0}^N x_n)_{N\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite $x\in H$;
4. pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $x_n = p_n(x)$.

Preuve 1. Soit $N\in\mathbf{N}$. On note $S_N := p_0+\dots+p_N \in \mathrm{B}(H)$. Observons que

$$\langle S_N x, x\rangle = \sum_{n=0}^N \langle p_n(x), x\rangle = \sum_{n=0}^N \langle p_n(x), x - p_n(x) + p_n(x)\rangle = \sum_{n=0}^N \langle p_n(x), p_n(x)\rangle = \sum_{n=0}^N \|p_n(x)\|^2 = \|S_N x\|^2.$$

Ainsi l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ donne

$$\|S_N x\|^2 = \langle S_N x, x\rangle \leqslant \|S_N x\|\,\|x\|, \quad \text{donc} \quad \|S_N x\| \leqslant \|x\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(F_n)_{n\geqslant 0}$ est dense dans H, il existe $N_\varepsilon\in\mathbf{N}$ et $x_\varepsilon\in\mathrm{Vect}(F_0,\dots,F_{N_\varepsilon})$ tels que $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. On suppose $N\geqslant N_\varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=0}^N p_n(x) - x\Big\| = \|S_N x - x\| &\leqslant \|S_N x - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x\| \\ &= \|S_N x - S_N x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x\| \\ &\leqslant 2\|x_\varepsilon - x\| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Cela montre $x = \sum_{n\in\mathbf{N}} p_n(x)$.

2. Avec le point précédent, il vient immédiatement que

$$\sum_{n=0}^N \|p_n(x)\|^2 = \Big\|\sum_{n=0}^N p_n(x)\Big\| \longrightarrow \|x\|^2.$$

3. Pour $N\in\mathbf{N}$, on pose $y_N := \sum_{n=0}^N x_n$. Pour tous $M,N\in\mathbf{N}$ tels que $M<N$, le théorème de PYTHAGORE assure

$$\|y_N - y_M\|^2 = \Big\|\sum_{n=M+1}^N x_n\Big\|^2 = \sum_{n=M+1}^N \|x_n\|^2.$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbf{N}}\|x_n\|^2$ converge, la suite $(y_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est de CAUCHY dans H, donc cette dernière converge vers un vecteur $x := \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n \in H$.

4. Soit $n\in\mathbf{N}$. On a alors

$$p_n(x) = p_n(\lim_{N\to+\infty} y_N) = p_n\Big(\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^N x_k\Big) = \lim_{N\to+\infty} p_k\Big(\sum_{k=0}^N x_k\Big) = \lim_{N\to+\infty} x_n = x_n.$$ □

2.3.2 Méthodes variationnelles

DÉFINITION 2.43. Soit H un espace de HILBERT. Une *forme sesquilinéaire hermitienne positive continue* sur H est une application $\phi : H\times H \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que

1. pour tous $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$ et $x,y,z\in H$, on ait $\phi(\alpha x+\beta y) = \alpha\phi(x,y)+\beta\phi(y,z)$ et $\phi(x,\alpha y+\beta z) = \overline{\alpha}\phi(x,y)+\beta\beta\phi(x,z)$;
2. pour tous $x,y\in H$, on ait $\phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$;
3. pour tout $x\in H$, on ait $\phi(x,x)\geqslant 0$

4. il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tous $x, y \in H$, on ait $|\phi(x,y)| \leqslant c\,\|x\|\,\|y\|$.

Les points 1 à 4 correspondent respectivement aux adjectifs qualifiant l'application ϕ.

DÉFINITION 2.44. Une forme sesquilinéaire ϕ sur H est *coercive* s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall x \in H, \quad \phi(x,x) \geqslant k\|x\|^2.$$

PROPOSITION 2.45. Soit ϕ une forme sesquilinéaire continue sur H. Alors il existe une unique application linéaire continue $A \in \mathrm{B}(E)$ telle que

$$\forall x, y \in H, \quad \phi(x,y) = \langle Ax, y\rangle.$$

De plus, on a

$$\|A\| = \|\phi\| := \sup_{\|x\|, \|y\| \leqslant 1} |\phi(x,y)|.$$

Si la forme ϕ est coercive, alors il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que

$$\forall x \in H, \quad \|Ax\| \geqslant k\,\|x\|.$$

Preuve Soit $x \in H$. L'application $f_x \colon y \in H \longmapsto \overline{\phi(x,y)}$ est une forme linéaire continue, donc le théorème de représentation de RIESZ assure qu'il existe un élément $Ax \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \quad \overline{\phi(x,y)} = \langle y, Ax\rangle. \tag{$\star$}$$

De plus, on a $\|Ax\| = \|f_x\| \leqslant \|\phi\|\,\|x\|$. Cela montre $\|A\| \leqslant \|\phi\|$. Par ailleurs, pour tous $x, y, z \in H$, on a

$$\begin{aligned}\langle y, Ax + Az\rangle &= \langle y, Ax\rangle + \langle y, Az\rangle \\ &= \overline{\phi(x,y)} + \overline{\phi(z,y)} \\ &= \overline{\phi(x,y) + \phi(x,z)} \\ &= \overline{\phi(x+z,y)} = \langle y, A(x+z)\rangle.\end{aligned}$$

Par l'unicité dans le théorème de RIESZ, on en déduit $Ax + Az = A(x+z)$ pour tous $x, z \in H$. En procédant de la même manière, on montre finalement que l'application A est linéaire. Elle est bien continue puisque $\|A\| \leqslant \|\phi\|$ et, d'après la relation ($\star$), on a bien $\langle Ax, y\rangle = \phi(x,y)$ pour tous $x, y \in H$.

Montrons que $\|A\| = \|\phi\|$. Pour tous $x, y \in H$, on a $|\phi(x,y)| = |\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|$, donc $\|\phi\| \leqslant \|A\|$. Cela montre l'égalité des normes. Enfin, si la forme ϕ est coercive, alors l'existence d'une telle constante découle immédiatement des points précédents et de la définition. ☐

Soit ϕ une forme sesquilinéaire hermitienne positive continue sur H. Soit $f \in H'$. On considère la forme à valeurs réelles

$$J \colon \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\phi(x,x) - \operatorname{Re} f(x). \end{array} \right.$$

D'après la proposition précédente et le théorème de représentation de RIESZ, il existe une unique application linéaire continue $A \in \mathrm{B}(H)$ et un unique vecteur tels que

$$\phi(x,y) = \langle Ax, y\rangle \quad \text{et} \quad f(x) = \langle x, b\rangle, \qquad x, y \in H.$$

Alors la forme J se réécrit

$$J(x) = \tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \operatorname{Re}\langle x, b\rangle, \quad x \in H.$$

THÉORÈME 2.46 (STAMPACCHIA). Soient ϕ une forme sesquilinéaire hermitienne continue coercive sur H et $f \in H'$. Soit C un convexe fermé non vide de H. Alors

1. l'application J définie ci-dessus est bornée inférieurement, *i. e.* $-\infty < \inf J < +\infty$;
2. la restriction $J|_C$ atteint son minimum en une unique point $x_0 \in C$;
3. ce point x_0 est caractérisé par l'assertion

$$\forall y \in C, \quad \operatorname{Re}\langle Ax_0 - b, x_0 - y\rangle \leqslant y, \tag{$\sharp$}$$

◇ REMARQUE. Ce résultat généralise le théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de HILBERT.

Preuve 1. Faisons d'abord quelques calculs. Soient $x, y \in H$. On al

$$\begin{aligned}4J(x) + 4J(y) - 8J\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= 2\langle Ax, x\rangle + 2\langle Ay, y\rangle - 4\Big\langle A\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\Big\rangle - 4\operatorname{Re}\langle x, b\rangle - 4\operatorname{Re}\langle y, b\rangle + 8\operatorname{Re}\Big\langle \frac{x+y}{2}, f\Big\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - \langle Ax, y\rangle - \langle Ay, x\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle A(x-y), x-y\rangle = \phi(x-y, x-y) \geqslant k\|x-y\|^2.$$

où le réel $k > 0$ est la constante apparaissent de la définition de la coercivité de la forme ϕ. En particulier, en prenant $y = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
4J(x) &\geqslant k\|x\|^2 - 4J(0) + 8J(x/2) \\
&= k\|x\|^2 + 4\phi(x/2, x/2) - 8\operatorname{Re} f(x/2) \\
&\geqslant k\|x\|^2 - 4|f(x)| \\
&\geqslant k\|x\|^2 - 4\|f\|\,\|x\| \\
&= k\left(\|x\|^2 - \frac{4}{k}\|f\|\,\|x\|\right),
\end{aligned}$$

donc

$$J(x) \geqslant \frac{k}{4}\left[(\|x\| - \frac{2\|f\|}{x}^2 - \frac{4}{k^2}\|f\|^2\right] \geqslant -\frac{1}{k}\|f\|^2$$

ce qui montre le point 1.

2. On peut alors poser $m := \inf J > -\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de C telle que $J(x_n) \longrightarrow m$. Pour tous $n, p \in \mathbf{N}$, le calcul précédent donne

$$\begin{aligned}
k\|x_n - x_p\|^2 &\leqslant 4J(x_n) + 4J(x_p) + 8J\left(\frac{x_n + x_p}{2}\right) \\
&\leqslant 4J(x_n) + 4J(x_p) - 8m \xrightarrow[n,p\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de CAUCHY, donc elle converge vers une vecteur $\tilde{x}_0 \in H$. Comme C est fermé, on a même $\tilde{x}_0 \in C$. Comme J est continue, on en déduit $J(\tilde{x}_0) = m$.

3. Soit $x \in C$ tel que $J(x) = c$. Montrons que

$$\forall y \in C, \quad \operatorname{Re}\langle Ax - b, x - y\rangle \leqslant 0.$$

Soit $y \in C$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $J((1-t)x + ty) \geqslant m$. Considérons alors la fonction

$$\varphi : \left|\begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}_+, \\ \quad t \longmapsto J((1-t)x + ty) - m. \end{array}\right.$$

Celle-ci est dérivable, positive et vérifie $\varphi(0) = 0$, donc sa dérivée en 0 valant

$$\varphi'(0) = \tfrac{1}{2}\langle A(y-x), x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Ax, y-x\rangle - \operatorname{Re}\langle y-x, b\rangle$$

est positive ou nulle. On a donc

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant -\langle Ax, x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Ay, x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Ax, y\rangle - \operatorname{Re}\langle y-x, b\rangle \\
&= -[-\operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle + \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle + \operatorname{Re}\langle b, y-x\rangle] = -\operatorname{Re}\langle Ax - b, y - x\rangle.
\end{aligned}$$

Cela montre la relation ($\sharp$) pour le point x.

Réciproquement, soit $x \in C$ un point vérifiant la relation ($\sharp$). Montrons que $J(x) = m$. On a

$$\begin{aligned}
J(x) - J(y) &= \tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Ay, y\rangle - \operatorname{Re}\langle x, b\rangle + \operatorname{Re}\langle y, b\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}[\langle Ax, x-y\rangle + \langle x-y, Ax\rangle - \langle x-y, A(x-y)\rangle] - \operatorname{Re}\langle b, x-y\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}[\operatorname{Re}\langle Ax, x-y\rangle + \langle x-y, A(x-y)\rangle] - \operatorname{Re}\langle b, x-y\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle Ax - b, x-y\rangle - \tfrac{1}{2}\phi(x-y, x-y) \leqslant 0
\end{aligned}$$

donc $J(x) \leqslant J(y)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in C$, on obtient $J(x) = m$.

Montrons l'unicité du point $x \in C$ vérifiant la relation ($\sharp$). Soient $x_1, x_2 \in C$ deux points vérifiant la relation ($\sharp$). Alors

$$\operatorname{Re}\langle Ax_1 - b, x_1 - x_2\rangle \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\langle Ax_2 - b, x_2 - x_1\rangle \leqslant 0$$

et donc

$$0 \geqslant \operatorname{Re}\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2\rangle = \phi(x_1 - x_*2, x_1 - x_2) \geqslant k\|x_1 - x_2\|^2$$

ce qui implique $x_1 = x_2$ et montre l'unicité. □

COROLLAIRE 2.47 (cas d'un sous-espace affine). On se place sous les hypothèses du théorème de STAMPACCHIA. Soit $C := z_0 + F$ un sous-espace affine de H où le sous-espace vectoriel F est fermé. Alors il existe un point $x_0 \in C$ qui minimise la forme linéaire J et la condition ($\sharp$) est équivalente aux assertions suivantes :

(i) on a $x_0 \in C$ et $\langle Ax_0 - b, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$;

(ii) on a $x_0 \in C$ et $Ax_0 - b \in F^\perp$;

(iii) on a $x_0 \in C$ et $\phi(x_0, y) = \overline{f(y)}$ pour tout $y \in F$.

Preuve Les assertions (i), (ii) et (iii) sont clairement équivalente. Montrons que ($\sharp$) $\Leftrightarrow$ (i). Si le point (i) est vérifié, alors tout vecteur $y \in C$ vérifie $x - y_0 \in F^\perp$, donc $\langle Ax_0 - b, x_0 - y\rangle = 0$, donc $\operatorname{Re}\langle Ax_0 - b, x_0 - y\rangle \leqslant 0$. Réciproquement, si la condition ($\sharp$) est satisfaite, alors $\operatorname{Re}\langle ax_0 - b, -z\rangle \leqslant 0$ pour tout $z \in F$ et, en appliquant ce dernière inégalité aux vecteurs $-z$ et iz, on en déduit $\langle Ax_0 - b, z\rangle = 0$ pour tout $z \in C$. □

THÉORÈME 2.48 (LAX-MILGRAM). On se place sous les hypothèses du théorème de STAMPACCHIA. Alors la forme linéaire J atteint son minimum en un unique point $x_0 \in H$ caractérisé par la relation

$$Ax_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall y \in H, \quad \phi(x_0, y) = \overline{f(y)}. \tag{$\sharp\sharp$}$$

Preuve Il suffit d'appliquer le théorème avec $F = H$. □

APPLICATION DU THÉORÈME DE LAX-MILGRAM. Soient E, F et G trois espaces de HILBERT tels que $E \subset F \subset G$. On suppose que ces inclusions induisent des injections continues, *i. e.* il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|x\|_F &\leqslant c\|x\|_E, \quad \forall x \in E, \\ \|x\|_G &\leqslant c\|x\|_F, \quad \forall x \in F. \end{aligned}$$

On suppose $\overline{E} = G$. Soient ϕ une forme sesquilinéaire positive continue sur F et $T \in \mathrm{B}(E, G)$ tels que

$$\langle Tx, y\rangle_G = \phi(x, y), \quad \forall x \in E,\ \forall y \in G.$$

Soit $z \in G$. On considère l'équation

$$Tx = z. \tag{EA}$$

Une solution forte de l'équation (EA) est un vecteur $x \in E$ tel que $Tx = z$. Une solution faible est un vecteur $x \in F$ tel que

$$\forall y \in F, \quad \phi(x, y) = \langle x, y\rangle_G.$$

THÉORÈME 2.49 (existence et unicité de la solution faible). Soit ϕ une forme sesquilinéaire hermitienne continue coercive sur F. Alors

1. pour tout $z \in G$, l'équation (EA) admet une unique solution faible qu'on note $Sz \in F$;
2. l'application S est un élément de $\mathrm{B}(G, F)$;
3. la co-restriction $S : G \longrightarrow G$ est une application linéaire continue injective vérifiant

$$\forall z_1, z_2 \in G, \quad \langle Sz_1, z_2\rangle_G = \langle z_1, Sz_2\rangle_G \qquad \text{et} \qquad \forall z \in G \setminus \{0\}, \quad \langle Sz, z\rangle_G > 0\,;$$

4. pour tout $x \in E$, on a $S(Tx) = x$;
5. pour tout $z \in G$, l'élément $Sz \in F$ est l'unique vecteur de F minimisant la forme

$$J_z : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbf{K}, \\ y \longmapsto \frac{1}{2}\phi(y, y) - \operatorname{Re}\langle y, z\rangle_G. \end{array} \right.$$

Preuve 1. Soit $z \in G$. Alors l'application $f_z : y \in F \longmapsto \langle y, z\rangle_G$ appartient à F'. Alors les hypothèses du théorème de LAX-MILGRAM sont satisfaites dans F, donc il existe un unique vecteur $Sz \in F$ vérifiant

$$\forall y \in F, \quad \phi(Sz, y) = \overline{f_z(y)} = \langle z, y\rangle_G.$$

Donc le vecteur Sz est bien une solution faible de l'équation (EA).
2 & 3. Montrons que l'application S est linéaire. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ et $z_1, z_2, y \in G$, on a

$$\begin{aligned} \phi(\alpha Sz_1 + \beta Sz_2) &= \alpha\phi(Sz_1) + \beta\phi(Sz_2) \\ &= \alpha\langle z_1, y\rangle_G + \beta\langle z_2, y\rangle_G \\ &= \langle \alpha z_1 + \beta z_2, y\rangle_G = \phi(S(\alpha z_1 + \beta z_2), y) \end{aligned}$$

ce qui implique $\alpha Sz_1 + \beta Sz_2 = S(\alpha z_1 + \beta z_2)$ d'après l'unicité donnée par le théorème.

Montrons qu'elle est injective. Soit $z \in \operatorname{Ker} S$. Alors pour tout $y \in F$, on a $0 = \phi(0, y) = \langle z, y\rangle$ et c'est *a fortiori* vrai pour tout $y \in E$. Donc $z \in E^\perp$. Comme E est dense dans G, on a $E^\perp = \{0\}$, donc $z = 0$. D'où l'injectivité.

Montrons qu'elle est bornée. On note $k > 0$ la constante de coercivité de la forme ψ. Alors pour tout $z \in G$, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ donne

$$\begin{aligned} k\,\|Sz\|_F^2 &\leqslant \phi(Sz, Sz) = \langle z, Sz\rangle_G \\ &\leqslant \|z\|_G\|Sz\|_G \leqslant c\|z\|_G\|Sz\|_F, \end{aligned}$$

donc $\|Sz\|_F \leqslant \frac{c}{k}\|z\|_G$. Ceci montre que l'application S est continue.

Montrons les deux dernières relations que vérifie l'application S. Soit $z \in G \setminus \{0\}$. Alors son injectivité assure

$$0 < k\,\|Sz\|_F^2 \leqslant \phi(Sz, Sz) = \langle z, Sz\rangle_G.$$

De plus, pour tous $z_1, z_2 \in G$, on a

$$\langle Sz_1, z_2\rangle_G = \overline{\langle z_2, Sz_1\rangle_G} = \overline{\phi(Sz_2, Sz_1)} = \phi(Sz_1, Sz_2) = \langle z_1, Sz_2\rangle_G.$$

2. Soit $x \in E$. Pour tout $y \in F$, on a $\phi(S(Tx), y) = \langle Tx, y\rangle_F = \phi(x, y)$. L'unicité donne alors $S(Tx) = x$. □

COROLLAIRE 2.50. On se place sous les hypothèses du théorème précédent. On suppose que, pour tout $z \in G$, toute solution faible $x \in F$ appartient à E. Alors toute solution faible est forte et il y a unicité de la solution. De plus, on a $S \in \mathrm{B}(G, E)$ et $S = T^{-1}$.

Preuve Montrons que $T \circ S = \mathrm{Id}_G$. Soit $z \in G$. D'après le théorème, il existe une unique solution faible $Sz \in F$. La régularité force à avoir $Sz \in F$. Maintenant pour tout $y \in F$, on a

$$\langle T(Sx), y\rangle_G = \phi(Sz, y) = \langle z, y\rangle_G$$

et donc $T(Sz) - z \in E^\perp = \{0\}$. D'où $T(Sz) = \mathrm{Id}_G$ pour tout $z \in G$ ce qui montre $T \circ S = \mathrm{Id}_G$. Ainsi l'application linéaire $T\colon E \longrightarrow G$ est continue et bijective d'inverse S. □

2.3.3 Adjoint d'un opérateur sur un espace de HILBERT

THÉORÈME 2.51. Soient E et F deux espaces de HILBERT et $T \in \mathrm{B}(E, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $T^* \in \mathrm{B}(F, E)$ telle que

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, \quad \langle Tx, y\rangle_F = \langle x, T^* y\rangle_E.$$

Cette application T^* est appelée l'*adjoint* de T. De plus, l'application $T \in \mathrm{B}(E, F) \longmapsto T^*$ est involutive, anti-linéaire, isométrie et vérifie

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*, \quad \forall T \in \mathrm{B}(E, F),\ \forall S \in \mathrm{B}(F, G).$$

Enfin, pour tout $T \in \mathrm{B}(E, F)$, on a $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

Preuve Pour tout $y \in F$, l'application $f_y\colon x \in E \longmapsto \langle Tx, y\rangle_F$ est une forme linéaire continue sur E, donc le théorème de représentation de RIESZ assure qu'il existe un unique vecteur $T^* y \in F$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \langle Tx, y\rangle_F = \langle x, T^* y\rangle_E.$$

On a construit une application $T^*\colon F \longrightarrow E$ vérifiant la bonne relation. L'unicité dans le théorème de RIESZ permet de montrer sa linéarité. Montrons qu'elle est continue. Pour tout $y \in F$, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ montre

$$\|f_y\| = \|T^* y\| \leqslant \|T\|\,\|y\|.$$

Donc $T^* \in \mathrm{B}(E, F)$ et $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Maintenant, on vérifie $(T^*)^* = T$. Pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$\langle y, Tx\rangle_F = \overline{\langle Tx, y\rangle_F} = \overline{\langle x, T^* y\rangle_E} = \langle T^* y, x\rangle_E = \langle y, (T^*)^* x\rangle_F$$

ce qui implique $Tx = (T^*)^* x$. Avec ceci, on obtient donc $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leqslant \|T^*\|$ montrant $\|T^*\| = \|T\|$: la transposition est une isométrie.

Montrons que la transposition est une application anti-linéaire. Pour tous $S, T \in \mathrm{B}(E, F)$, $\alpha \in K$, $x \in E$ et $y \in F$, on a successivement

$$\begin{aligned}\langle x, (S + \alpha T)^* y\rangle = \langle (S + \alpha T)x, y\rangle &= \langle Sx, y\rangle + \alpha\langle Tx, y\rangle \\ &= \langle x, S^* y\rangle + \alpha\langle x, T^* y\rangle \\ &= \langle x, S^* + \overline{\alpha}T^* y\rangle = \langle x, (S^* + \overline{\alpha}T^*)y\rangle\end{aligned}$$

et on applique encore une fois l'unicité. L'avant-dernière relation se montre de la même manière. Enfin, pour tout $y \in F$, on a

$$\|T^* y\|_E^2 = \langle T^* y, T^* y\rangle_E = \langle T(T^*)y, y\rangle \leqslant \|TT^*\|\,\|y\|^2.$$

Cela montre $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 \leqslant \|TT^*\|$. L'autre inégalité étant claire, on obtient l'égalité $\|TT^*\| = \|T\|^2$. □

◇ REMARQUE. Soit $T \in \mathrm{B}(E, F)$. Alors il est inversible si et seulement si son dual l'est. Dans ce cas, on a

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

DÉFINITION 2.52. Soit H un espace de HILBERT. Un opérateur $T \in \mathrm{B}(H)$ est dit
1. *normal* si $TT^* = T^*T$;
2. *autoadjoint* si $T^* = T$;
3. *unitaire* si $T^*T = TT^* = \mathrm{Id}_H$;
4. une *projection* si $T^2 = T$.

PROPOSITION 2.53. Soit $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur normal. Alors pour tout $x \in H$, on a $\|Tx\| = \|T^*x\|$. La réciproque est vraie dans un $\mathbf{C}$-espace de HILBERT.

Preuve La première partie est évidente. Réciproquement, soient H un $\mathbf{C}$-espace de HILBERT et $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur vérifiant

$$\forall x \in H, \quad \|Tx\| = \|T^*x\|.$$

Admettons provisoirement le lemme suivant.

LEMME 2.54. Soient H un $\mathbf{C}$-espace de HILBERT et $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur vérifiant

$$\forall x \in H, \quad \langle Tx, x\rangle = 0.$$

Alors $T = 0$

Alors pour tout $x \in H$, on a $0 = \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = \langle x, (T^*T - TT^*)x\rangle$. Le lemme donne alors $T^*T - TT^* = 0$, *i. e.* l'opérateur T est normal. □

Preuve du lemme Soient $x, y \in H$. Comme $\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$, on a $\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0$. Dans cette dernière égalité, on remplace y par iy puis on la multiplie par i : on obtient $\langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle = 0$. En sommant ces deux égalités, on obtient $\langle Tx, y\rangle = 0$. En prenant $y = Tx$, on trouve $\|Tx\|^2 = 0$ ce qui donne $Tx = 0$. Le lemme est alors montré. □

◇ REMARQUE. Le lemme est faux pour des $\mathbf{R}$-espaces de HILBERT. On peut, par exemple, considérer la rotation de $\mathbf{R}^2$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on va se concentrer sur l'étude des opérateurs autoadjoints d'un espace de HILBERT H.

▷ EXEMPLES. – Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors la projection $p_F : H \longrightarrow F$ sur F est un opérateur autoadjoint. En effet, pour tous $x \in H$ et $y \in F$, on a

$$\begin{aligned}\langle p_F(x), y\rangle &= \langle p_F(x), y - p_F(x) + p_F(y)\rangle \\ &= \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle.\end{aligned}$$

– Soit $T \in \mathrm{B}(H)$. Alors les opérateurs TT^* et T^*T sont autoadjoints.
– Soit $K \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$. On considère l'opérateur $T_K \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2([0,1]^2))$ défini par la relation

$$(T_K x)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad s \in [0,1],\ x \in \mathrm{L}^2([0,1]^2).$$

En posant $K^*(s,t) := \overline{K(t,s)}$ pour tous $s, t \in [0,1]$, on peut montrer $T_K^* = T_{K^*}$. Si le noyau K est hermitien, alors l'opérateur T_K devient autoadjoint.

DÉFINITION 2.55. Un opérateur $T \in \mathrm{B}(H)$ est dit positif si

$$\forall x \in H, \quad \langle Tx, x\rangle \geqslant 0.$$

▷ EXEMPLES. Une projection orthogonale est positive. Pour tout $T \in \mathrm{B}(H)$, l'opérateur TT^* est positif.

PROPOSITION 2.56. Soit $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur autoadjoint. Alors pour tout $x \in H$, on a $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}$. La réciproque est vraie dans un $\mathbf{C}$-espace de HILBERT.

Preuve Pour tout $x \in H$, comme T est autoadjoint, on a $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, donc $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}$. La réciproque se montre comme pour la preuve précédente. □

Soit $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur autoadjoint. On pose $m := \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ et $M := \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, ces deux quantités appartiennent à l'intervalle $[-\|T\|, \|T\|]$.

PROPOSITION 2.57. Soit $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur autoadjoint. Alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Preuve Notons $\gamma := \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|$. Avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a déjà $\gamma \leqslant \|T\|$. Montrons l'autre inégalité. Pour tout $x \in H \setminus \{0\}$, on a

$$|\langle Tx,x\rangle| = \left|\left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \|x\|^2 \leqslant \gamma\|x\|^2$$

et ceci est aussi vrai pour $x = 0$. Maintenant, pour tous $x, y \in H$, comme T est autoadjoint, on a

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle &= 2\langle Tx,y\rangle + 2\langle Ty,x\rangle \\ &= 2\langle Tx,y\rangle + 2\overline{\langle Tx,y\rangle} = 4\operatorname{Re}\langle Tx,y\rangle,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|4\operatorname{Re}\langle Tx,y\rangle| &\leqslant |\langle T(x+y),x+y\rangle| + |\langle T(x-y),x-y\rangle| \\ &\leqslant \gamma\|x+y\|^2 + \gamma\|x-y\|^2 \leqslant 2\gamma(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

Soit $x \in H$ un vecteur tel que $\|x\| = 1$ et $Tx \neq 0$. L'inégalité précédente avec $y := Tx/\|Tx\|$ donne

$$4\left|\operatorname{Re}\left\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right\rangle\right| \leqslant 4\gamma$$

ce qui implique $\|Tx\| \leqslant \gamma$. D'où $\|T\| \leqslant \gamma$. □

2.3.4 Spectre d'un opérateur (autoadjoint)

PROPOSITION 2.58. Soit $T \in \mathrm{B}(H)$. Alors

1. on a $\sigma(T^*) = \{\mu \in \mathbf{K} \mid \overline{\mu} \in \sigma(T)\}$;
2. pour tout $\lambda \in \rho(T)$, on a $\mathrm{R}_T(\lambda)^* = \mathrm{R}_{T^*}(\overline{\lambda})$.

Preuve 1. Soit $\lambda \in \rho(T)$. Alors l'opérateur $\lambda\mathrm{Id}_H - T$ est inversible, donc il existe $S \in \mathrm{B}(H)$ tel que

$$S \circ (\lambda\mathrm{Id}_H - T) = (\lambda\mathrm{Id}_H - T)\circ S = \mathrm{Id}_H.$$

En passant à l'adjoint, on obtient $(\overline{\lambda}\mathrm{Id}_H - T^*)\circ S^* = S^* \circ (\overline{\lambda} I - T^*) = \mathrm{Id}_H$. D'où $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$. En fait, on a raisonner par équivalences : on trouve alors $\rho(T^*) = \{\mu \in \mathbf{C} \mid \overline{\mu} \in \rho(T)\}$. En passant au complémentaire, on obtient l'égalité voulue.

2. Pour tout $\lambda \in \rho(T)$, avec les notations précédentes, on a

$$\mathrm{R}_{T^*}(\overline{\lambda}) = (\overline{\lambda}\mathrm{Id}_H - T^*)^{-1} = S^* = \mathrm{R}_T(\lambda)^*.$$

□

THÉORÈME 2.59 (COURANT-FISCHER). Soit $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur autoadjoint. On pose

$$m := \inf_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle \quad \text{et} \quad M := \sup_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle.$$

Alors

1. on a $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$ et même $\sigma(T) \subset [m, M]$;
2. on a $m, M \in \sigma(T)$;
3. on a $\|T\| = r(T)$.

Preuve 1. Montrons que $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$. Soient $\lambda \in \mathrm{vp}(T)$ et $x \in H$ un vecteur propre associé. Alors

$$\lambda\langle x,x\rangle = \langle Tx,x\rangle = \langle x,Tx\rangle = \overline{\lambda}\langle x,x\rangle,$$

donc $\lambda \in \mathbf{R}$. D'où $\mathrm{vp}(T) \subset \mathbf{R}$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{R}$. Alors l'opérateur $\lambda\mathrm{Id}_H - T$ est injective puisque $\lambda \notin \mathrm{vp}(T)$. Montrons que $\lambda \in \rho(T)$, *i. e.* l'opérateur $\lambda\mathrm{Id}_H - T$ est surjectif. Pour tout $x \in H\setminus\{0\}$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\langle(\lambda\mathrm{Id}_H - T)x, x\rangle &= \operatorname{Im}(\langle\lambda x,x\rangle - \langle Tx,x\rangle) \\ &= (\operatorname{Im}\lambda)\|x\|^2,\end{aligned}$$

donc l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ assure

$$|\operatorname{Im}\lambda|\,\|x\|^2 \leqslant |\operatorname{Im}\langle(\lambda\mathrm{Id}_H - T)x,x\rangle| \leqslant \|(\lambda\mathrm{Id}_H - T)x\|\,\|x\|$$

et donc $|\operatorname{Im}\lambda|\,\|x\| \leqslant \|(\lambda\mathrm{Id}_H - T)x\|$. Admettons provisoirement les lemmes suivants.

LEMME 2.60. Soient E un espace de BANACH, F un espace vectoriel normé et $S \in \mathrm{B}(E,F)$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ tel que
$$\forall x \in E, \quad \|Sx\| \geqslant c\|x\|.$$
Alors l'image $\mathrm{R}(S)$ est fermée et l'application $S\colon E \longrightarrow \mathrm{R}(S)$ est un homéomorphisme.

LEMME 2.61. Soit $S \in \mathrm{B}(H)$. Alors $\operatorname{Ker} S^* = \mathrm{R}(S)^\perp$ et $\operatorname{Ker} S = \mathrm{R}(S^*)^\perp$.

Ainsi l'image $\mathrm{R}(\lambda \mathrm{Id}_H - T)$ est fermée. Comme T est autoadjoint et $\overline{\lambda} \notin \mathbf{R}$ n'est pas une valeur propre de T, l'orthogonal de cette image vaut
$$\mathrm{R}(\lambda \mathrm{Id}_H - T)^\perp = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda}\mathrm{Id}_H - T^*) = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda}\mathrm{Id}_H - T) = \{0\}.$$
Admettons encore le lemme suivant.

LEMME 2.62. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors
(a) si F est fermé, alors $F^\perp$ est un supplémentaire fermé de F ;
(b) le sous-espace vectoriel F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

On en déduit alors que l'image $\mathrm{R}(\lambda \mathrm{Id}_H - T)$ est dense dans H et qu'elle est même égale à H puisqu'elle est fermée. Donc l'opérateur $\lambda \mathrm{Id}_H - T$ est surjectif, donc $\lambda \notin \sigma(T)$. D'où $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$.

Montrons maintenant que $\sigma(T) \subset [m, M]$. Quitte à remplacer T par $-T$, il suffit de montrer $\sigma(T) \subset]-\infty, M]$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Notons $S_\lambda := \lambda \mathrm{Id}_H - T$. L'application
$$\phi\colon \left| \begin{array}{l} H \times H \longrightarrow \mathbf{K}, \\ (x,y) \longmapsto \langle S_\lambda x, y\rangle \end{array}\right.$$
est sesquilinéaire et continue d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. On suppose $\lambda > M$. Alors l'application ϕ est coercive. En effet, pour tout $x \in H$, on a
$$\phi(x,x) = \langle \lambda x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \geqslant (\lambda - M)\|x\|^2$$
car $\lambda - M > 0$. Cette dernière inégalité implique aussi l'injectivité de l'opérateur S_λ. Montrons qu'elle est aussi surjective. Soit $b \in H$. L'application $y \in H \longmapsto \langle y, b\rangle$ est un forme linéaire continue. Le théorème de LAX-MILGRAM assure alors l'existence d'un vecteur $x_0 \in H$ tel que
$$\forall y \in H, \quad \langle S_\lambda x_0, y\rangle = \phi(x_0, y) = \overline{\langle y, b\rangle} = \langle b, y\rangle.$$
Cela implique $S_\lambda x_0 = b$. Cela montre sa surjectivité. Donc l'opérateur S_λ est bijective et $\lambda \notin \sigma(T)$ dès que $\lambda > M$. D'où $\sigma(T) \subset]-\infty, M]$.

2. Montrons uniquement que $M \in \sigma(T)$. Il suffit de remplacer T par $-T$ pour en déduire $m \in \sigma(T)$. On considère l'opérateur autoadjoint S_M avec les notations du point précédent. Ce dernier est positif. Admettons le lemme suivant laissé en exercice.

LEMME 2.63. Soit $S \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur autoadjoint et positif. Alors
$$|\langle Sx, y\rangle|^2 \leqslant \langle Sx, x\rangle \langle Sy, y\rangle.$$

Pour tout $x \in H$, le lemme précédent assure
$$\|S_M x\|^2 = \sup_{\|y\|=1} |\langle S_M x, y\rangle|^2 \leqslant \|S_M\| \langle S_M x, x\rangle. \tag{$*$}$$
Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de H telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow M$. De la même manière que pour montrer la coercivité de la forme ϕ, on a $\langle S_M x_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$, donc $\|S_M x_n\| \longrightarrow 0$. Si on avait $M \notin \sigma(T)$, alors S_M est bijective, donc $x_n = S_M^{-1}(S_M x_n) \longrightarrow 0$ ce qui est impossible car les vecteurs x_n sont de norme 1. D'où le résultat.

3. Montrons que $\|T\| = r(T)$. On sait que $r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. D'après les points 1 et 2, on a $r(T) = \max(|m|, |M|)$ et, comme $\max(|m|, |M|) = \|T\|$, on obtient l'égalité souhaitée. □

Preuve du lemme 2.60 Montrons que l'image $\mathrm{R}(S)$ est fermée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E telle que $Sx_n \longrightarrow y \in E$. Alors la suite $(Sx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de CAUCHY. Avec l'hypothèse, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi de CAUCHY. Comme E est complet, cette dernière converge vers un vecteur $x \in E$. Enfin, comme T est continue, on obtient $Sx_n \longrightarrow Sx$ impliquant $y = Sx \in \mathrm{R}(S)$. □

Preuve du lemme 2.61 Soit $y \in H$. Alors on peut écrire les équivalences
$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Ker} S^* \quad &\Longleftrightarrow \quad S^* y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \langle x, S^* y\rangle = 0,\ \forall x \in H \end{aligned}$$

$$\iff \quad \langle Sx, y\rangle = 0,\ \forall x \in H \quad \iff \quad y \in \mathrm{R}(S)^{\perp}.$$

Cela montre $\operatorname{Ker} S^* = \mathrm{R}(S)^{\perp}$. La seconde égalité découle du fait $(S^*)^* = S$. □

COROLLAIRE 2.64. Soient H un espace de HILBERT non nul et $T \in \mathrm{B}(H)$ un opérateur autoadjoint. Alors

1. l'opérateur T est positif si et seulement si $\sigma(T) \subset [0, +\infty[$;
2. si $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T = 0$.

◇ REMARQUES. Au cours de la preuve du précédent théorème, on a montré que

$$|\operatorname{Im}\lambda|\,\|x\| \leqslant \|(\lambda \mathrm{Id}_H - T)x\|, \quad \lambda \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{R},\ x \in E$$

ce qui permet d'écrire

$$\|\mathrm{R}_T(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbf{K}\setminus\mathbf{R}.$$

2.3.5 Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

Soit H un espace de HILBERT non nul de dimension infinie. Soit $T \in \mathrm{K}(H)$. On sait déjà que $0 \in \sigma(T)$. De plus, on a $\sigma(T)\setminus\{0\} = \mathrm{vp}(T)\setminus\{0\}$ et la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre $\lambda \in \mathrm{vp}(T)\setminus\{0\}$ est fini. Enfin, on a vu que $\sigma(T) = \{0\} \Leftrightarrow T = 0$ et que, si $T \neq 0$, alors $\sigma(T)$ est au plus dénombrable.

THÉORÈME 2.65 (décomposition spectrale d'un opérateur compact autoadjoint). Soit $T \in \mathrm{K}(H)$ un opérateur autoadjoint. Alors il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[-\|T\|, \|T\|]\setminus\{0\}$ telle que

$$|\lambda_n| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

De plus, on peut écrire la somme hilbertienne

$$H = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} E_n \quad \text{avec} \quad E_n := \begin{cases} \operatorname{Ker} T & \text{si} n = 0, \\ \operatorname{Ker}(\lambda_n \mathrm{Id}_H - T) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, l'espace H admet une base hilbertienne fermée composée de vecteurs propres de T

Preuve L'existence d'une telle suite est assurée par la proposition 2.39. De plus, on vérifie aisément que les sous-espaces vectoriels E_n sont deux à deux orthogonaux. Enfin, montrons que le sous-espace $F := \overline{\operatorname{Vect}(E_n)_{n\in\mathbf{N}}}$ est dense dans H. Il suffit de montrer $F^{\perp} = \{0\}$. Montrons d'abord que $T(F) \subset F$. Pour tout $x \in F$, en notant les projetions p_{E_n}, on a

$$x = p_{E_0}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{E_n}(x)$$

et on peut montrer que

$$Tx = T(p_{E_0}(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} T(p_{E_n}(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n p_{E_n}(x)$$

puisque, comme $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$, on a la majoration

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\lambda_n p_{E_n}(x)\|^2 \leqslant \|T\|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \|p_{E_n}(x)\|^2 < +\infty.$$

Ainsi pour tout $x \in F$, on a $Tx \in F$. D'où $T(F) \subset F$. Il vient ensuite que $T(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$. Notons $\tilde{T} \colon F^{\perp} \longrightarrow F^{\perp}$ la restriction de l'opérateur T à $F^{\perp}$. Clairement, l'opérateur $\tilde{T}$ est autoadjoint.

Montrons qu'il est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $B_H \cap F^{\perp}$. Comme l'opérateur T est compact, il existe une extraction $\phi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et un vecteur $y \in H$ tels que $Tx_{\varphi(n)} \longrightarrow y$. Or les vecteurs $x_{\varphi(n)}$ sont dans $F^{\perp}$, donc les vecteurs $Tx_{\varphi(n)}$ sont aussi dans $F^{\perp}$. Comme $F^{\perp}$ est fermé, on en déduit alors $y \in F^{\perp}$. L'opérateur $\tilde{T}$ est donc compact.

Montrons que $\sigma(\tilde{T}) = \{0\}$. En effet, cela montrera $\tilde{T} = 0$, donc $F^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T \subset F$, donc $F^{\perp} = \{0\}$. Pour montrer l'égalité $\sigma(\tilde{T}) = \{0\}$, il suffit de montrer que l'opérateur $\tilde{T}$ n'admet pas de valeur propre non nulle. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une valeur propre $\lambda \neq 0$ de $\tilde{T}$. On note $x \in F^{\perp}$ un vecteur propre associé. Alors $Tx = \lambda x$, donc il existe $n \geqslant 1$ tel que $\lambda = \lambda_n$, donc $x \in E_n \subset F$. Ainsi le vecteur x est non nul et pourtant il appartient à $F^{\perp} \cap F = \{0\}$ ce qui est impossible.

Enfin, la base hilbertienne de H est la concaténation des bases de chaque sous-espace vectoriel E_n et de l'espace séparable. □