COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

Jérémy Le Borgne
Arnaud Debussche

1A maths 2019, ENS de Rennes

Chapitre 1
Théorie des ensembles

Historiquement, la théorie des ensembles s'est formé entre la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle et le début du XX$^{\text{e}}$ siècle. Comme Euclide l'a fait avec la géométrie, des mathématiciens comme Hilbert ou Cantor ont tenté d'établir cette théorie, d'autres comme Zermelo ou Frankel ont essayé de l'axiomatiser.

1.1 Premiers axiomes de la théorie

1.1.1 Un peu de logique

Un système logique est un langage (constitué de formules), une syntaxe (qui dit quelles formules on peut écrire) et une interprétation/sémantique (qui dit si une formule est vraie ou fausse). En logique classique, il y a le langage des propositions (notées par des lettres), des symboles (comme $\neg$ ou $\vee$) et la syntaxe (l'opérateur $\neg$ est unaire et les autres sont binaires).

▷ Exemple. Si f_1 et f_2 sont des formules, alors $f_1 \wedge f_2$ en est une aussi.

On considère aussi les prédicats. Ces derniers sont des formules qui dépendent de paramètres et peuvent être quantifiés par $\forall$ ou $\exists$. Enfin, on munit la logique d'une interprétation. Ici on prendra les définitions des symboles usuels, données par leurs tables de vérité où les valeurs seront « vraie » ou « fausse ».

Axiome 1.1 *(de la logique).* Les formules suivantes sont vraies :
– $p \vee \neg p$ (tiers exclu) ;
– $\neg\neg p \Rightarrow p$ (raisonnement par l'absurde) ;
– $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$ (loi de De Morgan).

1.1.2 Les cinq premiers axiomes

On ne définit pas les ensembles ni le symbole « $\in$ ». On dispose d'un univers constitué d'ensembles et, étant donnés deux ensembles x et y, on peut écrire la formule « $x \in y$ ». De plus, on suppose qu'il y a au moins un ensemble. On pose alors les axiomes qui vont suivre, constituant la théorie ZF des ensembles.

Axiome 1.2 *(d'extensionnalité).* On pose

$$\forall a\ \forall b\ \big[(a = b) \Leftrightarrow (\forall x\ x \in a \Leftrightarrow x \in b)\big]$$

Définition 1.3 *(inclusion).* Soient a et b des ensembles. La notation $a \subset b$ signifie

$$\forall x\ (x \in a) \Rightarrow (x \in b).$$

Théorème 1.4. Alors

$$\forall a\ \forall b\ (a = b) \Leftrightarrow [(a \subset b) \wedge (b \subset a)].$$

Axiome 1.5 *(de sélection).* Soit P une proposition portant sur un ensemble. On pose

$$\forall a\ \exists b\ \forall x\ (x \in b) \Leftrightarrow [(x \in a) \wedge \mathrm{P}(x)].$$

Proposition 1.6. Un tel ensemble b de l'axiome précédent est unique. On le note

$$b := \{x \in a \mid \mathrm{P}(x)\}.$$

Preuve Si b' vérifie $(x \in b') \Leftrightarrow [(x \in a) \wedge P(x)]$, alors $\forall x\ (x \in b') \Leftrightarrow (x \in b)$, donc $b = b'$ par extensionnalité. □

◇ Remarque. On ne peut pas considérer l'ensemble $\{x \mid \mathrm{P}(x)\}$ où l'on ne spécifie pas où se trouve les x. En effet, appelons $\mathrm{P}(x)$ la propriété $x \notin x$. On considère $b \coloneqq \{x \mid \mathrm{P}(x)\}$. Si $b \in b$, alors $b \notin b$. Réciproquement, si $b \notin b$, alors $b \in b$. Donc $b \in b \Leftrightarrow \neg(b \in b)$ ce qui est absurde d'après le principe du tiers exclu.

Théorème 1.7. Il existe un unique ensemble n'ayant pas d'éléments. Cet ensemble, appelé ensemble vide et noté $\emptyset$, inclut dans tout les ensembles. Autrement dit, on a

1. $\exists \emptyset \ \forall x \ x \notin \emptyset$;
2. $\forall b \ (\forall x \ x \notin b) \Rightarrow b = \emptyset$;
3. $\forall a \ \emptyset \subset a$.

Preuve Soit a un ensemble. On note $\emptyset \coloneqq \{x \in A \mid x \neq x\}$. Cet ensemble n'a aucun élément, il est unique par extensionnalité. Soit b un ensemble. Alors $\forall x \ (x \in \emptyset \Rightarrow x \in b)$ car $\forall x \ \neg(x \in \emptyset)$, donc $\emptyset \subset b$. Ceci montre également l'unicité. □

Proposition 1.8. Soit a un ensemble tel que $a \neq \emptyset$. Il existe un unique ensemble b tel que

$$\forall y \ (y \in b) \Leftrightarrow (\forall x \ [x \in a \Rightarrow y \in x]).$$

Autrement dit, les éléments de b sont ceux qui sont les éléments de tous les ensembles $x \in a$. Un tel ensemble b est noté $b \coloneqq \bigcap_{x \in a} x$.

Preuve L'unicité se montre par extensionnalité. Soit $c \in a$. On considère $b \coloneqq \{y \in a \mid \forall x \in a, y \in x\}$. Montrons que $y \in b \Leftrightarrow (\forall x \in A, y \in x)$. Si $y \in b$, alors $\forall x \in a, y \in x$. Réciproquement, si $\forall x \in A, y \in x$, alors $y \in c$, donc $y \in b$. D'où l'existence. □

Axiome 1.9 *(de la paire).* On pose

$$\forall x \ \forall y \ \exists a \ \forall z \ (z \in a) \Leftrightarrow [(z = x) \vee (z = y)].$$

Un tel ensemble a est noté $a \coloneqq \{x, y\}$

Corollaire 1.10. On peut aussi considérer $\{x\}$.

Axiome 1.11 *(de la réunion).* On pose

$$\forall a \ \exists b \ \forall a \ (x \in b) \Leftrightarrow [\exists y \ (y \in a) \wedge (x \in y)].$$

Un tel ensemble b est noté $b \coloneqq \bigcup_{y \in A} y$.

Axiome 1.12 *(de l'ensemble des parties).* On pose

$$\forall a \ \exists b \ \forall x \ (x \in b) \Leftrightarrow (x \subset a).$$

Un tel ensemble b est noté $b \coloneqq \mathscr{P}(a)$.

◇ Remarque. À partir de $\emptyset$, l'axiome de la paire donne le nouvel ensemble $\{\emptyset\}$. De même, on peut construire l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, puis l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$. Par construire les entiers, on définit $0 = \emptyset$ et, si n est défini, on définit $n^+ = n \cup \{n\}$.

1.2 Construction d'ensembles de nombres

1.2.1 L'ensemble des entiers naturels

Axiome 1.13 *(de l'infini).* On pose

$$\exists N \ (\emptyset \in N) \wedge (x \in N \Rightarrow x \cup \{x\} \in N).$$

Proposition 1.14. Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété précédente et tel que, pour tout N vérifiant cette propriété, alors $\mathbb{N} \subseteq N$.

Preuve Soit N un ensemble vérifiant la propriété. Soit $\mathrm{P}(W)$ la propriété

$$(\emptyset \in W) \wedge (x \in W \Rightarrow x \cup \{x\} \in W).$$

On note $A \coloneqq \{W \in \mathscr{P}(N) \mid \mathrm{P}(W)\}$. Alors $A \neq \emptyset$ car $N \in A$ et $\mathbb{N} = \bigcap_{W \in A} W$. Montrons que $\mathbb{N}$ vérifient la propriété. Pour tout $W \in A$, on a $\emptyset \in W$, donc $\emptyset \in \mathbb{N}$. De même, pour tout $W \in A$, on a $x \in W \Rightarrow (x \cup \{x\} \in W)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x \cup \{x\} \in W$ pour tout $W \in A$, donc $x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$. Donc $\mathbb{N}$ vérifie la propriété P.

Soit N' un ensemble vérifiant la propriété. Montrons que $\mathbb{N} \subseteq N'$. On a $\mathbb{N} \cap N' \subseteq N'$ et $\mathbb{N} \cap N' \subseteq N$. De plus, l'ensemble $\mathbb{N} \cap N'$ vérifie P. Or $\mathbb{N} \cap N' \subset N$, donc $\mathbb{N} \cap N' \in A$, donc $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cap N'$. Finalement, on a $\mathbb{N} \cap N' = \mathbb{N}$. Ainsi, on a $\mathbb{N} \subset N'$. $\square$

Corollaire 1.15. Un tel ensemble $\mathbb{N}$ est unique.

Corollaire 1.16 *(principe de récurrence).* Soit $S \subset \mathbb{N}$. On suppose que
- on a $0 \in S$,
- pour tout $n \in S$, on a $n^+ \coloneqq n \cup \{n\} \in S$.

Alors $S = \mathbb{N}$.

Preuve L'ensemble S vérifie $\emptyset \in S$ et $n^+ \in S$ pour tout $n \in S$ avec $S \subset \mathbb{N}$, donc $S = \mathbb{N}$. $\square$

Théorème 1.17 *(récurrence).* Soit P une propriété dépendant d'un paramètre entier n. On suppose que
- la propriété $\mathrm{P}(0)$ soit vrai,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n^+)$.

Alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve On applique le corollaire précédent à $S \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{P}(n)\}$. $\square$

Théorème 1.18 *(récurrence forte).* Soit P une propriété dépendant d'un paramètre entier n. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\forall m \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(m)) \Rightarrow \mathrm{P}(n^+).$$

Alors $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve On le démontre par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Q}(n)$ la propriété

$$\forall m \in n, \quad \mathrm{P}(m).$$

La propriété $\mathrm{Q}(0)$ est vraie car $0 = \emptyset$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathrm{Q}(n)$. Montrons $\mathrm{Q}(n^+)$. Pour tout $m \in n$, la propriété $\mathrm{P}(m)$ est vraie, donc $\mathrm{P}(n)$ est vraie. Ainsi pour tout $m \in n^+ = n \cup \{n\}$, la propriété $\mathrm{P}(m)$ est vrai, *i. e.* la propriété $\mathrm{Q}(n^+)$ est vraie. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathrm{Q}(n)$ est vraie. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie. $\square$

Théorème 1.19. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \notin n$ et, pour tout $m \in n$, on a $n \not\subset m$.
2. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in n$, on a $m \subset n$.
3. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, si $m \subset n$, alors $m = n$ ou $m \in n$.

Preuve 1. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est trivial. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n \notin n$ et, pour tout $m \in n$, on ait $n \not\subset m$. Par l'absurde, supposons que $n^+ \in n^+$. Alors $n^+ \in n$ ou $n^+ = n$. Or $n \in n^+$ et $n \notin n$, donc $n^+ = n$ est faux, donc $n^+ \in n$, donc il existe $m \in n$ tel que $m = n^+$, donc il existe $m \in n$ tel que $n \subset m$ ce qui est impossible d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $n^+ \notin n^+$.

Soit $m \in n^+$. Montrons que $n^+ \not\subset m$. Si $m \in n$, alors $n \not\subset m$, donc $n^+ \not\subset m$. Si $m = n$, alors $m \not\subset m$. Dans tous les cas, on a $n \not\subset m$. D'où la propriété pour n^+.

2. De même, on procède par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est évident. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $m \in n$, on a $m \subset n$. Soit $m \in n^+$. Si $m \in n$, alors $m \subset n \subset n^+$ par hypothèse de récurrence. Si $m = n$, alors $n \subset n^+$ par hypothèse de récurrence. D'où la propriété pour n^+.

3. De même, on procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, il est évident que

$$m \subset \emptyset \Rightarrow (m = \emptyset \vee m \in \emptyset)$$

est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai pour n. On veut montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad m \subset n^+ \Rightarrow (m = n^+ \vee m \in n^+). \tag{$*$}$$

Montrons cela par récurrence sur m. Pour $m = 0$, par hypothèse de récurrence, on a $m \in n \subset m^+$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai pour m. On suppose que $m^+ \subset n^+$. Alors $m \cup \{m\} \subset n^+$, donc $m \subset n^+$, donc $m = n^+$ ou $m \in n^+$ par hypothèse de récurrence. Montrons que ce premier cas ne se produit pas. Si $m = n^+$, alors $m \in n^+ = m$ ce qui est absurde. Donc $m \in n^+$ et donc $m^+ = m \cup \{m\} \subset n^+$. Ainsi, par récurrence sur m, on a montré $(*)$. Le résultat est donc démontré. $\square$

Théorème 1.20. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Alors une et une seule de ces affirmations est vraie :

$$m \in n, \quad m = n, \quad n \in m.$$

Preuve On sait que deux de ses affirmations ne peuvent être vraies en même temps. Il suffit de montrer qu'on a une de ces affirmations. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on montre le résultat par une récurrence immédiate sur m. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $m \in n$ ou $m = n$ ou $n \in m$. Montrons-le pour n^+. Soit $m \in \mathbb{N}$.

– Si $m \in n$, alors $m \in n^+$.
– Si $m = n$, alors $m \in n^+$.
– Si $n \in m$, alors $n \subset m$, donc $n^+ \subset m$. De plus, si $n^+ = m$, on est dans le deuxième cas ; sinon $n^+ \in (n^+)^+ \subset m$, donc $n^+ = m$ ou $n^+ \in m$ d'après la proposition 3 du théorème précédente.

D'où la propriété pour n^+. □

Théorème 1.21. L'ensemble $(\mathbb{N}, \in)$ est strictement ordonné. La relation d'ordre large associée est $\subsetneq$.

Théorème 1.22. Soient X un ensemble non vide et $f \colon X \to X$ une application. Soit $u_0 \in X$. Alors il existe une unique application $u \colon \mathbb{N} \to X$ telle que

$$u(0) = u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n^+) = f(u(n)).$$

Preuve On pose

$$\mathscr{C} \coloneqq \left\{\Gamma \subseteq \mathbb{N} \times X \;\middle|\; (0, u_0) \in \Gamma \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, (n, x) \in \Gamma \Rightarrow (n^+, f(x)) \in \Gamma\right)\right\}.$$

Il est non vide car $\mathbb{N} \times X \in \mathscr{C}$. On pose

$$G \coloneqq \bigcap_{\Gamma \in \mathscr{C}} \Gamma.$$

Montrons que G est le graphe de l'application u recherchée. Montrons d'abord que G est bien un graphe. On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x \in X$ tel que $(n, x) \in G$. Soit

$$S \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid \exists! x \in X, (n, x) \in G\}.$$

Montrons que $S = \mathbb{N}$ en appliquant le principe de récurrence. On a $0 \in S$ car $(0, u_0) \in G$ et, s'il existait $x \in X$ tel que $x \neq u_0$ et $(0, x) \in G$, alors $\Gamma \coloneqq G \setminus \{(0, x)\} \in \mathscr{C}$, donc $G \subset \Gamma$ ce qui est absurde, ainsi $(0, u_0)$ est bien le seul élément de G de la forme $(0, x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n \in S$, *i. e.* il existe un unique $x \in X$ tel que $(n, x) \in G$. Alors $(n^+, f(x)) \in G$ et, si $(n^+, y) \in G$ avec $f(x) = y$, alors $\Gamma \coloneqq G \setminus \{(n^+, y)\}$ contredit la minimalité de G. Donc $n^+ \in S$. Par le principe de récurrence, on a montré que $S = \mathbb{N}$ ce qui permet de conclure que G est bien un graphe.

Cette application u dont G est le graphe vérifie bien les propriétés voulues. Montrons l'unicité. Soient u et v deux applications vérifiant la propriété. On montre ensuite que $u(n) = v(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence. On peut également montrer $u = v$ comme suivant. Le graphe de v est dans $\mathscr{C}$, donc il contient G, donc les deux graphes sont égaux, donc $u = v$. □

Définition 1.23 *(somme sur $\mathbb{N}$)*. On définit sur $\mathbb{N}$ l'opération $+$ par récurrence :
– pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n + 0 = n$;
– pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \neq 0$ qu'on écrit $m = a^+$, on a $n + m = (n + a)^+$.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'application « $n + \cdot$ » par le théorème précédent. En prenant $u_0 \coloneqq n$ et

$$f \colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \\ k \longmapsto k^+, \end{array} \right.$$

il existe une unique application $n + \cdot \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(n + \cdot)(k^+) = f((n + \cdot)(k))$. □

Proposition 1.24. L'opération $+$ est associative. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $k \mapsto n + k$ est injective.

▷ Exemple. On a $1 + 1 = 1^+ = 2$.

1.2.2 L'ensemble des entiers relatifs

Définition 1.25. On définit l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ comme le quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par la relation d'équivalence définie par

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \iff \quad a + b' = a' + b.$$

Moralement, le couple (a, b) représente $a - b$. On peut munir $\mathbb{Z}$ d'une structure d'anneau commutatif unitaire.

Définition 1.26 *(produit sur $\mathbb{N}$).* On définit sur $\mathbb{N}$ l'opération $\times$ par récurrence :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \times 0 = 0$;
- pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $n \times m^+ = n \times m + m$.

Proposition 1.27. 1. Pour tout $n \neq 0$, l'application $m \longmapsto n \times m$ est injective.
2. L'opération $\times$ est définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, commutative, associative et admet 1 comme élément neutre. Elle est distributive sur $+$.

Preuve Pour montrer la commutativité, on veut montrer que $m \times n = n \times m$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. On fait une récurrence sur n. Pour $n = 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $m \times 0 = 0$ par définition et $0 \times m = 0$ par récurrence sur m. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $m \times n = n \times m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par récurrence sur m, on montrer que $n^+ \times m = m \times n^+$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On a déjà traité le cas $m = 0$. Si c'est vrai pour un $m \in \mathbb{N}$, on a

$$n^+ \times m^+ = n^+ \times m + n^+ = m \times n^+ + n^+ = m \times n + m + n^+ = m \times n + m + n + 1$$

qu'on trouve égal $m^+ \times n$ de même. □

Définition 1.28 *(produit sur $\mathbb{Z}$).* Pour tous $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ et $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\overline{(a,b)} \times \overline{(c,d)} \coloneqq \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

Cela est bien défini.

◇ Remarque. Pour tout $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{(a,b)} = \overline{(n,0)}$ ou $\overline{(a,b)} = \overline{(0,n)}$.

Preuve de la cohérence Pour tous $a, b, c, d, c', d' \in \mathbb{N}$, si $(c,d) \sim (c',d')$, alors $(ac, ad) \sim (ac', ad')$. Ainsi, le produit $\overline{(a,0)} \times \overline{(c,d)}$ ne dépend pas du représentant choisi pour la classe de (c,d). Idem pour $\overline{(0,a)} \times \overline{(c,d)}$. En particulier, il suffit de vérifier que l'expression donnée par $\overline{(a,b)} \times \overline{(c,0)}$ ne dépend pas du représentant choisi pour la classe de (a,b) car, si $(a,b) \sim (a',b')$, alors $(ac, bc) \sim (a'c, b'c)$. Si on considère

$$i : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \\ a \longmapsto \overline{(a,0)}, \end{array} \right.$$

alors $i(a + a') = i(a) + i(a')$ et $i(aa') = i(a)i(a')$ pour tout $a, a' \in \mathbb{N}$. □

Théorème 1.29. Le triplet $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire intègre.

Preuve Le classe $\overline{(0,0)}$ est neutre pour l'addition et, pour tout $a \in \mathbb{N}$, l'opposé de $\overline{(a,0)}$ est $\overline{(0,a)}$. On vérifie ensuite le reste des axiomes. L'intégrité vient de l'injectivité de l'application $k \mapsto n \times k$ pour tout $n \neq 0$. □

◇ Remarque. Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, on peut alors noter $\overline{(a,b)} = -\overline{(b,a)}$.

Prolongement de l'ordre. Pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$, on note $\overline{(a,b)} > \overline{(a',b')}$ si $a + b' > a' + b$.

1.2.3 L'ensemble de rationnels

On définit l'ensemble $\mathbb{Q}$ comme le quotient de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ par la relation $\sim$ définie par

$$(a,b) \sim (a',b') \iff ab' = a'b.$$

On définit $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Q}$ comment attendus. Un élément $\overline{(a,b)}$ de $\mathbb{Q}$ est noté a/b.

Théorème 1.30. Le triplet $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.

◇ Remarques. – Cette construction se généralise. Soit A un anneau intègre. On définit le relation $\sim$ sur $A \times A$ par

$$(a,b) \sim (a',b') \iff ab' = a'b.$$

On note alors $\operatorname{Frac} A \coloneqq (A \times (A \setminus \{0\}))/\sim$. C'est un corps et l'application

$$\left| \begin{array}{l} A \longrightarrow \operatorname{Frac} A, \\ a \longmapsto \overline{(a,1)} \end{array} \right.$$

est un morphisme d'anneaux injectif.

– Soient A un anneau commutatif unitaire et $S \subset A$ stable par multiplication telle que $0 \notin S$. On définit la relation $\sim$ sur $A \times S$ par

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \exists b \in A \setminus \{0\}\,,\ b(as' - a's) = 0.$$

On pose alors $A_S = (A \times S)/\sim$ et les éléments de A_S sont notés $a/s \coloneqq \overline{(a,s)}$ avec $a \in A$ et $s \in S$.

– Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A, *i. e.* un idéal de A vérifiant
$$\forall a, b \in I, \quad ab \in I \quad \Longrightarrow \quad (a \in I \text{ ou } b \in I).$$
On pose $A_{\mathfrak{P}} := A_{A \setminus \mathfrak{P}}$. Par exemple, pour tout premier p, en notant $\mathfrak{P} := p\mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbb{Z}_{\mathfrak{P}} = \{a/s \mid a \in A, p \mid s\}$ se surjecte dans $\mathbb{Q}$.

PROPOSITION 1.31 *(propriété universelle).* Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires et $S \subset A$ stable par multiplication telle que $0 \notin S$. Alors, pour tout morphisme d'anneaux $\varphi\colon A \to B$ telle que $\varphi(s)$ est inversible pour tout $s \in S$, il existe un uniquement morphisme $\tilde{\varphi}\colon A_S \to B$ tel que
$$\forall a \in A, \quad \varphi(a) = \tilde{\varphi}(\overline{(a,1)}).$$

1.2.4 L'ensemble des réels

Comme l'ordre sur $\mathbb{Q}$ est total, l'application
$$d\colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \\ (a,b) \longmapsto |b-a| := \max\{b-a, a-b\} \end{array} \right.$$
est une distance sur $\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 1.32. Il existe un corps $\mathbb{R}$ muni d'une distance $d_{\mathbb{R}}$ et une isométrie $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ compatible aux opérations telle que l'image de $\mathbb{Q}$ soit dense.

1.3 Ordinaux

1.3.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 1.33. Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné. On dit que X est bien ordonné si toute partie non vide de X admet un plus petit éléments.

PROPRIÉTÉ 1.34. L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien ordonné.

Preuve Soit $S \subseteq \mathbb{N}$ n'admettant pas de plus petit élément. Soit $X := \mathbb{N} \setminus S$. Montrons que $X = \mathbb{N}$. On a $0 \in X$ car $0 \notin S$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $k \in X$ pour tout $k < n$. Alors $n \in X$ car sinon n serait un plus petit élément de S. Par récurrence, on a montré que $X = \mathbb{N}$, donc $S = \emptyset$. □

DÉFINITION 1.35. On dit qu'un ensemble α est un ordinal si la relation $\in$ est un bon ordre sur α et, pour tout $\beta \in \alpha$, on a $\beta \subset \alpha$.

◇ REMARQUE. L'ensemble $\mathbb{N}$ est un ordinal, noté ω. Plus généralement, tout $n \in \mathbb{N}$ est un ordinal.

PROPOSITION 1.36. Soient α un ordinal et $\beta \in \alpha$. Alors β est un ordinal.

Preuve On a $\beta \in \alpha$, donc $\beta \subset \alpha$. Ainsi, l'ordre donné par $\in$ sur β est induit par l'ordre sur α. Soit $S \subset \beta$ tel que $S \neq \emptyset$. Alors $S \subset \alpha$, donc S admet un plus petit élément pour $\in$. Donc β est bien ordonné. Soit $\gamma \in \beta$. Montrons que $\gamma \subset \beta$. Soit $x \in \gamma$. Comme $x, \gamma, \beta \in \alpha$, on a $x \in \gamma \in \beta$, donc $x \in \beta$ par transitivité. D'où $\gamma \subset \beta$. □

PROPOSITION 1.37. Soit α un ordinal. Alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal.

Preuve Soit $\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$. Soit $S \subset \alpha^+$ non vide. Si $S = \{\alpha\}$, alors S a un unique élément et donc il admet un plus petit élément. Sinon, on suppose que $S \cap \alpha \neq \emptyset$. Soit β le plus petit élément de $S \cap \alpha$. Alors $\beta \in \alpha$, donc $\beta \in \alpha^+$ et, pour tout $\gamma \in S$, on a $\beta \in \gamma$ et $\gamma \neq \beta$, donc S admet un plus petit élément. Soit $\beta \in \alpha^+$. Si $\beta \in \alpha$, alors $\beta \subset \alpha \subset \alpha^+$. Si $\beta = \alpha$, alors $\beta \subset \alpha^+$. □

◇ REMARQUE. L'ensemble $\omega^+ := \omega \cup \{\omega\}$ est un ordinal.

DÉFINITION 1.38. Soit α un ordinal. On dit que α est successeur s'il existe un ordinal β tel que $\alpha = \beta^+$. Dans le cas contraire, on dit que α est limite.

PROPOSITION 1.39. Soit α un ordinal. Alors α est limite si et seulement si, pour tout $\beta \in \alpha$, il existe $\gamma \in \alpha$ tel que $\beta \in \gamma$.

Preuve On suppose que α est successeur, *i. e.* il existe un ordinal β tel que $\alpha = \beta^+$. Alors $\beta \in \alpha$ et, si $\gamma \in \alpha$, alors $\gamma = \beta$ ou $\gamma \in \beta$, donc $\beta \notin \gamma$.

On suppose que α est limite. Soit $\beta \in \alpha$. On $\beta^+ = \beta \cup \{\beta\} \in \alpha$ (on a $\beta^+ \neq \alpha$ car α n'est pas limite), donc $\beta \in \beta^+ \in \alpha$. On prend alors $\gamma = \beta^+$. □

THÉORÈME 1.40. Soit P un propriété sur les ordinaux. On suppose que, pour tout ordinal α, on a

$$[\forall \beta < \alpha,\ \mathrm{P}(\beta)] \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}(\alpha).$$

Alors $\mathrm{P}(\alpha)$ est vraie pour tout ordinal α.

Preuve Soit α un ordinal. Si $\mathrm{P}(\beta)$ est vraie pour tout $\beta < \alpha$, alors $\mathrm{P}(\alpha)$ est vraie. Sinon par l'absurde, on suppose qu'il existe $\beta < \alpha$ tel que $\neg\mathrm{P}(\beta)$ est vrai. Alors l'ensemble

$$\{\beta < \alpha \mid \neg\mathrm{P}(\beta)\} < \alpha$$

est non vide. Soit β_0 le plus petit élément de cette ensemble. Alors pour tout $\beta < \beta_0$, la propriété $\mathrm{P}(\beta)$ est vraie et, en particulier, la propriété $\mathrm{P}(\beta_0)$ est vraie ce qui est absurde. Donc on est dans le premier cas et la propriété $\mathrm{P}(\alpha)$ est vraie. □

Supposons qu'on ait une « fonction » G qui a tout ensemble associe un ensemble. On suppose que, pour tout ordinal α, on sait définir une fonction f_α sur α telle que

$$\forall \beta < \alpha, \quad f_\alpha(\beta) = G(f_{\alpha|\beta}).$$

Alors il existe une unique « fonction » f sur les ordinaux telle que

$$\forall \alpha, \quad f(\alpha) = G(f_\alpha).$$

Cette construction utilise l'axiome suivant.

AXIOME 1.41 *(de remplacement).* L'image d'un ensemble par une fonction est un ensemble.

APPLICATION. On donne l'exemple des opérations sur les cardinaux.

DÉFINITION 1.42 *(addition sur les ordinaux).* Pour un ordinal α, par induction transfinie, on définit

- $\alpha + 0 = \alpha$;
- pour tout ordinal β, on a $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$;
- pour tout ordinal limite β, on a $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$.

PROPOSITION 1.43. L'addition sur les ordinaux

1. admet 0 pour neutre et
2. est associative,
3. est strictement croissante pour le second argument.

Preuve 1. On veut montrer que $0 + \alpha = \alpha$ pour tout α. Montrons-le par induction transfinie sur α. C'est trivial pour $\alpha = 0$. Soit α un ordinal. Si $\alpha = \beta^+$ est successeur, alors $0 + \alpha = 0 + \beta^+ = (0 + \beta)^+ = \beta^+ = \alpha$. On suppose que α est limite. Alors

$$0 + \alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}(0 + \beta) = \bigcup_{\beta<\alpha}\beta = \alpha.$$

Montrons cette dernière égalité. Si $\beta < \alpha$, alors $\beta \subset \alpha$, donc

$$\bigcup_{\beta<\alpha}\beta \subset \alpha.$$

Réciproquement, soit $\gamma \in \alpha$. Comme α est limite, il existe $\beta < \alpha$ tel que $\gamma < \beta$, donc

$$\gamma \in \beta \subset \bigcup_{\beta'<\alpha}\beta'.$$

D'où

$$\alpha \subset \bigcup_{\beta<\alpha}\beta$$

ce qui montre l'égalité. Par induction transfinie, on a montré que 0 est le neutre pour l'addition sur les ordinaux.
2. Montrons l'associativité, *i. e.* pour tous α, β et γ, on a $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. On procède par induction transfinie sur γ. C'est vrai pour $\gamma = 0$. Si γ est successeur, alors

$$(\alpha + \beta) + \gamma^+ = ((\alpha + \beta) + \gamma)^+ = (\alpha + (\beta + \gamma))^+ = \alpha + (\beta + \gamma)^+ = \alpha + (\beta + \gamma^+).$$

Si γ est limite, alors

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= \bigcup_{\delta<\gamma}[(\alpha+\beta)+\delta] \\ &= \bigcup_{\delta<\gamma}[\alpha+(\beta+\delta)] \\ &= \bigcup_{\delta'<\beta+\gamma}(\alpha+\delta') \\ &= \alpha+(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

Montrons la troisième égalité, *i. e.*

$$\bigcup_{\delta<\gamma}[\alpha+(\beta+\delta)] = \bigcup_{\delta'<\beta+\gamma}(\alpha+\delta').$$

Soit $\delta<\gamma$. Alors

$$\alpha+(\beta+\delta) < \bigcup_{\delta'<\beta+\gamma}(\alpha+\delta').$$

Réciproquement, soit $\delta'<\beta+\gamma$. Montrons que

$$\alpha+\delta' < \bigcup_{\delta<\gamma}[\alpha+(\beta+\delta)].$$

Or il existe $\varepsilon<\gamma$ tel que $\delta'<\beta+\varepsilon$, donc $\alpha+\delta'<\alpha+(\beta+\varepsilon)$, donc

$$\alpha+\delta' < \bigcup_{\delta<\gamma}[\alpha+(\beta+\delta)].$$

Ce qui termine la preuve par récurrence transfinie.

3. Montrons que l'addition est strictement croissante pour le second argument. On veut montrer que, si $\beta'<\beta$, alors $\alpha+\beta'<\alpha+\beta$. On suppose d'abord que $\beta'=0$. Montrons que $\alpha<\alpha+\beta$ pour tout $\beta\neq 0$. On a $\alpha<\alpha^+=\alpha+1$. Pour tout $\delta<\beta$ tel que $\delta\neq 0$, on a $\alpha<\alpha+\delta$, donc $\alpha+\beta>\alpha$ car

- si $\beta=\delta^+$, alors $\alpha+\beta>\alpha+\delta>\alpha$;
- si β est limite, alors $\alpha+\beta>\alpha+\delta>\alpha$ avec $1<\delta<\beta$.

On revient au cas général et on montre le résultat par induction sur β'. C'est clair pour $\beta'=0$. On suppose que

$$\forall\beta''<\beta',\quad \beta>\beta'' \quad\Longrightarrow\quad \alpha+\beta''<\alpha+\beta.$$

Si $\beta'=(\beta'')^+$, alors $\alpha+\beta'=(\alpha+\beta'')^+<\alpha+\beta$ sinon on aurait $(\alpha+\beta'')^+=\alpha+\beta$ et donc $\beta=\beta'$. Si β est limite, alors

$$\alpha+\beta' = \bigcup_{\delta<\beta'}(\alpha+\delta) < \alpha+\beta.$$

Cette dernire inégalité n'est pas une égalité car sinon β serait limite et $\beta'=\beta$. Ce qui montre le cas général. ☐

◇ Remarque. L'addition n'est pas commutative. Par exemple, on a $\omega+1>\omega$ et

$$1+\omega = \bigcup_{n<\omega}(1+n) = \omega \neq \omega+1.$$

Définition 1.44 *(multiplication des ordinaux).* Pour un ordinal α, par induction transfinie, on définit

- $\alpha\cdot 0 = 0$;
- pour tout ordinal β, on a $\alpha\cdot\beta^+=\alpha\cdot\beta+\alpha$;
- pour tout ordinal limite β, on a $\alpha\cdot\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\alpha\cdot\gamma$.

Proposition 1.45. La multiplication sur les ordinaux

1. est associative,
2. admet 1 pour neutre,
3. est strictement croissante pour le second argument et
4. est distributive sur $+$.

▷ Exemple. On a $\omega\cdot 2=\omega+\omega$ et $2\cdot\omega=\omega$.

DÉFINITION 1.46 *(exponentiation des ordinaux).* Pour un ordinal α, par induction transfinie, on définit
- $\alpha^0 = \alpha$;
- pour tout ordinal β, on a $\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \cdot \alpha$;
- pour tout ordinal limite β, on a $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$.

PROPOSITION 1.47. 1. Pour tout α, on a $\alpha^1 = \alpha$.
2. L'exponentiation est strictement croissante pour le second argument.
3. Pour tout α, β et γ, on a
$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\delta \quad \text{et} \quad (\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta\delta}.$$

▷ EXEMPLE. On a $\omega^2 = \omega \cdot \omega$.

1.3.2 Théorème de GOODSTEIN

NOTATION HÉRÉDITAIRE. La notation héréditaire en base b d'un entier n est une écriture de n qui fait intervenir des sommes, produits et puissances. On écrit n en base b sous la forme
$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k$$
où les exposants appartiennent à $[\![0, b-1]\!]$ et où on écrit tous les exposants en notation héréditaires en base b.

▷ EXEMPLE. En base 2, la notation héréditaire de 100 est
$$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 2^{2^2+2} + 2^{2^2+1} + 2^2.$$

DÉFINITION 1.48. La suite de GOODSTEIN d'un entier $m \in \mathbb{N}^*$ est la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $g_1 = m$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'entier g_{k+1} est 0 si $g_k = 0$ ou sinon est défini de la manière suivante :
- on écrit g_k en notation héréditaire en base $k+1$,
- on remplace $k+1$ par $k+2$ dans cette notation,
- on retranche 1.

▷ EXEMPLE. Pour $m = 2$, on a
$$\begin{aligned} g_1 &= 2 = 0 + 1 \times 2, \\ g_2 &= 0 + 1 \times 3 - 1 = 2 = 2 + 0 \times 3, \\ g_3 &= 2 + 0 \times 4 - 1 = 1 = 1 + 0 \times 4, \\ g_4 &= 1 + 0 \times 5 - 1 = 0, \\ g_5 &= g_6 = \cdots = 0. \end{aligned}$$

THÉORÈME 1.49 *(GOODSTEIN).* Toute suite de GOODSTEIN s'arrête, *i. e.* est stationnaire égale à 0.

Preuve Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $g_k \neq 0$. On écrit g_k est notation héréditaire en base $k+1$. On pose f_{k+1} l'ordinal obtenu en remplaçant $k+1$ par ω dans cette écriture. Alors la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. En effet, soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'écriture héréditaire en base $k+1$ de g_k est
$$g_k = a_0 + (k+1)a_1 + \cdots .$$
On suppose que $a_0 \neq 0$. Alors
$$f_{k+1} = a_0 + \omega a_1 + \cdots, \quad g_{k+1} = (a_0 - 1) + (k+2)a_1 + \cdots \quad \text{et} \quad f_{k+2} = (a_0 - 1) + \omega a_1 + \cdots,$$
donc $f_{k+2} < f_{k+1}$. On suppose que $a_0 = 0$ et $a_1 \geqslant 1$. Alors
$$f_{k+1} = \omega a_1 + \omega^2 a_2 + \cdots .$$
Or pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, on a
$$b^r a_r + \cdots + b a_1 - 1 = b^r(a_r - 1) + b^{r-1}(a_{r-1} + 1) + \cdots + b(a_1 - 1) + (b - 1).$$
Plus généralement, soit $s \coloneqq \min\{k \mid a_k \neq 0\}$. Pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, on a
$$b^r a_r + \cdots + b^s a_s - 1 = b^r a_r + \cdots + b^s(a_s - 1) + b^{s-1}(b - 1) + \cdots + (b - 1).$$
Si $g_k = a_s(k+1)^s + \cdots + a_r(k+1)^r$, alors
$$g_{k+1} = (k+1) + (k+2)(k+1) + \cdots + (k+2)^{s-1}(k+1) + (k+2)^s(a_s - 1) + \cdots,$$
donc
$$f_{k+2} = (k+1) + \omega(k+1) + \cdots + \omega^{s-1}(k+1) + \omega^s(a_s - 1) + \cdots$$

et
$$f_{k+1} = \omega^s a_s + \cdots > f_{k+2}.$$
Ce qui montre la décroissance de la suite. La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite strictement décroissante d'ordinaux.

Par l'absurde, supposons que cette suite soit infinie. L'ensemble $S := \{f_k < f_2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ est une partie de f_2, donc il admet un plus petit élément, noté f_{k_0}. Alors $f_{k_0+1} < f_{k_0}$, donc $f_{k_0+1} \in S$ ce qui est impossible. Donc la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est finie ce qui permet de conclure. □

1.4 Ensembles produits

1.4.1 Ensemble produit

Définition 1.50. Soient a et b deux ensembles. Le couple (a, b) est l'ensemble $\{a, \{a, b\}\}$.

Propriété 1.51. Soient a, b, c et d quatre ensembles. Alors $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

Définition 1.52. Soient A et B deux ensembles. On pose
$$A \times B := \{x \in \mathscr{P}(A \cup B) \mid \exists a \in A, \exists b \in B, x = (a, b)\}.$$

Plus généralement, si I est un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensemble, on pose
$$\prod_{i\in I} A_i := \Big\{f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \;\Big|\; \forall i \in I, f(i) \in A\Big\}.$$
Si I est infini, rien dans les axiomes précédemment cités ne permet de montrer que cet ensemble n'est pas vide.

1.4.2 Axiome du choix

Axiome 1.53 *(AC)*. Un produit non vide d'ensembles non vides est non vide.

Proposition 1.54. L'axiome du choix est équivalent à, pour tout application surjective $f\colon A \to B$, il existe une section $g\colon B \to A$ de f, *i. e.* une application $g\colon B \to A$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$

Preuve On suppose l'axiome du choix (AC). Soit $f\colon A \to B$ surjective. Le produit $\prod_{b\in B} f^{-1}(\{b\})$ est non vide, donc il existe une application $g\colon B \to A$ telle que
$$\forall b \in B, \quad g(b) \in f^{-1}(\{b\}), \quad \textit{i. e.} \quad f \circ g(b) = b.$$

Réciproquement, on suppose que toute surjection admet une section. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensemble. On note
$$X := \bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i.$$
On considère l'application
$$f\colon \left|\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & I, \\ (i, a) & \longmapsto & i. \end{array}\right.$$
Elle est surjective, donc elle admet une section, *i. e.* il existe une application $g\colon I \to X$ telle que
$$\forall i \in I, \exists a \in A_i, \quad g(i) = (i, a).$$
En composant par la projection sur la deuxième composante, on obtient une application $\tilde{g}\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ telle que
$$\forall i \in I, \quad \tilde{g}(i) \in A_i, \quad \text{donc} \quad \tilde{g} \in \prod_{i\in I} A_i.$$
D'où l'axiome du choix (AC). □

1.4.3 Variantes

(i) Axiome du choix dénombrable

Axiome 1.55 *(AC_ω)*. Tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide.

◇ Remarque. On a clairement (AC) $\Rightarrow$ (AC_ω). La réciproque est fausse.

Voici un exemple de propriété qui requiert (AC_ω).

Lemme 1.56. Soient X un espace métrique et $A \subset X$. Alors $x \in X$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $x_n \to x$.

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A telle que $x_n \to x$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathrm{B}(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$. En particulier, pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$. D'où $x \in \overline{A}$.

Réciproquement, soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{B}(x,1/2^n)\cap A \neq \emptyset$, donc on considère $x_n \in \mathrm{B}(x,1/2^n)\cap A$ par (AC_ω). Plus précisément, soit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}(x,1/2^n).$$

Ainsi, on a construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $x_n \to x$. □

Proposition 1.57. Le lemme 1.56 implique (AC_ω).

Preuve Soit $x \in X$. On a

$$X = \{x\} \cup \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [\{n\}\times A_n] \quad \text{avec} \quad A_n := \mathrm{B}(x,1/2^n).$$

Si $a \in \{n\}\times A_n$ et $b \in \{m\}\times A_m$, on note

$$d(a,b) := \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \quad \text{et} \quad d(x,a) = \frac{1}{n+1}.$$

On a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\{n\}\times A_n]$ et $x \in \overline{A}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Si $n+1 \geqslant 1/\varepsilon$, alors $\{n\}\times A_n \subset \mathrm{B}(x,\varepsilon)$. Par le lemme, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $d(x,x_n) \to 0$. Or il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tendant vers $+\infty$ telle que $x_n \in A_{k_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

(ii) Axiome du choix dépendant

Axiome 1.58 *(ACD)*. Si X est un ensemble muni d'une relation $\mathscr{R}$ telle que

$$\forall x \in X,\ \exists y \in X, \quad x \mathrel{\mathscr{R}} y, \tag{ACD.1}$$

alors

$$\forall x_0 \in X,\ \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \mathrel{\mathscr{R}} x_{n+1}. \tag{ACD.2}$$

Proposition 1.59. On a (AC) ⇒ (ACD) ⇒ (AC_ω).

Preuve On suppose (AC). Soit X un tel ensemble. Pour $x \in X$, on note $E_x := \{y \in X \mid x \mathrel{\mathscr{R}} y\} \neq \emptyset$. Un élément

$$f \in \prod_{x\in X} E_x \neq \emptyset$$

est une fonction $f\colon X \to X$ telle que $f(x) \in E_x$ pour tout $x \in X$. Si on fixe $x_0 \in X$, par le théorème 1.22, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad \textit{i. e.} \quad x_n \mathrel{\mathscr{R}} x_{n+1}.$$

D'où (ACD).

On suppose (ACD). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles non vides. On note

$$X := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\times A_n.$$

On définit la relation $\mathscr{R}$ sur X par

$$(m,x) \mathrel{\mathscr{R}} (m,y) \iff m = n+1.$$

Par hypothèse, la relation $\mathscr{R}$ est totale. Soit $(0,x_0) \in X$. D'après (ACD), il existe une suite $(k_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (k_n,x_n) \mathrel{\mathscr{R}} (k_{n+1},x_{n+1}).$$

Par une récurrence immédiate, on montre que $k_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *i. e.* un élément de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

Théorème 1.60 *(Baire)*. Soient (X,d) un espace métrique complet et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense.

Preuve Soit $U \subset X$ un ouvert non vide. Il suffit de montrer que $U \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. La partie $U \cap U_0$ est un ouvert non vide, donc il existe $x_0 \in X$ et $r_0 < 1$ tel que $B_0 := \mathrm{B}(x_0, r_0) \subset U \cap U_0$. Comme B_0 est un ouvert non vide, on a $B_0 \cap U_1 \neq \emptyset$, donc il existe $x_1 \in X$ et $r_1 < 1/2$ tel que $B_1 := \mathrm{B}(x_1, r_1) \subset B_0 \cap U_1$. On construit ainsi par récurrence une suite $(B_n := \mathrm{B}(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n < 1/2^n \quad \text{et} \quad B_n \subset B_{n-1} \cap U_n.$$

On vérifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge vers un certain $x \in X$ qui est, par construction, dans tous les ouverts U_n, donc $x \in U \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ce qui montre que $U \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$. ☐

Ici, on a utilisé (ACD) pour construire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut rédiger cela autrement. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble

$$S := \Big\{(x, r, n) \in X \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N} \;\Big|\; \mathrm{B}(x, r) \subset U \cap \bigcup_{k\leqslant n} U_k\Big\}.$$

définie par

$$(x, r, n) \mathrel{\mathscr{R}} (x', r', n') \iff \begin{cases} m = n + 1, \\ r' < r/2, \\ \mathrm{B}(x', r') \subset \mathrm{B}(x, r) \end{cases}.$$

Cette relation vérifient bien (ACD.1) de sorte que, pour tout $(x, r, n) \in S$, il existe $(x', r', m) \in S$ tel que

$$(x, r, n) \mathrel{\mathscr{R}} (x', r', m)$$

de sorte que $\mathrm{B}(x', r') \subset \mathrm{B}(x, r) \subset U_{n+1}$. Si on fixe $x_0 \in X$ et $r_0 > 0$ tels que $(x_0, r_0, 0) \in S$, , alors on construit une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par (ACD).

Proposition 1.61. Le théorème de Baire implique (ACD).

Preuve On suppose le théorème de Baire. Soit $(X, \mathscr{R})$ un ensemble muni d'une relation totale. Soit $x_0 \in X$. On veut montrer (ACD.2). On muni l'ensemble $X^{\mathbb{N}} := \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid f(0) = x_0\}$ de la distance définie par

$$d(f, g) := \exp(-\inf\{k \in \mathbb{N} \mid g(k) \neq f(k)\})$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. On montre que (X, d) est un espace métrique complet. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n := \bigcup_{m>n} \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid f(n) \mathrel{\mathscr{R}} f(m)\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que U_n est ouvert et dense. Soit $f \in U_n$. On fixe $m > n$ tel que $f(n) \mathscr{R} f(m)$. Alors la boule $\mathrm{B}(f, e^{-(m+1)})$ contient des fonctions qui coïncident avec f jusqu'au rang $m+1$. Donc pour tout $g \in \mathrm{B}(f, e^{-(m+1)})$, on a $f(n) = g(n) \mathrel{\mathscr{R}} g(m) = f(m)$, donc $g \in U_n$. Finalement, on a a $\mathrm{B}(f, e^{-(m+1)}) \subset U_n$ et U_n est un ouvert.

Montrons qu'il est dense. Soient $f \in X^{\mathbb{N}}$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que $\mathrm{B}(f, \varepsilon) \cap U_n \neq \emptyset$. Soit $m > \max\{\ln \varepsilon + 1, n\}$. Comme la relation est totale, on sait qu'il existe $x \in X$ tel que $f(n) \mathrel{\mathscr{R}} x$. On définit $g \in X^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } k \neq m, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, la fonction g coïncide avec f sur les m premiers entiers, donc $d(f, g) < \varepsilon$ et il existe $m > n$ tel que $g(m) \mathscr{R} g(m)$. Par conséquent, on a $g \in U_n \cap \mathrm{B}(f, \varepsilon)$. Donc U_n est dense. Par le théorème de Baire, il existe $f \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. On a $f(0) = x_0$. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que

$$x_n = f(k_n) \quad \text{avec} \quad k_n = \min\{k > k_{n-1} \mid x_{n-1} \mathrel{\mathscr{R}} f(k)\}.$$

On a donc montré la proposition (ACD.2). ☐

Proposition 1.62. Tout ensemble infini admet un sous-ensemble dénombrable.

Preuve Soit X un ensemble infini. Sur l'ensemble

$$\{(n, f) \in \mathbb{N} \times X^{[\![1,n]\!]} \mid f \text{ est injective}\},$$

on définit la relation $\mathscr{R}$ telle que

$$(n, f) \mathrel{\mathscr{R}} (m, g) \iff \begin{cases} m = n + 1, \\ g_{|[\![1,n]\!]} = f. \end{cases}$$

Par (ACD), il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n soit de $[\![1, n]\!]$ dans X et telle que, si $m > n$, alors $f_{m|[\![1,m]\!]} = f_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f(n) = f_n(n)$. Si $m > n$, alors $f_m(n) = f_n(n) \neq f_m(m)$. Donc la fonction $f \colon \mathbb{N} \to X$ est injective. ☐

1.4.4 Question et lemme de Zorn

Question. Quelles sont les applications $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \ ?$$

Cette condition est en fait la $\mathbb{Q}$-linéarité. Alors si on fixe une base de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, on peut imposer la valeur de f sur chaque vecteur de base. Avec l'axiome du choix, on peut fixer une telle base.

Définition 1.63. Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné. On dit que X est inductif si, pour toute partie totalement ordonnée de X, il existe un majorant de cette partie dans X.

Lemme 1.64 *(Zorn)*. Soit X un ensemble inductif. Alors X admet un élément maximal.

▷ Exemple. On se propose de démontrer le théorème de la base incomplète :

Soient E un espace vectoriel, L une famille libre et G une famille génératrice telles que $L \subset G$. Alors il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Preuve On pose

$$X \coloneqq \{L' \in \mathscr{P}(E) \mid L' \text{ libre et } L \subset L' \subset G\}.$$

Montrons que $(X, \subset)$ est inductif. Soit $(L_i)_{i \in I}$ une partie totalement ordonnée de X. On pose

$$L_\infty \coloneqq \bigcup_{i \in I} L_i.$$

Montrons que $L_\infty \in X$. Il vient que $L \subset L_\infty \subset G$. Il suffit de montrer que L_∞ est libre. Soient $x_1, \dots, x_n \in L_\infty$. Il existe $i \in I$ tel que $\forall j \in [\![1, n]\!], x_j \in L_i$. Comme L_i est libre, la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre. Finalement, la famille L_∞ est libre et $(L_i)_{i \in I}$ admet un majorant L_∞. Le lemme de Zorn affirme que $(X, \in)$ admet un élément maximale $B \in X$. Montrons que B est une base de E. Par l'absurde, supposons que B ne soit pas génératrice. Alors $G \not\subset \operatorname{Vect} B$. Soit $g \in G$ tel que $g \notin \operatorname{Vect} B$. Alors $B \cup \{g\}$ est libre ce qui contredit la maximalité de B. Donc B est une base de E vérifiant $L \subset B \subset G$. □

Proposition 1.65. L'axiome du choix implique le lemme de Zorn.

Preuve Soit X un ensemble inductif. Par l'absurde, supposons que X n'a pas d'élément maximal. Si $Y \subset X$ est totalement ordonnée, l'ensemble des majorants stricts de Y est non vide. Supposons l'axiome du choix. On peut construire une application m définie de l'ensemble des parties totalement ordonnées de X et à valeurs dans X qui à Y associe un majorant de Y.

Montrons que, si α est un ordinal, alors il existe $f_\alpha\colon \alpha \to X$ strictement croissante. Procédons par récurrence transfinie. C'est vrai pour $\alpha = \emptyset$ en prenant

$$f_\emptyset\colon \left|\begin{array}{l} \{\emptyset\} \longrightarrow X, \\ \quad \emptyset \longmapsto x_0 \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad x_0 \in X.$$

Soit α un ordinal. On suppose avoir construit $f_\beta\colon \beta \to X$ strictement croissante pour tout $\beta < \alpha$ de sorte que, pour tous $\beta' < \beta < \alpha$, on ait

$$f_{\beta|\beta} = f_{\beta'}.$$

La partie

$$Y \coloneqq \{f_\beta(\beta) \mid \beta < \alpha\} \subset X.$$

est totalement ordonnée, donc $m(Y) \in X$. Pour tout ordinal β, on pose alors

$$f_\alpha(\beta) = \begin{cases} m(Y) & \text{si } \beta = \alpha, \\ f_\beta(\beta) & \text{si } \beta < \alpha. \end{cases}$$

Alors l'application f_α est bien strictement croissante. D'où la propriété. En particulier, pour n'importe quel ordinal α, il existe une bijection strictement croissante de α vers une partie de X. Mais alors, les ordinaux formeraient un ensemble ce qui est impossible. Donc X admet un élément maximal, *i. e.* il est inductif. D'où le lemme de Zorn. □

Proposition 1.66. Le lemme de Zorn implique l'axiome du choix.

Preuve Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'ensembles non vides. On pose

$$X \coloneqq \left\{(J, f) \;\middle|\; J \subset I,\ f\colon J \to \bigcup_{i \in I} X_i,\ \forall j \in J, f(j) \in X_j\right\}.$$

Montrons que X est inductif pour l'ordre $\leqslant$ défini par

$$(J, f) \leqslant (J', f') \iff (J \subset J' \text{ et } f'_{|J} = f).$$

Soit $Y \subset X$ totalement ordonnée. On note $Y = \{(J_r, f_r) \mid r \in R\}$. Soit

$$J \coloneqq \bigcup_{r \in R} J_r.$$

Soit $j \in J$. On fixe $r \in R$ tel que $j \in J_r$. On pose $f(j) = f_r(j)$. Cette définition ne dépend pas du choix de r. En effet, on a $R' \coloneqq \{r \in R \mid j \in J_r\}$ et alors l'ensemble $\{f_r(j) \mid r \in R'\}$ est un singleton du fait que X soit totalement ordonnée, donc on note $f(j)$ sont uniquement élément. On vérifie ensemble que, pour tout $j \in J$, on a $f(j) \in X_j$. Ainsi $(J, f) \in X$ et

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad J_r \subset J \quad \text{et} \quad f_{J_r} = f_r, \quad \textit{i. e.} \quad (J_r, f_r) \leqslant (J, f).$$

Donc l'ensemble $(X, \leqslant)$ est inductif. Le lemme de Zorn affirme qu'il admet un élément maximal (J, f) de X.

Montrons que $J = I$. Par l'absurde, supposons que $J \neq I$. Soit $i \in I$ tel que $i \notin J$. Soit $x_i \in X_i$. On définit

$$\tilde{f} : \left| \begin{array}{rcl} J \cup \{i\} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{j \in J} X_j, \\ j & \longmapsto & \begin{cases} f(j) & \text{si } j \neq i, \\ x_i & \text{si } j = i. \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors $(J \cup \{i\}, \tilde{f}) > (J, f)$ et $(J \cup \{i\}, \tilde{f}) \in X$ ce qui contredit la maximalité de (J, f). Donc $J = I$ ce qui montre l'axiome du choix. $\square$

Théorème 1.67 *(Tarski)*. Soit A un ensemble. Alors A et $A \times A$ sont équipotents.

Proposition 1.68. L'axiome du choix est équivalent au théorème de Tarski.

Théorème 1.69 *(Zermelo)*. Tout ensemble peut-être muni d'un bon ordre.

Proposition 1.70. L'axiome du choix est équivalent au théorème de Zermelo.

Preuve Soit S un ensemble. On pose

$$X \coloneqq \{(T, r) \mid T \subset S \text{ et } r \text{ est une relation de bon ordre sur } T\}.$$

Définissons une notion utile à cette preuve.

Définition 1.71. Soit T un ensemble totalement ordonné. On dit que $T' \subset T$ est un segment initial de T si

$$\forall t' \in T', \ \forall t \in T, \quad t <_T t' \implies t \in T'$$

On montre alors que X est inductif pour l'ordre défini par

$$(T', r') < (T, r) \iff \begin{cases} T' \subset T, \\ r_{|T' \times T'} = r', \\ T' \text{ est un segment initial de } T \end{cases}$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Chapitre 2
DUALITÉ

Dans tout le chapitre, la lettre E désignera un K-espace vectoriel. En général, on prendra $K = \mathbb{R}$ et parfois les propriétés s'étendront à $K = \mathbb{C}$. On note E^* le dual algébrique, *i. e.* l'ensemble des formes K-linéaires. Pour $\ell \in E^*$ et $x \in E$, on notera $\langle \ell, x\rangle \coloneqq \ell(x)$. Si $(E, \|\ \|_E)$ est un espace vectoriel normé, une forme linéaire $\ell \in E^*$ est continue si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\langle \ell, x\rangle_{E,E'} \leqslant M \left\|x\right\|_E .$$

On note $E' \coloneqq \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, K)$ l'ensemble des formes linéaires continues, *i. e.* le dual topologique. Pour $\ell \in E'$, on pose

$$\left\|\ell\right\|_{E'} \coloneqq \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\langle \ell, x\rangle_{E,E'}}{\left\|x\right\|_E}.$$

2.1 DIMENSION FINIE

On suppose que E est de dimension finie. Alors $E' = E^*$ et $\dim E' = \dim E$. Soit $b \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\ell \in E'$. Soit $x \coloneqq \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Alors

$$\langle \ell, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \ell_i = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \ell_i \coloneqq \langle \ell, e_i\rangle \in E.$$

BASE DUALE. La base duale de b est la base $b^* \coloneqq (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la forme linéaire φ_i vérifie $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On peut montrer que les applications φ_i existent et sont uniques. Alors il existe un isomorphisme canonique en E et son dual. Ceci n'est pas nécessairement le cas en dimension infinie et le suite du cours est motive par la recherche d'un isomorphisme et notamment d'un isomorphisme entre E et son bidual.

2.2 DIMENSION INFINIE

▷ EXEMPLE. L'espace $E \coloneqq K[X]$ est de dimension finie, c'est l'ensemble des suites à support fini. Cet espace admet une base dénombrable. On peut le normer par les normes définie, pour $P \coloneqq \sum_{n=0}^N a_n X^n \in K[X]$, par

$$\left\|P\right\|_1 \coloneqq \sum_{n=0}^N \left|a_n\right|, \quad \left\|P\right\|_2 \coloneqq \Big(\sum_{n=0}^N \left|a_n\right|^2\Big)^{1/2} \quad \text{et} \quad N(P) \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} \left|P(x)\right|.$$

On peut montrer que ces normes sont équivalentes sur $K[X]$ (il suffit de prendre la suite $(1 + \dots + X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore les polynômes de TCHEBYCHEV). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi_n \in E^*$ telle que

$$\varphi_n\Big(\sum_{k=0}^\infty a_k X^k\Big) = a_n.$$

Alors $\varphi_n(X^k) = \delta_{k,n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in E^*$ telle que

$$\varphi_n\Big(\sum_{n=0}^\infty a_n X^n\Big) = \sum_{n=0}^\infty a_n.$$

Alors $\varphi \notin \mathrm{Vect}(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base de E^*. Ce problème est un problème spécifique à la dimension infinie. En effet, on peut généraliser le problème comme suivant.

Plus généralement, soit E un K-espace vectoriel de dimension infinie. L'axiome du choix nous autorise à prendre une base $b \coloneqq (e_i)_{i\in I}$ de E. Pour $x \in I$, soit $\varphi_i \in E^*$ telle que

$$\varphi_i\Big(\sum_{i\in I} x_i e_i\Big) = x_i.$$

Soit $\varphi \in E^*$ telle que

$$\varphi_i\Big(\sum_{i\in I} x_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} x_i.$$

De la même façon, on a $\varphi \notin \mathrm{Vect}(\varphi_i)_{i\in I}$. Il est difficile de trouver un isomorphisme entre E et E^{**}.

Proposition 2.1. On considère l'application

$$J : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E^{**}, \\ x \longmapsto Jx \end{array} \right.$$

telle que

$$\forall x \in E, \quad \langle Jx, \ell\rangle_{E^{**},E^*} \coloneqq \langle \ell, x\rangle_{E^*,E}.$$

Alors J est injective.

Preuve Soit $x \in E$ tel que $Jx = 0$. Alors $\langle \ell, x\rangle_{E^*,E} = 0$ pour tout $\ell \in E^*$. Si $x \neq 0$, on complète (x) en une base b de E et on note $\ell \in E^*$ la coordonnée sur x, donc $\langle \ell, x\rangle_{E^*,E} = 1$ ce qui est absurde. Cela montre que $x = 0$ et l'injectivité de J. □

Théorème 2.2. L'application J est surjective si et seulement si E est de dimension finie.

Définition 2.3. Soient $x \in E$ et $A \subset E$. On pose

$$x^\perp \coloneqq \{\ell \in E^* \mid \langle \ell, x\rangle = 0\} \quad \text{et} \quad A^\perp \coloneqq \{\ell \in E^* \mid \forall x \in A,\ \langle \ell, x\rangle = 0\} = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp,$$

appelés respectivement *orthogonal* de x et A. Soient $\ell \in E^*$ et $B \subset E^*$. On pose

$$\ell^+ \coloneqq \{x \in E \mid \langle \ell, x\rangle = 0\} = \mathrm{Ker}\,\ell$$

et

$$B^0 \coloneqq \{x \in E \mid \forall \ell \in B,\ \langle \ell, x\rangle = 0\} = \bigcap_{\ell\in B} \mathrm{Ker}\,\ell = (\mathrm{Vect}\, B)^0,$$

appelés respectivement *polaire* de ℓ et B.

Proposition 2.4. Soient A_1 et A_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $A_1 \subset A_2$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.
2. On a $A_1^\perp \cap A_2^\perp = (A_1 \cup A_2)^\perp = (\mathrm{Vect}(A_1 \cup A_2))^\perp = (A_1 + A_2)^\perp$.

Soient B_1 et B_2 deux sous-espaces vectoriels de E^*.

3. Si $B_1 \subset B_2$, alors $B_2^0 \subset B_1^0$.
4. On a $B_1^0 \cap B_2^0 = (B_1 + B_2)^0$.

Soit A un sous-espace vectoriel de E.

5. Alors $(A^\perp)^0 = A$.

Preuve Montrons le point 5 par double inclusion. Si $x \in A$, alors $\langle \ell, x\rangle = 0$ pour tout $\ell \in A^\perp$, alors $x \in (A^\perp)^0$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit B un supplémentaire de A dans E.

Montrons d'abord que $E^* = A^\perp \oplus B^\perp$. On a

$$A^\perp \cap B^\perp = (A+B)^\perp = E^\perp = \{0\}.$$

Soit $\ell \in E^*$. Il faut trouver $\ell_A \in A^\perp$ et $\ell_B \in B^\perp$ telles que $\ell = \ell_A + \ell_B$. Il suffit simplement de poser $\ell_A = \ell \circ p_A$ et $\ell_B = \ell \circ p_B$ où les applications p_A et p_B sont respectivement les projections sur A et B.

Soit $x \in (A^\perp)^0$. On écrit $x = a+b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Alors $a \in A \subset (A^\perp)^0$. De plus, on a $b = x - a \in (A^\perp)^0$ et $b \in B \subset (B^\perp)^0$, donc $b \in (A^\perp + B^\perp)^0 = (E^*)^0 = \{0\}$ où cette dernière égalité se justifie par le théorème de la base incomplète. D'où $(A^\perp)^0 = A$ car on a déjà $A \subset (A^\perp)^0$. □

Preuve du théorème Montrons un lemme préliminaire. Pour tout sous-espace vectoriel B de E^*, on a $B \subset (B^0)^\perp$. Montrons que $B = (B^0)^\perp$ pour tout sous-espace vectoriel B de E si et seulement si E est de dimension finie. Le sens réciproque est évident par égalité des dimensions. On suppose que E est de dimension infinie. Soit $b \coloneqq (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour $i \in I$, on note $\varphi_i \in E^*$ tel que $\langle \varphi_i, x\rangle = x_i$ pour tout $x \coloneqq \sum_{i\in I} x_i e_i \in E$. On pose $\varphi \coloneqq \sum_{i\in I} \varphi_i$ et $B \coloneqq \mathrm{Vect}(\varphi_i)_{i\in I}$. Alors $B^0 = \{0\}$, donc $(B^0)^\perp = E^*$. Or $B \subsetneq E^*$ ce qui montre le sens direct par contraposée.

Par l'absurde, supposons que E est de dimension infinie et J est surjective. Soit $B \subset E^*$. On a

$$\begin{aligned} B^{\perp_{E^*,E^{**}}} &= \{y \in E^{**} \mid \forall \ell \in B,\ \langle \ell, y\rangle_{E^*,E^{**}} = 0\} \\ &= \{Jx \in E^{**} \mid \forall \ell \in B,\ \langle \ell, x\rangle_{E^*,E} = 0\} \end{aligned}$$

$$= J\{x \in E^{**} \mid \forall \ell \in B,\ \langle \ell, x\rangle_{E^*,E} = 0\}$$
$$= JB^{0_{E,E^*}}.$$

De même, on montre que
$$(B^{\perp_{E^*,E^{**}}})^{0_{E^*,E^{**}}} = (B^{0_{E,E^*}})^{\perp_{E,E^*}}$$
ce qui est impossible. □

INTERLUDE N° 1. Soit A un sous-espace vectoriel. Le quotient $E^*/A^\perp$ est isomorphe à A^*.

Preuve Le noyau de l'application
$$\Phi\colon \left|\begin{array}{l} E \longrightarrow A^*, \\ \ \ell \longmapsto \ell_{|A} \end{array}\right.$$
est égale à $A^\perp$, donc la propriété universelle du quotient affirme que $E^*/\operatorname{Im}\Phi$ est isomorphe à $\operatorname{Im}\Phi = A^\perp$. □

INTERLUDE N° 2. Le dual $(E/A)^*$ est isomorphe à $A^\perp$.

DÉFINITION 2.5 *(transposée).* Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $f^\perp \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ l'unique applique linéaire telle que
$$\forall x \in E,\ \forall y \in F^*, \quad \langle {}^{\mathrm{t}}f(y), x\rangle_{E^*,E} = \langle y, f(x)\rangle_{F^*,F}.$$

PROPOSITION 2.6. L'application
$$T\colon \left|\begin{array}{l} \mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{L}(F^*,E^*), \\ \qquad f \longmapsto {}^{\mathrm{t}}f \end{array}\right.$$
est injective.

Preuve Montrons l'injectivité. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que ${}^{\mathrm{t}}f = 0$. Alors
$$\forall x \in E,\ \forall y \in F^*, \quad \langle y, f(x)\rangle_{F^*,F} = 0,$$
donc
$$\forall x \in E, \quad f(x) = 0$$
ce qui permet de conclure que $f = 0$. □

PROPOSITION 2.7. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors

1. ${}^{\mathrm{t}}(g \circ f) = {}^{\mathrm{t}}f \circ {}^{\mathrm{t}}g$,
2. $\operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}f = (\operatorname{Im} f)^\perp$,
3. $\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}F = (\operatorname{Ker} f)^\perp$

Preuve 1. Pour tout $x \in E$ et $z \in G^*$, on a
$$\langle {}^{\mathrm{t}}(g \circ f)(x), z\rangle_{F^*,E} = \langle x, g \circ f((z)\rangle_{F^*,E} = \langle {}^{\mathrm{t}}g(x), f(z)\rangle_{F^*,F} = \langle {}^{\mathrm{t}}f \circ {}^{\mathrm{t}}g(x), z\rangle_{E^*,E}.$$
On conclut alors par unicité.
2. Soit $x \in E^*$. Alors
$$x \in \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}f \iff \forall y \in F,\ \langle {}^{\mathrm{t}}f(x), y\rangle = 0 \iff \forall y \in F,\ \langle x, f(y)\rangle = 0 \iff x \in (\operatorname{Im} f)^\perp.$$
3. Soit $y \in \operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}f$. Alors il existe $x \in F^*$ tel que $y = {}^{\mathrm{t}}f(x)$. Pour $z \in \operatorname{Ker} f$, on a $\langle y, z\rangle = \langle {}^{\mathrm{t}}f(x), z\rangle = \langle x, f(z)\rangle = 0$, donc $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Réciproquement, soit $z \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Alors pour tout $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $\langle z, x\rangle = 0$. Donc la forme linéaire z s'annule sur $\operatorname{Ker} f$, *i. e.* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} z$. Ainsi par propriété universelle du quotient, il existe $\varphi \in F^*$ tel que $z = \varphi \circ f$, donc $z = {}^{\mathrm{t}}f(\varphi) \in \operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}f$ car, pour tout $y \in F^*$, on a
$$\langle z, y\rangle = \langle \varphi \circ f, y\rangle = \varphi \circ f(y) = \langle \varphi, f(y)\rangle = {}^{\mathrm{t}}f \circ \varphi(y).$$
Cela termine la preuve. □

2.3 ON MET DE LA TOPOLOGIE

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On reprend l'application $J\colon E \to E^{**}$ définie dans la proposition 2.1. Pour tous $\ell \in E'$ et $x \in E$, on a
$$\langle Jx, \ell\rangle = \langle \ell, x\rangle \leqslant \|\ell\|_{E'} \|x\|_E$$
et donc $Jx \in E''$ et $\|Jx\|_{E''} \leqslant \|x\|_E$. Ainsi $\operatorname{Im} J \subset E''$. On note toujours J sa restriction à l'arrivée à E''. Alors
$$\|J\|_{\mathscr{L}_c(E,E'')} \leqslant 1.$$

2.3.1 Théorème de Hahn-Banach et conséquence

Théorème 2.8 *(Hahn-Banach, version simplifiée).* Soient F un sous-espace vectoriel de E et $\ell \in F'$. Alors il existe $\tilde{\ell} \in E'$ telle que

$$\tilde{\ell}_{|F} = \ell \quad \text{et} \quad \|\tilde{\ell}\|_{E'} = \|\ell\|_{F'}.$$

Preuve On considère

$$X := \{(G, h) \mid G \text{ un sev de } E,\, F \subset G,\ h \in G',\ h_{|F} = \ell,\ \|h\|_{G'} = \|\ell\|_{F'}\}$$

et on le munit de la relation d'ordre $\leqslant$ telle que

$$(G_1, h_1) \leqslant (G_2, h_2) \quad \iff \quad \begin{cases} G_1 \subset G_2, \\ h_{2|G_1} = h_1. \end{cases}$$

Comme $(F, \ell) \in X$, l'ensemble X est non vide. Soit $\mathscr{F} := (G_i, h_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de X. Montrons qu'elle admet un majorant. L'ensemble $G := \bigcup_{i \in I} G_i$ est bien un sous-espace vectoriel. Pour $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $x \in G_i$ et on pose $h(x) := h_i(x')$. L'application h est bien définie et linéaire. De plus, soient $x \in E$ et $i \in I$ tels que $x \in G_i$. Alors $h(x) = h_i(x) \leqslant \|h_i\|_{G_i'} \|x\|_E = \|\ell\|_{F'} \|x\|_E$, donc $\|h\|_{G'} \leqslant \|\ell\|_{F'}$. L'inégalité réciproque est vraie comme $h_{|F} = \ell$. Finalement, le couple (G, h) est un majorant dans X de la famille $\mathscr{F}$. Cela montre que X est un ensemble inductif. D'après le lemme de Zorn, il admet un élément maximal $(\tilde{G}, \tilde{h}) \in X$.

Montrons que $\tilde{G} = E$. Par l'absurde, supposons que $\tilde{G} \neq E$. Alors il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \tilde{G}$. On pose le sous-espace vectoriel $\tilde{G}_1 := \tilde{G} \oplus \mathbb{R} x_0$ et la forme linéaire $\tilde{h}_1 \colon \tilde{G}_1 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \tilde{G},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \tilde{h}_1(x + \lambda x_0) = \tilde{h}(x) + \lambda \alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à déterminer. Soient $x, y \in \tilde{G}$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x + y) &= \tilde{h}(x) + \tilde{h}(y) \\ &\leqslant \|\ell\|_{E'} \|x + y\|_E \\ &\leqslant \|\ell\|_{E'} (\|x - x_0\|_E + \|y + x_0\|_E), \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{h}(x) - \|\ell\|_{E'} \|x - x_0\|_E \leqslant -\tilde{h}(y) + \|\ell\|_{E'} \|y + x_0\|_E .$$

On prend $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha \in \big[\sup_{x \in \tilde{G}} (\tilde{h}(x) - \|\ell\|_{E'} \|x - x_0\|_E), \inf_{x \in \tilde{G}} (-\tilde{h}(y) + \|\ell\|_{E'} \|y + x_0\|_E)\big].$$

Alors soit $y \in \tilde{G}_1$. Il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = x + \lambda x_0$. Si $\lambda > 0$, alors

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(y) &= \tilde{h}_1(x + \lambda x_0) \\ &= \lambda \tilde{h}_1(x/\lambda + x_0) \\ &\leqslant \lambda(\tilde{h}(x/\lambda) + \alpha) \\ &\leqslant \lambda(h(x/\lambda) - h(x/\lambda) + \|\ell\|_{E'} \|x/\lambda + x_0\|_E) \\ &\leqslant \|\ell\|_{E'} \|x + \lambda x_0\|_E = \|\ell\|_{F'} \|y\|_E . \end{aligned}$$

De même, si $\lambda < 0$, on montre la même inégalité. Si $\lambda = 0$, alors $\tilde{h}_1(y) = \tilde{h}(y) \leqslant \|\ell\|_{F'} \|y\|_E$. On en déduit que

$$\tilde{h}_1 \in \tilde{G}_1' \quad \text{et} \quad \|\tilde{h}_1\|_{\tilde{G}_1'} = \|\ell\|_{F'} .$$

Donc le couple $(\tilde{G}_1, \tilde{h}_1)$ majore strictement $(\tilde{G}, \tilde{h})$ ce qui est contradictoire. Donc $\tilde{G} = E$ et on prend $\tilde{\ell} = \tilde{h}$. □

Corollaire 2.9. L'application J est injective de norme 1.

Preuve Soit $x \in E$. On pose $F := \mathbb{R} x$. Soit $\ell \in F^*$ telle que $\ell(\lambda x) = \lambda \|x\|_E$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\|\ell\|_{F'} = 1$. D'après le théorème, il existe $\tilde{\ell} \in E'$ telle que

$$\tilde{\ell}_{|F} = \ell \quad \text{et} \quad \|\tilde{\ell}\|_{E'} = 1.$$

Si $Jx = 0$, alors $\|x\|_E = \langle Jx, \tilde{\ell} \rangle = 0$, donc $x = 0$. Cela montre l'injectivité. Comme $\langle Jx, \tilde{\ell} \rangle = \|x\|_E$ et $\|\tilde{\ell}\|_{E'} = 1$, on en déduit que $\|J\| = 1$ □

Corollaire 2.10. Soit $x \in E$. Alors

$$\|x\|_E = \sup_{\ell \in E' \setminus \{0\}} \frac{\langle \ell, x \rangle}{\|\ell\|_{E'}}.$$

2.3.2 Orthogonalité

On définie identiquement les orthogonal et polaire d'une partie tout en les restreignant à E'. On généralise les résultats algébriques, mais le résultat suivant est faux : pour toute $f \in E'$, on a $\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

L'application $J\colon E \to E''$ est une isométrie, mais sa surjectivité dépend des cas.

DÉFINITION 2.11. On dit que E est *réflexif* si J est surjective.

▷ EXEMPLES. Soit $p \in \,]1, +\infty[$. Alors
(i) $(\ell^p)' \simeq \ell^q$ où $q \geqslant 1$ vérifie $1/p + 1/q = 1$,
(ii) $(\ell^p)'' \simeq \ell^p$,
(iii) $(\ell^\infty)'$ est strictement plus grand que ℓ^1,
(iv) $(c_0)' = \ell^1$ où $c_0 \coloneqq \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \to 0\}$.

Preuve (i) On considère l'application

$$\Phi\colon \left|\begin{array}{rcl} \ell^q & \longrightarrow & (\ell^p)' \\ (x_n)_{n\in N} & \longmapsto & \left|\begin{array}{rcl} \ell^p & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Par l'inégalité de HÖLDER, l'application Ψ est bien à valeurs dans $(\ell^p)'$ et

$$\forall x \in \ell^p, \quad \|\Phi(x)\|_{(\ell^p)'} \leqslant \|x\|_{\ell^p}.$$

L'application Φ est clairement linéaire, continue et

$$\|\Phi\|_{\mathscr{L}_c(\ell^p, (\ell^p)')} \leqslant 1.$$

Elle est clairement injective. Montrons que c'est une isométrie surjective.

On suppose que $p = 1$. Soit $\ell \in (\ell^1)'$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose la suite $e^n \coloneqq (\mathbb{1}_{\{n\}}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $x_n \coloneqq \langle \ell, e^n \rangle$. On doit montrer que $x \coloneqq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $\ell = \Phi(x)$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_n| = |\langle \ell, e^n \rangle| \leqslant \|\ell\|_{(\ell^1)'} \|e_n\|,$$

donc $x \in \ell^\infty$ et $\|x\|_{\ell^\infty} \leqslant \|\ell\|_{(\ell^1)'}$. De plus, on a $\ell = \Phi(x)$ si et seulement si

$$\forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1, \quad \langle \ell, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n.$$

C'est vraie pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ presque nulle. Montrons l'égalité dans le cas général. Pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, on a

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} y_k e^k,$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \ell, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle &= \lim_{N\to+\infty} \Big\langle \ell, \sum_{k=0}^{N} y_k e^k \Big\rangle \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} x_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k. \end{aligned}$$

D'où l'égalité ce qui montre que $\ell = \Psi(x)$ et $\|x\|_{\ell^\infty} \leqslant \|\Psi(x)\|_{(\ell^1)'}$. Cela montre l'égalité $\|x\|_{\ell^\infty} = \|\Psi(x)\|_{(\ell^1)'}$ et on en déduit que Ψ est un isométrie surjective.

On ne suppose plus que $p = 1$. Soit $\ell \in (\ell^p)'$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n \coloneqq \langle \ell, e^n \rangle$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, on a

$$\Big\langle \ell, \sum_{n=0}^{N} y_n e^n \Big\rangle = \sum_{n=0}^{N} x_n y_n, \tag{$*$}$$

donc

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} x_n y_n\Big| \leqslant \|\ell\|_{(\ell^p)'} \Big(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^q\Big)^{1/q}.$$

En particulier, on prend $y_n = x_n^{q-1} \operatorname{sgn} x_n$ pour $n \leqslant N$ et $y_n = 0$ sinon. Alors

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n|^q \leqslant \|\ell\|_{(\ell^p)'} \Big(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^{p(q-1)}\Big)^{1/p}.$$

Or $p(q-1)=q$, donc

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n|^q \leqslant \|\ell\|_{(\ell^p)'} \Big(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^q\Big)^{1-1/q}.$$

Si la somme est nulle, c'est trivial. Sinon

$$\Big(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^q\Big)^{1/q} \leqslant \|\ell\|_{(\ell^p)'}.$$

On en déduit que $x \coloneqq (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ et $\|x\|_{\ell^q} \leqslant \|\ell\|_{(\ell^p)'}$. En passant à la limite dans l'égalité $(*)$, comme ℓ est continue et y est une limite de suite de ℓ^p, on a

$$\langle \ell, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

Cela montre que Φ est une isométrie surjective.

(iii) Clairement, l'espace ℓ^1 s'injecte continûment dans $(\ell^\infty)'$. Mais montrons qu'il n'existe pas de bijection. On note c l'ensemble des suites de ℓ^∞ qui converge. Sur c, on définit $\ell \in c'$ telle que

$$\forall x \in \ell^\infty, \quad \langle \ell, x\rangle = \lim x.$$

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $\tilde{\ell} \in (\ell^\infty)'$ telle que $\tilde{\ell}_{|c} = \ell$. S'il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ tel que

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \langle \tilde{\ell}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n,$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \langle \tilde{\ell}, e^k\rangle = x_k = \lim_{n\to+\infty} e^k = 0,$$

donc $\tilde{\ell} = 0$ ce qui est impossible. Donc $\tilde{\ell} \notin (\ell^1)'$.

□

2.3.3 Transposition

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)$. On définit la transposée $\tilde{f} \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')$ telle que

$$\forall \ell \in F',\ \forall x \in E, \quad \langle {}^{\mathrm{t}}f(\ell), x\rangle_{E',E} = \langle \ell, f(x)\rangle_{F',F}.$$

Cela définie bien une application ${}^{\mathrm{t}}f$ de manière unique. En effet, pour tous $\ell \in F'$ et $x \in E$, on a

$$\langle {}^{\mathrm{t}}f(\ell), x\rangle_{E',E} \leqslant \|\ell\|_{F'} \|f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)} \|x\|_E,$$

donc

$$\|{}^{\mathrm{t}}f(\ell)\|_{E'} \leqslant \|\ell\|_{F'} \|f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)}.$$

On en déduit que l'application ${}^{\mathrm{t}}f$ est continue et que $\|{}^{\mathrm{t}}f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)}$. Montrons l'autre inégalité. De même, pour tous $\ell \in F'$ et $x \in E$, on a

$$\langle \ell, f(x)\rangle_{F',F} \leqslant \|\ell\|_{F'} \|{}^{\mathrm{t}}f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')} \|x\|_E,$$

donc le théorème de Hahn-Banach donne

$$\|f(x)\|_F \leqslant \|{}^{\mathrm{t}}f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')} \|x\|_E.$$

On en déduit que $\|{}^{\mathrm{t}}f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')} \geqslant \|f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)}$. D'où $\|{}^{\mathrm{t}}f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)}$.

On suppose que F est réflexif. Montrons que l'application

$$\left| \begin{array}{r} \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F) \longrightarrow \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E'), \\ f \longmapsto {}^{\mathrm{t}}f \end{array} \right.$$

est surjective. Soit $g \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')$. Soit $x \in E$. On considère l'application

$$\Psi_x \colon \left| \begin{array}{r} F' \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \ell \longmapsto \langle g(\ell), x\rangle. \end{array} \right.$$

Pour tout $\ell \in F'$, on a

$$|\Psi_x(\ell)| \leqslant \|g\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(F',E')} \|\ell\|_{F'} \|x\|_E$$

ce qui montre que $\Psi_x \in F''$. Comme F est réflexif, il existe un unique $y \in F$ tel que $\Psi_x = Jy$. Alors pour $\ell \in F'$, on a

$$\langle g(\ell), x\rangle_{E',E} = \langle Jy, \ell\rangle_{F'',F} = \langle \ell, y\rangle_{F',F}.$$

Il suffit alors de poser $f(x) \coloneqq y$. On peut montrer que $f \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}((E,F)$ et $g = {}^{\mathrm{t}}f$.