Compléments de mathématiques (S2)

Arnaud Debussche & Serge Cantat

1A maths 2019, ENS de Rennes

Chapitre 1

Filtres et théorème de Tyconov

1.1 Filtres

Définition 1.1. Soit E un ensemble. On appelle *filtre* sur E toute classe de parties $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(E)$ telle que
(i) $\emptyset \notin \mathscr{F}$;
(ii) si $A, B \in \mathscr{F}$, alors $A \cap B \in \mathscr{F}$;
(iii) si $A \in \mathscr{F}$ et $B \subset E$ vérifient $A \subset B$, alors $B \in \mathscr{F}$.

◇ Remarque. Pour un filtre $\mathscr{F}$, une partie $A \subset E$ et son complémentaire A^{c} ne peuvent pas être en même temps dans $\mathscr{F}$.

▷ Exemples. – Soit (E, τ) un espace topologique. Alors pour tout $a \in E$, l'ensemble des voisinages de a est un filtre. De même avec l'ensemble des voisinages d'une partie $A \subset E$.
– Pour $E = \mathbf{N}$, la classe de parties $\mathscr{F} \coloneqq \{J \subset \mathbf{N} \mid \sharp J^{\mathrm{c}} < +\infty\}$ est un filtre, appelé *filtre de* Fréchet.

Définition 1.2. On appelle *base de filtre* toute classe de parties $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(E)$ telle que
– $\emptyset \notin \mathscr{B}$;
– si $A, B \in \mathscr{B}$, il existe $C \in \mathscr{B}$ tel que $C \subset A \cap B$.
On dit qu'un filtre $\mathscr{F}$ est engendré par une base de filtre $\mathscr{B}$ si
– $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$;
– pour tout $A \in \mathscr{F}$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $B \subset A$.

Proposition 1.3. Une base de filtre $\mathscr{B}$ engendre un unique filtre, noté $\mathscr{F}(\mathscr{B})$.

Preuve • *Unicité.* Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux filtres engendrés par $\mathscr{B}$. Soit $A_1 \in \mathscr{F}_1$. Alors il existe $B_1 \in \mathscr{B}$ tel que $B_1 \subset A_1$. Mais $B_1 \in \mathscr{F}_2$, donc $A_1 \in \mathscr{F}_2$. D'où $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$. Par symétrie, on a $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$.
• *Existence.* Le filtre $\mathscr{F} \coloneqq \{A \subset B \mid \exists B \in \mathscr{B}, B \subset A\}$ est bien un filtre engendré par $\mathscr{B}$. □

Proposition 1.4. Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de filtres. Alors $\mathscr{F}(\mathscr{B}_1) \subset \mathscr{F}(\mathscr{B}_2)$ si et seulement si

$$\forall A_1 \in \mathscr{B}_1,\ \exists A_2 \in \mathscr{B}_2, \quad A_2 \subset A_1$$

▷ Exemples. – Une base de voisinage est une base du filtre des voisinages.
– La classe de parties $\mathscr{B} \coloneqq \{\mathbf{N} \cap [n, +\infty[\mid n \in \mathbf{N}\}$ engendre le filtre de Fréchet.

Définition 1.5. Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux filtres. On dit que $\mathscr{F}_2$ est plus fin que $\mathscr{F}_1$ si $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$.

1.2 Image d'un filtre

Définition 1.6. Soient E et F deux ensembles et $f \colon E \to F$. Soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur F telle que

$$f^{-1}(B) \neq \emptyset, \quad \forall B \in \mathscr{B}.$$

On appelle *image réciproque* de B par f la classe de parties

$$f^{-1}(\mathscr{B}) \coloneqq \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}\}.$$

C'est une base de filtre de E.

◇ Remarque. Pour un filtre $\mathscr{F}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathscr{F})$ n'est pas un filtre en général. Pour une telle application f, on fera l'abus de noter $f^{-1}(\mathscr{F}) \coloneqq \mathscr{F}(f^{-1}(\mathscr{F}))$.

Définition 1.7. Soient E et F deux ensembles et $f\colon E \to F$. Soit $\mathscr{B}$ une base de filtre sur E. On appelle *image directe* de B par f la classe de parties

$$f(\mathscr{B}) \coloneqq \{f(B) \mid B \in \mathscr{B}\}.$$

C'est une base de filtre de F. Si $\mathscr{F}$ est un filtre sur E, on pose $f(\mathscr{F}) \coloneqq \mathscr{F}(f(\mathscr{F}))$ par abus de notation.

Preuve Montrons que $f(\mathscr{B})$ est une base de filtre de F. Soient $A_1, A_2 \in f(\mathscr{B})$. Il existe $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ tels que $A_1 = f(B_1)$ et $A_2 = f(B_2)$. Donc $A_1 \cap A_2 = f(B_1) \cap f(B_2) \supset f(B_1 \cap B_2)$. Or il existe $C \in \mathscr{B}$ tel que $C \subset B_1 \cap B_2$, donc $f(C) \subset A_1 \cap A_2$. □

◇ Remarque. L'image d'un filtre n'est pas un filtre en général.

Proposition 1.8. Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de filtre sur E et $f\colon E \to F$. Si $\mathscr{F}(\mathscr{B}_1) = \mathscr{F}(\mathscr{B}_2)$, alors $\mathscr{F}(f(\mathscr{B}_1)) = \mathscr{F}(f(\mathscr{B}_2))$.

Preuve On suppose que $\mathscr{F}(\mathscr{B}_1) = \mathscr{F}(\mathscr{B}_2)$. Soit $A_1 \in \mathscr{F}(f(\mathscr{B}_1))$. Alors il existe $C_1 \in f(\mathscr{B}_1)$ tel que $C_1 \subset A_1$. Or il existe $B_1 \in \mathscr{B}_1$ tel que $A_1 = f(B_1)$. Comme $\mathscr{F}(\mathscr{B}_1) = \mathscr{F}(\mathscr{B}_2)$, il existe $B_2 \in \mathscr{B}_2$ tel que $B_2 \subset B_1$, donc $f(B_2) \subset A_1$ et $A_1 \in \mathscr{F}(f(\mathscr{B}_2))$. D'où $\mathscr{F}(f(\mathscr{B}_1)) \subset \mathscr{F}(f(\mathscr{B}_2))$. Par symétrie, l'égalité est vraie. □

▷ Exemples. Soit $x\colon \mathbf{N} \to E$. On note $\mathscr{F}$ le filtre de Fréchet. Alors

$$\begin{aligned} x(\mathscr{F}) &= \mathscr{F}(\{\{x(p) \mid p \geqslant n\} \mid n \in \mathbf{N}\}) \\ &= \{A \subset E \mid \sharp\{p \in \mathbf{N} \mid x_p \in A\} = +\infty\}. \end{aligned}$$

Ce filtre est appelé le filtre élément associée à la suite x. Soit $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extraction. Alors $(x \circ \varphi)(\mathscr{F})$ est plus fin que $x(\mathscr{F})$.

1.3 Convergence d'un filtre

Définition 1.9. Soit (E, τ) un espace topologique. On dit qu'un filtre $\mathscr{F}$ sur E converge vers un point $a \in E$ et on note $\mathscr{F} \to a$ si $\mathscr{V}(a) \subset \mathscr{F}$.

▷ Exemple. Soient $x\colon \mathbf{N} \to E$ et $a \in E$. Alors les propositions suivant sont équivalentes :

(i) $x_n \to a$;
(ii) pour tout $V \in \mathscr{V}(a)$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x_p \in V$ pour tout $p \geqslant N$;
(iii) pour tout $V \in \mathscr{V}(a)$, on a $\sharp\{p \in \mathbf{N} \mid x_p \in A\} = +\infty$;
(iv) pour tout $V \in \mathscr{V}(a)$, on a $V \in x(\mathscr{F})$;
(v) $\mathscr{V}(a) \subset x(\mathscr{F})$ ce qui revient à dire $x(\mathscr{F}) \to a$.

Proposition 1.10. Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Alors tout filtre admet au plus une limite.

Preuve On suppose que $\mathscr{F} \to a$ et $\mathscr{F} \to b$. Par l'absurde, supposons que $a \neq b$. Comme E est séparé, il existe $U \in \mathscr{V}(a)$ et $V \in \mathscr{V}(b)$ tels que $U \cap V = \emptyset$. Or $\mathscr{V}(a) \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{V}(B) \subset \mathscr{F}$, donc $U, V \subset \mathscr{F}$, donc $U \cap V = \emptyset \in \mathscr{F}$ ce qui est impossible. D'où $a = b$. □

Proposition 1.11. Soient (E, τ) un espace topologique séparé, $A \subset E$ et $a \in E$. Alors $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe un filtre $\mathscr{F}$ sur E tel que

- $\mathscr{F} \to a$;
- $A \in \mathscr{F}$;
- il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{F}$ telle que $B \subset A$ pour tout $B \in \mathscr{B}$.

Preuve $\Rightarrow$ Soit $a \in \overline{A}$. Pour tout $V \in \mathscr{V}(a)$, on a $A \cap V \neq 0$. Alors $\mathscr{B} \coloneqq \{A \cap V \mid V \in \mathscr{V}(a)\}$ est une base de filtre et on considère $\mathscr{F} \coloneqq \mathscr{F}(\mathscr{B})$. C'est un filtre convenant.

$\Leftarrow$ On suppose qu'il existe un tel filtre $\mathscr{F}$. Comme $\mathscr{F} \to a$, on a $\mathscr{V}(a) \subset \mathscr{F}$. Comme $A \in \mathscr{F}$, pour tout $V \in \mathscr{V}(a)$, on a $A \cap V \in \mathscr{F}$ et, en particulier, on a $A \cap V \neq \emptyset$. D'où $a \in \overline{A}$. □

Proposition 1.12. Soient (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) deux espaces topologiques séparés, $u\colon E \to F$ et $a \in E$. Alors les propositions suivant sont équivalentes :

(i) u est continue en a ;

(ii) pour tout filtre $\mathscr{F}$ de E tel que $\mathscr{F} \to a$, on a $u(\mathscr{F}) \to u(a)$;
(iii) pour tout $V \in \mathscr{V}(u(a))$, il existe $U \in \mathscr{V}(a)$ tel que $u(U) \subset V$.

Preuve D'après le cours de topologie, les propositions (i) et (iii) sont équivalentes.

On suppose (i). Soit $\mathscr{F}$ un filtre de E tel que $\mathscr{F} \to a$. Alors pour tout $V \in \mathscr{V}(u(a))$, il existe $U \in \mathscr{V}(a)$ tel que $u(U) \subset V$, donc $V \in u(\mathscr{F})$. Donc $\mathscr{V}(u(a)) \subset u(\mathscr{F})$, donc $\mathscr{F} \to u(a)$.

Réciproquement, on suppose (ii). On note $\mathscr{F} = \mathscr{V}(a)$. Alors $u(\mathscr{F}) \to u(a)$. Donc pour tout $V \in \mathscr{V}(u(a))$, on a $V \in u(\mathscr{F})$, donc il existe $U \in \mathscr{V}(a)$ tel que $u(U) \subset V$. □

Proposition 1.13. Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Alors E est compact si et seulement si, pour tout filtre $\mathscr{F}$ sur E, il existe un filtre $\mathscr{G}$ plus fin que $\mathscr{F}$ sur E qui converge.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose que E est compact. Soit $\mathscr{F}$ un filtre que E qu'on note $\mathscr{F} = \{A_i\}_{i\in I}$. Alors pour toute partie finie $J \subset I$, on a $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$, donc $\bigcap_{i\in J} \overline{A_i} \neq \emptyset$. Comme E est compact, on en déduit $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \neq \emptyset$. On considère alors $a \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$. Pour tout $V \in \mathscr{V}(a)$ et tout $i \in I$, on a donc $V \cap A_i \neq \emptyset$. On considère alors

$$\mathscr{G} \coloneqq \mathscr{F}(\mathscr{B}) \quad \text{et} \quad \mathscr{B} \coloneqq \{V \cap A_i \mid V \in \mathscr{V}(a), i \in I\}$$

où la classe de parties $\mathscr{B}$ est bien une base de filtre. Ainsi $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et $\mathscr{V}(a) \subset \mathscr{G}$.

$\Leftarrow$ Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermé de A telle que $\bigcap_{i\in J} F_i \neq I$ pour toute partie finie $J \subset E$. On pose

$$\mathscr{B} \coloneqq \left\{ \bigcap_{i\in J} F_i \;\middle|\; J \subset I, \sharp J < +\infty \right\}.$$

Il s'agit clairement d'une base de filtre. On note $\mathscr{F} \coloneqq \mathscr{F}(\mathscr{B})$. Par hypothèse, il existe un filtre $\mathscr{G}$ plus fin que $\mathscr{F}$ sur E et $a \in E$ tels que $\mathscr{G} \to a$. Comme $\mathscr{G}$ contient tous les fermés F_i et tous les voisinages de A, ce filtre contient les parties $V \cap F_i \neq \emptyset$ avec $V \in \mathscr{V}(a)$ et $i \in [\![1, n]\!]$, donc $a \in \overline{F_i} = F_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc $a \in \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ ce qui montre la compacité de E. □

1.4 Ultrafiltre

Définition 1.14. Soit E un ensemble. On appelle *ultrafiltre* tout filtre $\mathscr{U}$ sur E tel que, pour tout filtre $\mathscr{F}$ sur E plus fin que $\mathscr{U}$, on a $\mathscr{F} = \mathscr{U}$.

Théorème 1.15. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E. Alors il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ plus fin que $\mathscr{F}$.

Preuve On note X l'ensemble des filtres sur E plus fin que $\mathscr{F}$. On le munit de l'ordre définit par l'inclusion. Appliquons le lemme de Zorn. Comme $\mathscr{F} \subset X$, on a $X \neq \emptyset$.

Soit $\{\mathscr{G}_i\}_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée dans X. On pose $\mathscr{G} \coloneqq \bigcup_{i\in I} \mathscr{G}_i$. On a clairement $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$. Montrons que $\mathscr{G}$ est un filtre. Montrons l'axiome (ii). Soient $A, B \in \mathscr{G}$. Il existe $i, j \in I$ tel que $A \in \mathscr{G}_i$ et $B \in \mathscr{G}_j$. On peut supposer que $\mathscr{G}_i \subset \mathscr{G}_j$. Alors $A \cap B \in \mathscr{G}_j \subset \mathscr{G}$. Montrons l'axiome (iii). Soient $A \in \mathscr{G}$ et $B \in E$ tels que $A \subset B$. Alors il existe $i \in I$ tel que $A \in \mathscr{G}_i$, donc $B \in \mathscr{G}_i \subset \mathscr{G}$. On en déduit que $\mathscr{G}$ est un filtre plus fin que $\mathscr{F}$ et que c'est un majorant de $\{\mathscr{G}_i\}_{i\in I}$. Finalement, l'ensemble X est inductif. Le lemme de Zorn assure l'existence d'un filtre $\mathscr{U} \in X$ maximal : c'est un ultrafiltre et, par construction, il est plus fin que $\mathscr{F}$. □

Corollaire 1.16. Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Alors E est compact si et seulement si tout ultrafiltre converge.

Proposition 1.17. Soit $\mathscr{U}$ un filtre sur E. Alors $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si, pour toute partie $A \subset E$, on a $A \in \mathscr{U}$ ou $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{U}$.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose que $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre. Soit $A \subset E$ tel que $A \notin \mathscr{U}$. Pour tout $B \in \mathscr{U}$, on a $B \not\subset A$, donc $B \cap A^{\mathrm{c}} \neq \emptyset$. On note

$$\mathscr{B} \coloneqq \{B \cap A^{\mathrm{c}} \mid B \in \mathscr{U}\}.$$

Alors $\emptyset \notin \mathscr{B}$. La classe de parties $\mathscr{B}$ est stable par intersection, donc c'est une base de filtre. Le filtre engendré par $\mathscr{B}$ est donc un filtre plus fin que $\mathscr{U}$. Comme $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre, c'est $\mathscr{U}$. Or $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{F}(\mathscr{B})$, donc $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{U}$.

$\Leftarrow$ On suppose que $A \in \mathscr{U}$ ou $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{U}$ pour toute partie $A \subset E$. Par l'absurde, supposons que $\mathscr{U}$ n'est pas un ultrafiltre. Alors il existe un filtre $\tilde{\mathscr{U}}$ différent de $\mathscr{U}$ et plus fin que $\mathscr{U}$. Alors il existe $A \in \tilde{\mathscr{U}}$ tel que $A \notin \mathscr{U}$. Alors $A^{\mathrm{c}} \in \mathscr{U} \subset \tilde{U}$ ce qui est impossible. □

Proposition 1.18. Soit $\mathscr{U}$ un filtre sur E. Alors $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si, pour toutes parties $A, B \subset E$ tel que $A \cup B \in \mathscr{U}$, alors $A \in \mathscr{U}$ ou $B \in \mathscr{U}$.

Preuve Le sens réciproquement est évident en prenant $B = A^c$ et en utilisant la proposition précédente. Réciproquement, on suppose que $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre. Soient $A, B \subset E$ telle que $A \cup B \in \mathscr{U}$. On suppose $A \notin \mathscr{U}$. Alors $A^c \in \mathscr{U}$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \notin \mathscr{U}$, donc $B^c \notin \mathscr{U}$, donc $B \in \mathscr{U}$. □

COROLLAIRE 1.19. 1. Soit $\mathscr{B}$ une base de filtre. Alors $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ est un ultrafiltre si et seulement si, pour toute partie $A \subset E$, il existe $B \in \mathscr{B}$ telle que $B \subset A$ ou $B \subset A^c$.
2. Soient $\mathscr{B}$ une base de filtre et $f : E \to F$ une application. Si $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ est un ultrafiltre, alors $\mathscr{F}(f(\mathscr{B}))$ est un ultrafiltre.

Preuve Le premier point est évident en utilisant les propositions précédentes. Montrons le second point. On suppose que $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ est un ultrafiltre. Soit $A \subset F$. Comme $f^{-1}(A) \subset E$ et la classe de parties $\mathscr{B}$ est une base de l'ultrafiltre $\mathscr{F}(\mathscr{B})$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $B \subset f^{-1}(A)$ ou $B \subset f^{-1}(A)^c$, donc $f(B) \subset A$ ou $f(B) \subset A^c$. Cela montre que $\mathscr{F}(f(B))$ est un ultrafiltre. □

1.5 Théorème de Tyconov

1.5.1 Topologie produit

Soit $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On note τ la topologie sur l'ensemble $F := \prod_{i \in I} E_i$ engendrée par les rectangles ouverts

$$O = \prod_{i \in J} A_i \times \prod_{i \notin J} E_i$$

où chaque ensemble A_i appartient à τ_i et l'ensemble $J \subset I$ est une partie finie. Cette topologie, appelée *topologie produit*, est la plus petite rendant continue les projections $p_i : F \to E_i$.

▷ EXEMPLE. On peut ainsi définir une topologie sur l'ensemble E^I. On suppose que l'espace E est métrique. Soient $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de E^I et $f \in E^I$. Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers f si et seulement si

$$\forall i \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_i \in \mathbf{N},\ \forall n > N_i, \quad d(f_n(i), f(i)) < \varepsilon$$

si et seulement si

$$\forall J \in I \text{ finie},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_J \in \mathbf{N},\ \forall n > N_J,\ \forall i \in J, \quad d(f_n(i), f(i)) < \varepsilon$$

si et seulement si

$$\forall J \in I \text{ finie},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_J \in \mathbf{N},\ \forall n > N_J, \quad f_n \in \prod_{i \in J} \mathrm{B}_i(f(i), \varepsilon) \times \prod_{i \notin J} E_i$$

si et seulement si la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f au sens de la topologie produit.

THÉORÈME 1.20. 1. On suppose que les espaces (E_i, τ_i) sont séparés. Alors l'espace produit (F, τ) est séparé.
2. On suppose que les espaces (E_i, τ_i) sont métriques. Alors l'espace produit (F, τ) est métrisable et une distance sur cet espace est donnée par

$$d(x, y) = \sum_{i \in I} \frac{\min(d_i(x_i, y_i), 1)}{2^i} < +\infty, \qquad \text{avec} \quad x := (x_i)_{i \in I}, y := (y_i)_{i \in I}.$$

Preuve Montrons le second point. Soit O un ouvert de (F, τ). Alors on peut l'écrire comme un rectangle et il existe une partie finie $J \subset I$, une famille $(x_i)_{i \in J}$ de $\prod_{i \in J} E_i$ et une famille $(x_i)_{i \in J}$ de $\mathbf{R}^J$ telles que

$$\prod_{i \in J} \mathrm{B}(x_i, r_i) \times \prod_{i \notin J} E_i \subset O.$$

Quitte à prendre des rayons infinis, on peut supposer que $I = [\![0, i_0]\!]$. Soit

$$\mathrm{B}_d(x, r) := \left\{ (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \;\middle|\; \sum_{i \in I} \frac{\min(d_i(x_i, y_i), 1)}{2^i} \leqslant r \right\} \quad \text{avec} \quad r := \min\Big(\min_{i \leqslant i_0} \frac{r_i}{2^i}, \frac{1}{2^{i_0+1}} \Big)$$

une boule pour la distance d. Soit $y := (y_i)_{i \in I} \in \mathrm{B}_d(x, r)$. Alors $\min(d_i(x_i, y_i), 1)/2^i \leqslant r$ pour $i \in I$. Si $i \leqslant i_0$, alors $1/2^i \geqslant r$, donc $d_i(x_i, y_i)/2^i < r$, donc $d_i(x_i, y_i) < 2^i r \leqslant r_i$. On en déduit que $\mathrm{B}_d(x, r)$ est contenu dans un ouvert pour la topologie produit, *i. e.* associée à la distance d. Par ailleurs, soit $i_0 \in I$ tel que $1/2^{i_0} \leqslant r/2$. Soit

$$y \in B := \prod_{i=0}^{i_0} \mathrm{B}(x_i, r/4) \times \prod_{i=i_0+1}^{+\infty} E_i.$$

Alors

$$\begin{aligned} d(x,y) = \sum_{i\in I} \frac{\min(d_i(x_i,y_i),1)}{2^i} &\leqslant \sum_{i=0}^{i_0} \frac{\min(d_i(x_i,y_i),1)}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \\ &\leqslant \frac{r}{4}\sum_{i=0}^{i_0} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \\ &\leqslant \frac{r}{2} + \frac{1}{2^{i_0}} \leqslant r. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{B}_d(x,r)$ contient un ouvert B de la topologie produit. Cela montre que la distance d engendre la même topologie que la topologie produit. ☐

▷ EXEMPLE. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$, K un compact de $\mathbf{R}^d$ et $k \in \mathbf{N}$. On note $\mathscr{C}_K^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ dont le support est inclus dans K. On le munit de la forme définie par

$$\|f\|_{\mathscr{C}_K^k(\Omega)} \coloneqq \max_{|\alpha|\leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

Alors on peut munir l'ensemble

$$\mathscr{C}_K^\infty(\Omega) \cong \left\{ (f_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \prod_{k\in\mathbf{N}} \mathscr{C}_K^k(\Omega) \;\middle|\; \forall k,\ell \in \mathbf{N},\ f_k = f_\ell \right\}$$

de la topologie produit.

PROPOSITION 1.21. Soient $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, $\mathscr{F}$ un filtre sur le produit $F \coloneqq \prod_{i\in E_i} E_i$ et $a \in F$. Pour $i \in I$, on note $p_i\colon F \to E_i$ la projection sur E_i. Alors $\mathscr{F} \to a$ si et seulement si $p_i(\mathscr{F}) \to p_i(a)$ pour tout $i \in I$.

Preuve Comme les projections p_i sont continues, le sens direct est évident. Réciproquement, soit $U \in \mathscr{V}(a)$. Il existe une partie finie $J \subset I$ et une famille $(A_i)_{i\in I}$ de $(\mathscr{V}_{\tau_i}(a_i))_{i\in I}$ telles que

$$\bigcup_{i\in J} p_i^{-1}(A_i) = \prod_{i\in J} A_i \times \prod_{i\notin J} E_i \subset U.$$

Pour tout $i \in I$, comme $p_i(\mathscr{F}) \to p_i(a)$, on a $A_i \in p_i(\mathscr{F})$, donc $p_i^{-1}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{F}$. Cela montre que $\bigcup_{i\in J} p_i^{-1}(A_i) \in \mathscr{F}$, donc $U \in \mathscr{F}$. D'où $\mathscr{V}(a) \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{F} \to a$. ☐

1.5.2 Énoncé et preuve du théorème

THÉORÈME 1.22 *(TYCONOV)*. Soit $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts. Alors $\prod_{i\in I} E_i$ est compact pour la topologie produit.

Preuve Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur $\prod_{i\in I} E_i$. Soit $i \in I$. On note $\mathscr{U}_i$ le filtre engendré par la classe $p_i(\mathscr{U})$ où l'application $p_i\colon \prod_{j\in I} E_j \to E_i$ est la projection sur E_i. Alors le filtre $\mathscr{U}_i$ est un ultrafiltre, donc $\mathscr{U}_i$ est convergeant. On en déduit que $\mathscr{U}$ est convergeant, *i. e.* le produit est compact. ☐

▷ EXEMPLE. Soit E un espace vectoriel normé. La boule fermé unité de E' est un fermé du produit $\prod_{x\in E} \mathrm{B}(0,\|x\|)$, donc il est compact : c'est le théorème de BANACH-ALAOGLU.

◇ REMARQUE. Le théorème de TYCONOV est équivalent à l'axiome du choix.

Chapitre 2

Théorie p-adique

2.1 Valeurs absolues p-adique

Définition 2.1. Soit K un corps. Une *valeur absolue* sur K est une application $|\cdot|\colon K \to \mathbf{R}_+$ vérifiant

1. pour tout $x \in K$, on a $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0_K$;
2. pour tous $x, y \in K$, on a $|xy| = |x||y|$;
3. pour tous $x, y \in K$, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

▷ Exemple. Sur $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'application usuelle $|\cdot|_\infty$ est une valeur absolue.

Proposition 2.2. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs dans $\mathbf{Z}$. Tout nombre entier $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ s'écrit sous la forme

$$a = \pm \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(a)}.$$

Pour $p \in \mathscr{P}$, l'entier $v_p(a)$ est appelée la *valuation p-adique* de a.

Définition 2.3. La valeur absolue p-adique d'un nombre $a \in \mathbf{Z}$ est

$$|a|_p \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0, \\ p^{-v_p(a)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Celle d'un nombre rationnel $a \coloneqq m/n \in \mathbf{Q}$ est

$$|a|_p \coloneqq \frac{|m|_p}{|n|_p}.$$

▷ Exemple. Soit $a \coloneqq 21 = 3 \times 7$. Alors $|a|_2 = 1$ et $|a|_3 = 1/3$.

Proposition 2.4. 1. Soit $a \in \mathbf{Q}^\times$. Alors

$$\prod_{p \in \mathscr{P} \cup \{\infty\}} |a|_p = 1. \qquad \text{(formule du produit)}$$

2. L'image de l'application $|\cdot|_p$ par $\mathbf{Q}^\times$ est $p^{\mathbf{Z}} \coloneqq \{p^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.
3. La valeur absolue p-adique est ultramétrique ou non archimédienne, *i. e.* pour tous $x, y \in \mathbf{Q}$, on a

$$|x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p).$$

En particulier, l'application $|\cdot|_p$ est une valeur absolue sur $\mathbf{Q}$.

Preuve Montrons le caractère ultramétrique. Si a et b sont deux entiers divisible par p^k avec $k \in \mathbf{N}$, alors $a+b$ l'est aussi. Soient $a, b \in \mathbf{Z}$. On les note sous la forme $a = p^r a'$ et $b = p^s b'$ où $a' \wedge p = 1$ et $b' \wedge p = 1$. Supposons que $s \geqslant r$. Alors

$$\begin{aligned} |a+b|_p &= |p^r(a' + p^{s-r}b')|_p \\ &= p^{-r}|a' + p^{s-r}b'|_p \leqslant p^{-r} = \max(|a|_p, |b|_p). \end{aligned}$$

De même si a et b sont deux rationnels. □

2.2 Complétion

Notation. Soit $p \in \mathscr{P}$. On note $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour $|\cdot|_p$. Deux entiers $a, b \in \mathbf{Z}$ vérifient $|a-b|_p \leqslant p^{-k}$ si et seulement si $a \equiv b \mod p^k$.

Lemme 2.5. Si q est un nombre entier premier à p, alors $1/q$ est une limite de nombres entiers positifs.

Preuve Comme $q \wedge p = 1$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $q \wedge p^k = 1$, donc l'entier q est inversible dans $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, donc il existe $c_k \in [\![1, p^k - 1]\!]$ tel que $c_k q \equiv 1 \mod p^k$. On obtient alors que $c_{k+1} \equiv c_k \mod p^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. Par récurrence immédiate, on en déduit que, pour tous $k, \ell \in \mathbf{N}^*$, on a $c_{k+\ell} \equiv c_k \mod p^k$ ce qui revient à écrire que

$$|c_{k+\ell} - c_k|_p \leqslant p^{-k}.$$

La suite $(c_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est donc de Cauchy, elle converge donc vers $c_\infty \in \mathbf{Q}_p$. Ce dernier élément c_∞ vérifie $c_\infty q = 1$ dans $\mathbf{Q}_p$, donc $1/q = c_\infty = \lim_{n\to+\infty} c_k$. ☐

Corollaire 2.6. Tout nombre rationnel $a \in \mathbf{Q}$ tel que $|a|_p \leqslant 1$ est une limite de nombre entiers positifs.

Notation. On note $\mathbf{Z}_p$ l'adhérence de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}_p$. Alors tout rationnel $x \in \mathbf{Q}$ tel que $|x|_p = 1$ appartient à $\mathbf{Z}_p$. On a également $-1 \in \mathbf{Z}_p$.

▷ Exemple. Soit $a \coloneqq 47 \in \mathbf{Q}_5$. On a $a = 2 + 45$, donc $|a|_5 = |2|_5 = 1$. De plus, on a $a = 2 + 4 \times 5 + 5^2$.

Proposition 2.7. Tout nombre entier positif s'écrit de manière unique sous la forme

$$a = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k + \cdots$$

où la suite $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite presque nulle de $[\![0, p-1]\!]$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on note alors

$$\tilde{a}_k \coloneqq \sum_{j=0}^{k} a_j p^j \in [\![0, p^{k+1} - 1]\!]$$

et c'est l'unique nombre vérifiant $\tilde{a}_k \equiv a \mod p^{k+1}$.

Proposition 2.8. 1. Soit $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{Z}$. Alors la série $\sum a_j p^j$ converge dans $\mathbf{Q}_p$. De plus, si les entiers a_j appartiennent à $[\![0, p-1]\!]$, alors ils sont déterminées par le nombre p-adique limite.
2. Tout nombre p-adique $x \in \mathbf{Z}_p$ est égal à une et une seule somme $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j p^j$ où la suite $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite de $[\![0, p-1]\!]$.

Preuve Montrons le premier point. Pour $j \in \mathbf{N}$, on note $u_j \coloneqq a_j p^j$ de sorte que $|u_j|_p = |a_j|_p p^{-j} \leqslant p^{-j}$. On en déduit que le terme général de la série $\sum u_j$ tend vers 0 et l'inégalité triangulaire ultramétrique assure que

$$\Big|\sum_{j=0}^{N+\ell} u_j - \sum_{j=0}^{N} u_j\Big|_p \leqslant \Big|\sum_{n=N}^{\ell+N} u_j\Big|_p \leqslant \max_{j\geqslant N} |u_j|_p \leqslant p^{-N}, \qquad N, \ell \in \mathbf{N}.$$

donc la série $\sum u_j$ est de Cauchy et, par conséquent, elle converge vers un certain élément $x \in \mathbf{Q}_p$.

On suppose que $a_j \in [\![0, p-1]\!]$ pour $j \in \mathbf{N}$. Alors a_0 est l'unique entier de $[\![0, p-1]\!]$ vérifiant $|x - a_0|_p \leqslant p^{-1}$. De même, l'entier a_1 est l'unique entier de $[\![0, p-1]\!]$ vérifiant $|(x - a_0)p^{-1} - a_1|_p \leqslant p^{-1}$. Et ainsi de suite, on montre que les entiers a_j sont entièrement déterminée par x. ☐

Théorème 2.9. L'ensemble $\mathbf{Z}_p$ vérifie les propriétés suivantes.
1. L'ensemble $\mathbf{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ et c'est le disque fermé de rayon 1

$$\overline{\mathbf{D}}_p \coloneqq \{x \in \mathbf{Q}_p \mid |x|_p \leqslant 1\}.$$

Plus généralement, pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, l'ensemble $p^\ell \mathbf{Z}_p$ est le disque de rayon $p^{-\ell}$.
2. Tout élément $x \in \mathbf{Z}_p$ admet une unique écriture sous la forme

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} x_j p^k$$

où $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite de $[\![0, p-1]\!]$.
3. Tout élément $x \in \mathbf{Z}_p$ est la limite d'une unique suite d'entiers positifs $\tilde{x}_{n+1} \in [\![0, p^n - 1]\!]$ tels que

$$\tilde{x}_{n+2} \equiv \tilde{x}_{n+1} \mod p^n, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Nécessairement, on a

$$\tilde{x}_n = \sum_{j=0}^{n-1} x_j p^j, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

4. L'ensemble $\mathbf{Z}_p$ est un espace métrique compact homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

5. L'anneau $\mathbf{Z}_p$ est principal : tout idéal de $\mathbf{Z}_p$ est de la forme $p^\ell \mathbf{Z}_p$ pour un certain entier $\ell \in \mathbf{N}$. Il existe un unique idéal maximal $\mathbf{Z}_p^0 \coloneqq p\mathbf{Z}_p$. Le quotient $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbf{F}_p \coloneqq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Preuve Montrons le premier point. Soit $x \in \mathbf{Z}_p$. Alors il existe une suite $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{Z}$ telle que $x_j \to x$. On a

$$|x|_p = \lim_{j\to+\infty} |x_j|_p \leqslant 1.$$

Donc $\mathbf{Z}_p \subset \overline{\mathbf{D}}_p$. Réciproquement, soit $x \in \mathbf{Q}_p$ tel que $|x|_p \leqslant 1$. Il existe une suite $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{Q}$ telle que $x_j \to x$, donc $|x|_p \leqslant 1$, donc $|x_j|_p < p$ pour $j \geqslant J$ suffisamment grand, donc $|x_j|_p \leqslant 1$ pour $j \geqslant J$. Ainsi pour $j \geqslant J$, on écrit x_j sous la forme $x_j = p^{r_j} m_j/n_j$ où $r_j \geqslant 0$ et m_j/n_j est premier avec p. Par le lemme, comme $n_j \wedge p = 1$, les éléments $1/n_j$ sont dans $\mathbf{Z}_p$. Donc x est une limite d'entier, donc $x \in \overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_p$. D'où $\mathbf{Z}_p = \overline{\mathbf{D}}_p$. Pour $\ell \in \mathbf{N}$, on utilise ensuite l'homothétie $z \longmapsto p^\ell z$ pour montrer que l'ensemble $p^\ell \mathbf{Z}_p$ est le disque de rayon $p^{-\ell}$.

Esquissons le point 4. On rappel que l'ensemble de Cantor est un espace métrique non vide, compact, sans point isolé et totalement discontinue (la composante connexe d'un point est réduite à ce point). On admet que tout espace topologique avec ces propriétés est homéomorphe à cet ensemble. Il faudrait ensuite vérifier que $\mathbf{Z}_p$ vérifie ces propriétés.

Montrons le point 5. Soit I un idéal de $\mathbf{Z}_p$. On considère la valuation p-adique sur I qui est bien définie et on peut l'écrire sous la forme

$$x \in I \longmapsto |x|_p = p^{-v_p(x)} \in p^{-\mathbf{N}}.$$

Soit $\ell \in \mathbf{N}$ tel que $p^{-\ell} = \sup_{x\in I} |x|_p$. Soit $y \in I$ tel que $|y|_p = p^{-\ell}$. On l'écrit sous la forme $y = p^\ell y_0$ avec $y_0 \in \mathbf{Z}_p$ vérifiant $|y_0|_p = 1$. Alors $1/y_0 \in \mathbf{Z}_p$, donc $p^\ell \in I$. On a donc montré que $I \supset p^\ell \mathbf{Z}_p$. L'inclusion réciproque étant évidente car $p^\ell \mathbf{Z}_p$ est le disque de rayon $p^{-\ell}$, on a $I = p^\ell \mathbf{Z}_p$.

Enfin on a $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p \simeq \mathbf{F}_p$ car, si $z \in \mathbf{Z}_p$, on peut l'écrire sous la forme

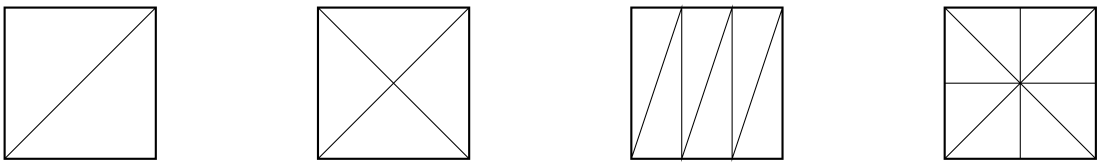
$$x = x_0 + \underbrace{p(x_1 + x_2 p + \cdots)}_{\in p\mathbf{Z}_p} \quad \text{avec} \quad x_0 \in [\![0, p-1]\!]$$

ce qui permet de conclure. □

◇ Remarque. Pour une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$, deux disques quelconques sont soit disjoints soit emboîtés l'un dans l'autre. De plus, tout point d'un disque est un centre pour le même rayon.

2.3 Théorème de Monsky

◇ Remarque. On considère un carré. On coupe le carré par sa diagonale afin d'avoir deux triangles de même aire ou on le coupe en des rectangles de même aire qu'on coupe ensuite en deux. De même, on peut couper ces deux triangles encore en deux de même aires. Plus général, si k est un entier pair, il existe un découpage du carré en k triangles de mêmes aires.



$k = 2$ $\quad$ $k = 4$ $\quad$ $k = 6$ $\quad$ $k = 8$

Figure 2.1 – Des découpages du carré en k triangles de mêmes aires pour des entiers pairs k

Théorème 2.10 *(Monsky).* Il n'existe pas de découpage du carré en un nombre impair de triangles de mêmes aires.

Preuve Quitte à le remettre à l'échelle, on suppose que le carré est le carré unité $[0,1] \times [0,1]$. On suppose que les sommets des triangles sont à coordonnées rationnelles. L'aire d'un triangle ayant pour trois sommets (x_i, y_i) avec $i \in \{1,2,3\}$ est

$$\frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \in \mathbf{Q}.$$

Si le carré se découpe en un nombre impair $N \geqslant 1$ de triangles de mêmes aires, cette aire vaut $1/N$. En particulier, la valeur 2-adique de l'aire commune $1/N$ vaut 1.

Colorions les sommets des triangles. Un triplet $(x, y, 1) \in \mathbf{Q}^3$ se voit attribuer une couleur

$$\begin{cases} \text{vert} & \text{si } |x|_2 \geqslant |y|_2 \text{ et } |x|_2 \geqslant 1, \\ \text{violet} & \text{si } |x|_2 < |y|_2 \text{ et } |y|_2 \geqslant 1, \\ \text{bleu} & \text{si } |x|_2 < 1 \text{ et } |y|_2 < 1. \end{cases}$$

Lemme 2.11. Si un triangle a ses trois sommets de couleurs différentes, alors la valeur 2-adique de son aire est supérieure ou égale à 2.

On note (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) ses trois sommets qu'on suppose respectivement vert, violet et bleu. Alors

$$d := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 1 + \dots,$$

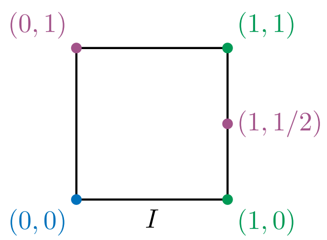
donc $|d|_2 = |x_1 y_2|_2$ car la valeur 2-adique de tous les autres termes sont inférieures, donc $|d|_2 \geqslant 1$. On en déduit que l'aire du triangle $\pm\frac{1}{2}d$ vérifie $|\pm\frac{1}{2}d|_2 \geqslant |\frac{1}{2}|_2 \geqslant 2$.

Il suffit alors de montrer qu'il existe au moins un triangle tricolore : c'est l'argument de Spermer.

Lemme 2.12. Le nombre de triangles tricolores est impair.

Remarquons que, sur chaque droite joignant deux points rationnels, on ne peut avoir que deux couleurs au plus : c'est une conséquence de la preuve du lemme précédent. En effet, le déterminant de trois points de couleurs différentes a une valeur 2-adique supérieure ou égale à 1, donc ces trois points ne peuvent pas être alignés.

Les deux sommets $(1, 1, 1)$ et $(1, 0, 1)$ sont bleus, le sommet $(0, 0, 1)$ est bleu et le sommet $(0, 1, 1)$ est violet. De plus, le point $(1, 1/2, 1)$ est violet. On en déduit que points suivants.



– Les points sur le segment joignant $(0, 0, 1)$ à $(1, 0, 1)$ sont verts ou bleus.

– Il y a un nombre impair sur le bord d'arêtes vert-bleu, toutes sont sur le segment I.

– Faisons la zoologie des triangles. Un triangle monocolore n'a pas d'arête vert-bleu, un bicolore a 2 ou 0 arêtes vert-bleu et un tricolore a une arête vert-bleu.

– Décomptons les arêtes vert-bleu. Comme les arêtes à l'intérieur comptent double, le nombre d'arête vert-bleu est impair. Donc, sur tous les triangles, modulo 2, le nombre de triangles tricolores est égale au nombre d'arêtes tricolores qui est impair.

Ceci termine la preuve. En effet, il existe un triangle tricolore, donc la valeur 2-adique de son aire est supérieure à 2 ce qui contredit la remarque préliminaire si le carré se découpe en un nombre impaire de triangles de même aire. □

On peut reformuler le lemme de Spermer avec des triangles comme suivant.

Lemme 2.13 *(Spermer)*. On se donne une découpe d'un triangle en triangles. On colorie avec trois couleurs les sommets de telle sorte que

– les sommets V_1, V_2 et V_3 du triangles ont des couleurs différentes ;

– sur chaque segment du bord, on ne voit que deux couleurs.

Alors il existe un petit triangle tricolore.

Théorème 2.14 *(du point fixe de Brouwer)*. Si f est une application continue du disque fermé unité D de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même, alors f admet un point fixe.

Exercice 2.1. Montrer que le lemme implique le théorème. Pour cela, on pourra montrer que le disque D est homéomorphe au triangle et colorier le triangle d'une bonne façon.

BUT DE LA SUITE. On veut

– classer les valeurs absolues sur $\mathbf{Q}$;
– étendre la valeur p-adique de $\mathbf{Q}$ est des extensions finies comme $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

2.4 Corps valués et théorème d'Ostrowski

Soit K un corps. Le valeur absolue triviale sur K est l'application $|\cdot|\colon K \to \mathbf{R}_+$ vérifiant

$$(|a| = 1 \iff a \neq 0) \quad \text{et} \quad |0| = 0.$$

▷ EXEMPLE. Pour $P(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \in \mathbf{Q}[t]$, on pose

$$\mathrm{o}(P,0) \coloneqq \min\{k \in \mathbf{N} \mid a_k \neq 0\} \quad \text{et} \quad |P(t)| \coloneqq \exp(-\mathrm{o}(P,0)).$$

Pour $F \coloneqq P/Q \in \mathbf{Q}(t)$, on pose $|F| = |P|/|Q|$. Alors l'application $|\cdot|$ est une valeur absolue sur $\mathbf{Q}(t)$. Le complété de $\mathbf{Q}(t)$ est alors les séries de LAURENT.

LEMME 2.15. Soient $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ deux valeurs absolues sur K. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) Les deux valeurs absolues sont équivalentes, *i. e.* il existe $\alpha > 0$ tel que $|x|_1 = |x|_2^\alpha$ pour tout $x \in K$.
(ii) Elles définissent la même topologie sur K.
(iii) Elle définissent la même boule unité $\{|x|_1 < 1\} = \{|x|_2 < 1\}$.

Preuve La proposition (i) implique clairement la proposition (ii). Comme

$$\{x \in K \mid |x|_1 < 1\} = \{x \in K \mid x^n \to 0 \text{ pour } |\cdot|_1\},$$

la proposition (ii) implique la proposition (iii). On suppose maintenant (iii). Montrons (i). Par un passage à l'inverse, on a $\{|x|_1 > 1\} = \{|x|_2 > 1\}$. Par un passage au complémentaire, on a donc $\{|x|_1 = 1\} = \{|x|_2 = 1\}$. Si l'une des valeurs absolues est triviale, alors l'autre est nécessairement triviale. On suppose donc que $|\cdot|_1$ n'est pas triviale. Il existe $x_0 \in K$ tel que $|x|_1 > 1$. Soit $\alpha \geqslant 0$ tel que $|x_0|_1 = |x_0|_2^\alpha$. Montrons que $|y|_1 = |y|_2^\alpha$ pour tout $y \in K^*$. Soit $y \in K^*$. On note

$$I(y) \coloneqq \{r \in \mathbf{Q} \mid |y|_1^r \leqslant |x_0|_1\}.$$

Alors

$$I(y) = \{r \coloneqq m/n \in \mathbf{Q} \mid |y^m/x_0^n|_1 \leqslant 1\}.$$

L'hypothèse (iii) permet alors de conclure. ☐

PROPOSITION 2.16. Soit $|\cdot|$ une valeur absolue sur K. Les propriétés suivante sont équivalentes.
(i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|n| \leqslant 1$.
(ii) Il existe $B > 0$ tel que $|n| \leqslant B$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
(iii) Pour tout $x \in K$ tel que $|x| \leqslant 1$, on a $|1 + x| \leqslant 1$.
(iv) La valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique.
(v) La boule unité fermée est un sous-anneau de K.

Preuve En prenant $B = 1$, on a (i) ⇒ (ii). On suppose (ii). Alors pour tout $x \in K$ tel que $|x| \leqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} |1+x|^n = |(1+x)^n| &= \Big|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}\Big| \\ &\leqslant B \sum_{k=0}^{n} |x|^k \leqslant Bn \end{aligned}$$

et on passe à la racine n-ième, d'où (iii). On suppose (iii). Alors pour tous $x, y \in K$ tels que $|x| \geqslant |y|$, on a

$$\|x + y\| \leqslant |x| \left|1 + \frac{y}{x}\right| \leqslant |x| \leqslant \max(|x|, |y|),$$

d'où (iv). L'implication (iv) ⇒ (v) est évidente. Enfin, si on suppose (v), comme 1 appartient à la boule unité fermé, un entier $n = 1 + \cdots + 1 \in \mathbf{N}$ y appartient aussi, d'où (i). ☐

COROLLAIRE 2.17. Si la caractéristique de K est strictement positive, alors $|\cdot|$ est ultramétrique.

Preuve Il suffit de montrer le point (ii). ☐

THÉORÈME 2.18 *(OSTROWSKI-I).* Si $|\cdot|$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbf{Q}$, alors elle est équivalente à la valeur absolue $|\cdot|_p$ pour un unique nombre premier p.

Preuve Comme $|\cdot|$ est ultramétrique, on a $|n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrons qu'il existe $m \geqslant 1$ tel que $|m| = 1$. Sinon, on a $|m| = 1$ pour tout $m \geqslant 1$, donc $|m/n| = 1$ pour tout $m/n \in \mathbf{Q}_+$, donc $(\pm m/n) = 1$ pour tout $m/n \in \mathbf{Q}$ car $|-1| = 1$ ce qui est absurde. On note alors

$$p \coloneqq \min\{n \geqslant 1 \mid |n| < 1\}.$$

Par la multiplicativité, c'est un nombre premier.

Par le théorème de BÉZOUT et l'inégalité ultramétrique, si $u \in \mathbf{N}$ est premier à p, alors $|u| = 1$. En effet, si $u \wedge p = 1$, alors il existe $r, q \in \mathbf{Z}$ tel que $ru + qp = 1$, donc $|ru| = |1 - qp|$. Mais $|qp| = |p||q| < 1$ et $|1| = 1$, donc $|1 - qp| = 1 = |r||u|$, donc $|u| = 1$.

Par conséquent, si $u \coloneqq p^r u' \in \mathbf{N}$ avec $u' \wedge p = 1$, alors $|u| = |p|^r |u'| = |p|^r = \beta^r$ avec $\beta \coloneqq |p| < 1$. Les valeurs absolues définissent alors la même boule unité fermée ce qui montre leur équivalence. □

DÉFINITION 2.19. Une valeur absolue approximative est une fonction $f\colon K \to \mathbf{R}_+$ vérifiant

1. pour tout $x \in K$, on a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. pour tous $x, y \in K$, on a $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. il existe $C > 0$ tel que $f(x + y) \leqslant C \max(f(x), f(y))$.

PROPOSITION 2.20. Toute valeur absolue est approximative avec $C = 2$.

◇ REMARQUE. Remarquons, si $r \in \mathbf{N}$ et $x_1, \dots, x_{2^r} \in K$, on a

$$f(x_1 + \dots + x_{2^r}) \leqslant C^r \max_{i \in [\![1, 2^r]\!]} f(x_i).$$

Ainsi, si $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n \in K$, on a

$$f(x_1 + \dots + x_n) \leqslant C^{1 + \log_2 n} \max_{i \in [\![1, n]\!]} f(x_i) \leqslant (2n)^\beta \max_{i \in [\![1, n]\!]} f(x_i) \leqslant (2n)^\beta \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

où on a écrit $C = 2^\beta$. On en déduit que $f(n) \leqslant (2n)^\beta$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

LEMME 2.21. Soit f une valeur absolue approximative avec $C = 2$. Alors f est une valeur absolue.

Preuve Ici, on a $C = 2$ et $\beta = 1$. Alors pour tous $a, b \in K$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} f([a+b]^n) &= f\Big(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) \\ &\leqslant (2[n+1]) \sum_{k=0}^n f\left(\binom{n}{k}\right) f(a)^k f(b)^{n-k} \\ &\leqslant 4(n+1) f(a)^n f(b)^n, \end{aligned}$$

donc

$$f(a + b) \leqslant 4^{1/n} (n+1)^{1/n} (f(a) + f(b)).$$

En laissant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $f(a + b) \leqslant f(a) + f(b)$. □

LEMME 2.22. Soit f une valeur absolue approximative bornée sur les entiers. Alors f est une valeur absolue ultramétrique.

Preuve Soit $x \in K$ tel que $f(x) \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} f(1+x)^n = f([1+x]^n) &= f\Big(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k\Big) \\ &\leqslant (2[n+1])^\beta \sum_{k=0}^n B f(x)^k \\ &\leqslant (2[n+1])^\beta B(n+1). \end{aligned}$$

En prenant la racine n-ième et en laissant tendre n vers $+\infty$, on a $f(1 + x) \leqslant 1$. Cela montre que f est ultramétrique. □

THÉORÈME 2.23 *(OSTROWSKI-II).* Toute valeur absolue f (approximative) non triviale sur $\mathbf{Q}$ est équivalente à une valeur absolue $|\cdot|_p$ pour un premier p ou $p = \infty$.

Preuve Par le lemme, le théorème est vrai si f est bornée sur $\mathbf{N}$. On note $C = 2^\alpha > 0$ la constante associée à f.

• *Étape 1.* Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrons que, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a

$$f(m) \leqslant \max(1, f(n)^{\log_2 m/\log_2 n}).$$

Soit $m \geqslant 1$ un entier. On écrit $m = \sum_{i=0}^r m_i n^i$ avec $m_1, \dots, m_r \in [\![0, n-1]\!]$ et $r \leqslant \log_2 m/\log_2 n$. On pose

$$A_f(n) \coloneqq \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} f(k).$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(m) &\leqslant (2(r+1))^\alpha \max_{0\leqslant i\leqslant r} f(m_i n^i) \\
&\leqslant (2(r+1))^\alpha A_n(f) \max_{0\leqslant i\leqslant r} f(n)^i \\
&\leqslant (2(r+1))^\alpha A_n(f) \max(1, f(n)^r) \\
&\leqslant \left(2\left(\frac{\log_2 m}{\log_2 n}\right)\right)^\alpha A_n(f) \max(1, f(n)^{\log_2 m/\log_2 n})
\end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on remplace m par m^k et on prend la racime k-ième ce qui donne

$$f(m) = f(m^k)^{1/k} \leqslant \left(2\left(k\frac{\log_2 m}{\log_2 n}\right)\right)^{\alpha/k} A_n(f)^{1/k} \max(1, f(n)^{\log_2 m/\log_2 n})$$

En laissant tend k vers $+\infty$, comme $A_f(n)^{1/k} \to 1$ et $k^{1/k} \to 1$, on obtient que l'inégalité voulue.

• *Étape 2.* Supposons qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que $f(n) < 1$. D'après l'étape 1, pour tout $m \geqslant 1$, on a $f(m) \leqslant 1$. Par le lemme précédent, le théorème est vérifié.

• *Étape 3.* Supposons que $f(n) \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour tous $n, m \geqslant 2$, on a

$$f(m)^{1/\log_2 m} \leqslant f(n)^{1/\log_2 n}.$$

On remarque que les entiers n et m jouent des rôles symétriques, donc l'inégalité précédente est en fait une égalité. On écrit $f(2) = 2^\beta$ avec $\beta > 0$. En particulier, pour $n = 2$, pour tout $m \geqslant 1$, on a $f(m) = 2^{\beta \log_2 m} = m^\beta$ ce qui revient à dire $f(m) = |m|^\beta$. Ensuite, la multiplicativité donne $f(-1) = 1$, donc $f(m) = |m|^\beta$ pour $m \in \mathbf{Z}$. Par la multiplicativité, on montre que l'égalité est aussi vraie sur $\mathbf{Q}$. ☐

2.5 EXTENSION DE $|\cdot|_p$ DE $\mathbf{Q}_p$ À DES EXTENSIONS DE CORPS

Soit K un corps contenant $\mathbf{Q}_p$ comme sous-corps. Alors K est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel. On suppose que celui-ci est de dimension finie $d \coloneqq \dim_{\mathbf{Q}_p} K \in \mathbf{N}$ sur $\mathbf{Q}_p$.

◇ REMARQUE. Un autre point de vue est le suivant. Soit K un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbf{N}$. On suppose que celui-ci est muni d'une structure de corps telle que l'application $\alpha \in \mathbf{Q}_p \longmapsto \alpha 1_K$ soit un homomorphisme (injectif) de corps.

EXERCICE 2.2. Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel K, *i. e.* vérifiant $\|\alpha x\| = |\alpha|_p \|x\|$ pour tous $x \in K$ et $\alpha \in \mathbf{Q}_p$. Montrer que les deux normes sont équivalentes, *i. e.* il existe $c, C > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad c\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant C\|x\|.$$

▷ EXEMPLE. On se donne une base $(x_1, \dots, x_d)$ du $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel K. Soit $y \in K$. On le décompose sous la forme $y = \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{Q}_p^d$. On pose

$$\|y\| \coloneqq \max_{1\leqslant i\leqslant d} |\alpha_i|_p.$$

L'application $\|\cdot\|$ définit alors une norme sur K.

On cherche une valeur absolue $|\cdot|_K$ sur K étendant $|\cdot|_p$. Si une telle valeur absolue existe, alors c'est une norme de $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel. Si deux telles valeurs absolues $|\cdot|_K$ et $|\cdot|$ existent, alors il existe $c, C > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad c|x|_K \leqslant |x| \leqslant C|x|_K,$$

donc

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in K, \quad c^{1/k}|x|_K \leqslant |x| \leqslant C^{1/k}|x|_K$$

et, en laissant tend k vers $+\infty$, cela montre que $|\cdot|_K$ et $|\cdot|$ coïncident sur K.

Définition et construction de $|\cdot|_K$. Soit $x \in K$. Alors la famille $(1, x, \dots, x^d)$ est liée par une relation linéaire à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$. Autrement dit, il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}_p[t]$ tel que $P(x) = 0$ et $\deg P \leqslant d$. On choisit un tel polynôme P de degré minimal et unitaire qu'on note P_x, appelé *polynôme minimal* de x. Il est unique, il suffit de faire une division euclidienne dans $\mathbf{Q}_p[t]$. On pose alors $N(x) \coloneqq P_x(0)$.

Lemme 2.24. Soit $\mathbf{Q}_p(x) \subset K$ le corps engendré par x. Soit

$$\ell_x \colon \left| \begin{aligned} \mathbf{Q}_p(x) &\longrightarrow \mathbf{Q}_p, \\ y &\longmapsto xy. \end{aligned} \right.$$

1. Le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbf{Q}_p(x)$ est de dimension $\deg P_x$.
2. On a $N(x) = \det \ell_x = (-1)^{\deg P_x} \prod_{i=1}^d y_i$ où les éléments y_i sont les racines de P_x dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$.

Preuve Remarquons d'abord que le sous-corps $\mathbf{Q}_p(x)$ est l'ensemble des fonctions rationnelles $P(t)/Q(t)$ évaluées en x et c'est le plus petit sous-corps de K contenant x.

Montrons le premier point. On écrit $P_x(t) = a_0 + \dots + a_{d_x-1}t^{d_x-1} + t^{d_x}$. Si on avait $\dim \mathbf{Q}_p(x) < d_x$, alors la famille $(1, x, \dots, x^{\dim \mathbf{Q}_p(x)})$ serait liée ce qui contredirait le choix de P_x. Donc $\dim \mathbf{Q}_p(x) \geqslant d$. De plus, on peut montrer que la famille $(1, x, \dots, x^{d_x-1})$ forme une base de $\mathbf{Q}_p(x)$ en étudiant le noyau de l'application $P \in \mathbf{Q}_p[t] \longmapsto P(x) \in K$. Cela conclut que $\dim \mathbf{Q}_p(x) = d$.

Montrons le second point. L'opérateur ℓ_x envoie 1 sur x, …, x^{d_x-1} sur $x^{d_x} = -a_0 - \dots - a_{d_x-1}xd_x - 1$, donc la matrice de ℓ_x dans la base $(1, x, \dots, x^{d_x-1})$ est la matrice compagnon associée au polynôme P_x, donc son déterminant vaut $\det \ell_x = a_0 = P_x(0)$ ce qui termine la preuve. □

Définition 2.25. On pose

$$|x|_K \coloneqq |N(x)|_p^{1/d_x}.$$

▷ Exemple. On considère $p \coloneqq 3$ et $P(t) \coloneqq t^2 - 3$. Alors les racines réels $\pm\sqrt{3}$ ne sont pas dans $\mathbf{Q}_3$. En effet, supposons le contraire. Alors il existe $y \in \mathbf{Q}_3$ tel que $y^2 = 3$, donc $|y|_3^2 = 1/3$, donc $|y|_3 = 1/\sqrt{3}$. Cependant, les valeurs absolue de $|\cdot|_3$ sur $\mathbf{Q}_3$ sont les entiers 3^n avec $n \in \mathbf{Z}$ ce qui est impossible. Donc les racines de P existent dans l'extension $\mathbf{Q}_p[t]/\langle P \rangle$ de $\mathbf{Q}_p$ qui est de degré 2. Les deux racines $\pm\sqrt{3}$ vérifie l'équation $|y|_3 = 1/\sqrt{3}$.

◇ Remarque. Si $x \in \mathbf{Q}_p$, alors $P_x(t) = t - x$ et $|x|_K = |x|_p$. Donc la valeur absolue $|\cdot|_K$ coïncident avec la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ sur $\mathbf{Q}_p$.

Lemme 2.26. Soit $x \in K$. On note $d \coloneqq \dim_{\mathbf{Q}_p} K$ et $L_x \colon K \to K$ la multiplication par x. Alors

$$|x|_K = |\det L_x|_p^{1/d}.$$

Preuve L'ensemble $\mathbf{Q}_p(x) \subset K$ est un sous-corps de K, donc le corps K est un $\mathbf{Q}_p(x)$-espace vectoriel. On choisit une base $(z_1, \dots, z_s)$ du $\mathbf{Q}_p(x)$-espace vectoriel K. Alors $K = \mathbf{Q}_p(x)z_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{Q}_p(x)z_s$, donc $d = d_x s$. De plus, l'opérateur L_x agit diagonalement, *i. e.* on peut écrire la matrice de L_x dans cette base sous la forme

$$\operatorname{diag}(\ell_x, \dots, \ell_x)$$

où les blocs sont respectivement de tailles $\dim \mathbf{Q}_p(x)z_i$. On en déduit que $\det L_x = (\det \ell_x)^s$, donc

$$|\det L_x|_p^{1/d} = |\det \ell_x|_p^{1/d_x} = |x|_K.$$ □

Théorème 2.27. Cette fonction $|\cdot|_K \colon K \to \mathbf{R}_+$ est bien une valeur absolue et il s'agit de l'unique extension de la valeur absolue sur $|\cdot|_p$ sur K.

Preuve Montrons qu'elle est multiplicative. Pour $x, y \in K$, on a $L_x \circ L_y = L_{xy}$, donc $\det(L_x \circ L_y) = \det L_x \det L_y$, donc $|xy|_K = |x|_K |y|_K$. Par ailleurs, elle étend $|\cdot|_p$ sur K, donc elle est inférieure à 1 sur $\mathbf{Z}$. Pour tout $x \in K$, on a bien $|x|_K = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Enfin, elle est unique par une remarque précédente. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Remarquons le résultat suivant. □

◇ Remarque. La fonction $x \longmapsto |x|_K^d$ est continue par rapport à la topologie de $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie (*i. e.* par rapport à la topologie donnée par n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel K). En effet, la fonction $x \longmapsto \det L_x$ est polynomiale : si on fixe une base $(z_1, \dots, z_d)$ et qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^d \alpha_i z_i$, alors c'est un polynôme en les scalaires α_i. On en déduit que la fonction $x \longmapsto |\det L_x|_p$ est continue ce qui donne la conclusion.

On peut en déduire le résultat suivant. Soit $\|\cdot\|$ un norme sur le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel K. Alors la sphère unité $\{x \in K \mid \|x\| = 1\}$ de K est un compact, donc il existe $a, A > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad a\|x\| \leqslant |x|_K \leqslant A\|x\|.$$

Suite de la preuve Pour tous $x, y \in K$, on a alors

$$|x+y|_K \leqslant A\,\|x+y\| \leqslant 2A\max(\|x\|, \|y\|) \leqslant \frac{2A}{a}\max(|x|_K, |y|_K).$$

L'application $|\cdot|_K$ est donc ultramétrique, donc elle vérifie l'inégalité triangulaire. Finalement, c'est une valeur absolue sur K. ☐

BILAN. Pour toute extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, il existe une unique extension $|\cdot|_K$ de la valeur absolue $|\cdot|_p$ à K. Dans la suite, on va la noter $|\cdot|_p$. On peut donc l'étendre à la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$. Ceci permet d'étendre le théorème de MONSKY pour des triangles dont les sommets sont à coordonnées dans $\overline{\mathbf{Q}}$.

2.6 Un exemple de phénomène dynamique

Soit $P \in \mathbf{C}[z]$ tel que $P(0) = 0$ de degré supérieur à 2. Écrivons $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots + a_d z^d$ avec $d \geqslant 2$. Soit $s \in \mathbf{C}^*$. Conjugaisons P par l'application $m\colon z \longmapsto sz$, *i. e.* on considère l'application $z \longmapsto s^{-1}P(sz)$ qui envoie a_d sur $s^{d-1}a_d$. Quitte à choisir $s \in \mathbf{C}^*$ tel que $s^{d-1} = 1/a_d$, on se ramène au cas $a_d = 1$

DÉFINITION 2.28. Soit $P \in \mathbf{C}[z]$. Un complexe $z \in \mathbf{C}$ est un *point périodique* telle que l'orbite $(P^n(z))_{n \in \mathbf{N}^*}$ repasse par z, *i. e.* il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $P^n(z) = z$ où on note $P^n \coloneqq P^{\circ n} = P \circ \cdots \circ P$.

THÉORÈME 2.29 *(CREMER)*. Si la suite $(|\lambda^n - 1|^{1/d^n})_{n \in \mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergeant vers 0, alors le polynôme P possède des orbites périodiques $z_i \neq 0$ arbitrairement proche de 0.

Preuve Soit $n \in \mathbf{N}$. Le polynôme $P^n(z) - z$ est de degré d^n et unitaire. Son coefficient linéaire vaut λ^n. Alors l'égalité $P^n(z) - z = 0$ peut se réécrire sous la forme

$$z \prod_{j=1}^{d^n-1} (z - z_j) = 0$$

pour des complexes $z_j \in \mathbf{C}$ et ceux-ci vérifie

$$\Big(\prod_{j=1}^{d^n-1} |z_j|\Big)^{1/(d^n-1)} = |\lambda^n - 1|^{1/(d^n-1)}$$

par les relations coefficients-racines. Ainsi, il existes des complexes $z_j \in \mathbf{C}$ arbitrairement proche de 0 en choisissant une bonne extraction. ☐