Théorie des distributions et analyse de Fourier

(danf)

Arnaud Debussche

1A maths 2019, ENS de Rennes

Chapitre 1 – Introduction et rappels 1
1.1 Motivations 1
1.2 Fonctions à supports compacts 2
Chapitre 2 – Distributions, exemples et opérations 9
2.1 Distributions et exemples 9
2.2 Dual topologique de $\mathscr{D}(\Omega)$ 11
2.3 Convergence de distributions 11
2.4 Dérivation des distributions 12
2.5 Multiplication 14
2.6 Localisation et recollement 15
2.7 Composition 17
2.8 Dérivation et intégration 17
Chapitre 3 – Convolution de distributions 19
3.1 Support d'une distribution 19
3.2 Distributions à support compact 19
3.3 Convolution $\mathscr{D}' * \mathscr{D}$ 22
3.4 Convolution $\mathscr{D}' * \mathscr{E}'$ 24
Chapitre 4 – Transformation de Fourier 27
4.1 La classe de Schwarz 27
4.2 Transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 29

Chapitre 1
Introduction et rappels

1.1 Motivations 1
1.2 Fonctions à supports compacts 2
1.2.1 Topologies des espaces de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ . . 2
1.2.2 Formule de Taylor avec reste intégrale 2
1.2.3 Support d'une fonction 3
1.2.4 Régularisation 3
1.2.5 Retour sur le support 4
1.2.6 Densité des fonctions continues à support compact 5
1.2.7 Fonctions plateaux et partitions de l'unité 6

1.1 Motivations

Soit $\delta > 0$. On considère une fonction φ_δ de masse 1, *i. e.* d'intégrale égale à 1 sur $\mathbb{R}$, de « hauteur » $1/\delta$ et de « largeur » δ comme dans la figure 1.1. En physique, on obtient une masse ponctuelle quand $\delta \to 0$. Cependant,

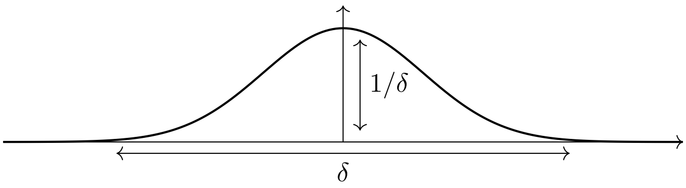

Figure 1.1 – Graphe de la fonction φ_δ

une telle fonction de masse 1 est impossible. Ainsi, on doit introduire la notion de distribution et, on le verra par la suite, la forme linéaire $f \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi_\delta(x) f(x) \,\mathrm{d}x$ où les fonctions f sont assez régulières.

Un autre exemple est le dipôle. On considère deux particules à distances $\pm\delta$ de l'origine et une fonction e impaire de masse 1 réalisant une bosse positive en -1 et une bosse positive en $+1$ comme dans la figure 1.2. Physiquement, on représente le champ magnétique par la fonction e_δ définie par $e_\delta(x) = \delta^{-2} e(x/\delta)$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e_\delta(x) f(x) \,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e_\delta(-x) f(-x) + e_\delta(x) f(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e_\delta(x)[f(x) - f(-x)] \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} y e(y) \frac{f(\delta y) - f(-\delta y)}{y} \,\mathrm{d}x \\
&\longrightarrow 2 \int_0^{+\infty} y e(y) \,\mathrm{d}y \times f'(0)
\end{aligned}$$

par le théorème de convergence dominée et le théorème des accroissements finis.

Dernier exemple. Soit $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi_n(t) = n^{-1}\varphi(nt)$. Alors $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant n^{-1}\|\varphi\|_\infty \to 0$, donc la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. Cependant, il n'y a pas de convergence de la suite $(\varphi'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cependant, si f est à support compact, alors

$$\langle \varphi'_n, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi'_n(t) f(t) \,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) f'(t) \,\mathrm{d}t,$$

donc

$$|\langle \varphi'_n, f\rangle| \leqslant n^{-1}\|\varphi\|_\infty \|f'\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

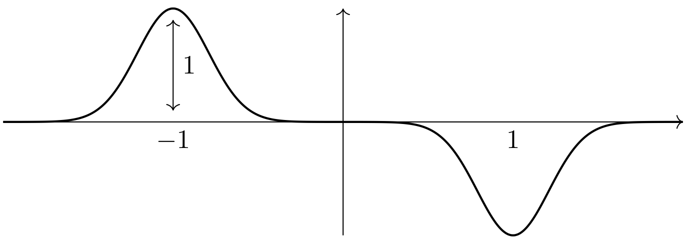

Figure 1.2 – Graphe de la fonction e

1.2 Fonctions à supports compacts

1.2.1 Topologies des espaces de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Notations. Dans tout la suite de ce cours, on adoptera ces notations :

- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$;
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une application ;
- $f_1, \dots, f_n$ sont les composantes de f ;
- $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}^n$ différentiables à l'ordre $k \geqslant 0$ et de différentielle continue ;
- $\mathscr{C}^k(\Omega) \coloneqq \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$;
- $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \coloneqq \bigcap_{k \geqslant 1} \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$;
- pour tout $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \coloneqq \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leqslant k$ et toute $f \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, on note

$$\partial^\alpha f \coloneqq \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}.$$

Cette notation n'est pas ambiguë par le théorème de Schwarz.

Topologie de $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Soit $(K_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts telle que $\Omega = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} K_\ell$. Une telle suite existe en prenant

$$K_\ell = \{x \in \Omega \mid \|x\| < \ell,\ \mathrm{d}(x, \partial\Omega) \geqslant 1/\ell\}.$$

Pour $f \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_\ell^k(f) \coloneqq \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in K_\ell} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Les applications p_ℓ^k ne sont pas des normes car elles ne vérifient pas l'axiome de séparation, ce sont seulement des semi-normes. Cependant, on a $f = 0$ si et seulement si $p_\ell^k(f) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour $f, g \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, on pose

$$d(f, g) \coloneqq \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{\min(p_\ell^k(f - g), 1)}{2^\ell} < +\infty.$$

L'application d définit une distance sur $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.1. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Alors

1. on a $d(f_n, f) \to 0$ si et seulement si $p_\ell^k(f_n - f) \to 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$;
2. l'ensemble $\mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ muni de cette distance est un espace complet, appelée *espace de Fréchet*.

Topologie de $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Pour $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, on pose

$$d(f, g) \coloneqq \sum_{k, \ell \in \mathbb{N}} \frac{\min(p_\ell^k(f - g), 1)}{2^{k+\ell}}.$$

Cela définit une distance sur $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

1.2.2 Formule de Taylor avec reste intégrale

Notations. Soient $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \beta \coloneqq (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ et $x \coloneqq (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. On note

- $x^\alpha \coloneqq x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \in \mathbb{R}$;
- $\alpha \leqslant \beta$ si et seulement si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, d]\!]$;
- $\alpha! \coloneqq \alpha_1! \cdots \alpha_d!$;
- $\binom{\alpha}{\beta} \coloneqq \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$.

Alors, par récurrence, on peut montrer les résultats suivants.

Proposition 1.2. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant k$ et $f, g \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} g \quad \text{et} \quad (x_1 + \dots + x_d)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

NOTATIONS. Pour $f \in \mathscr{C}^k(\Omega)$ avec $k \geqslant 1$, on note

$$\nabla f \coloneqq (\partial_1 f, \dots, \partial_d f).$$

On a $df(x) \cdot h = \langle \nabla f(x), h \rangle$ pour tout $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tels que $x + h \in \Omega$. Pour $f \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$, on pose

$$\operatorname{div} f \coloneqq \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Pour $f \in \mathscr{C}^k(\Omega)$ avec $k \geqslant 2$, on pose

$$\nabla f \coloneqq \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i} = \operatorname{div}(\nabla f)$$

PROPOSITION 1.3 *(formule de TAYLOR avec reste intégrale).* Soient $f \in \mathscr{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $[a, b] \subset \Omega$. Alors

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) + \sum_{|\alpha| = k+1} (b-a)^\alpha \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \partial^\alpha f(ta + (1-t)b) \, dt.$$

1.2.3 Support d'une fonction

DÉFINITION 1.4. Le *support* d'une fonction $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\operatorname{supp} f \coloneqq \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

On dit que f est à support compact si son support est compact. Pour $k \in [1, \infty]$, on note $\mathscr{C}_0^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^k(\Omega)$ à support compact. On note $\mathscr{D}(\Omega) \coloneqq \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$.

◇ REMARQUE. La topologie de ces espaces est compliquée.

▷ EXEMPLES. – Dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. La fonction

$$\rho_{a,b} \colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto f(a-x) f(x-b) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le support $[a, b]$ est compact.

– En dimension d, si $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $\beta \coloneqq (\beta_1, \dots, \beta_d)$ sont tels que $\alpha \leqslant \beta$, alors la fonction

$$\rho_{a,b} \colon \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_d) & \longmapsto & \rho_{a_1,b_1}(x_1) \cdots \rho_{a_d,b_d}(x_d) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact. De même, la fonction $\theta \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(x) = f(1 - \|x\|^2)$ en est une Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. On considère

$$F_{a,b} \colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \dfrac{\int_{[-\infty,x]} \rho_{a,b} f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}} \rho_{a,b}(x) \, dx}. \end{array} \right.$$

Par composition, la fonction $G_{a,b}$ définie par $G_{a,b}(x) = 1 - F_{a,b}(1 - \|x\|^2)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

1.2.4 Régularisation

DÉFINITION 1.5. Soient $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables définies presque partout. On dit que f et g sont *convolable* si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \quad y \longmapsto f(x-y) g(y) \end{array} \right.$$

est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et on pose alors

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \, dy.$$

◇ REMARQUE. Deux fonctions f et g sont convolables si et seulement si les fonctions g et f sont convolables. Alors $f * g = g * f$. De plus, cette notion concerne les classes d'équivalence.

NOTATION. On note $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Il a une structure d'espace de FRÉCHET complet par les semi-normes définies par

$$p_n(f) \coloneqq \int_{\mathrm{B_f}(0,n)} |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

▷ EXEMPLES. Soient $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad |f(x-y)g(y)| \leqslant \sup_{z\in\mathbb{R}^d} |f(z)|\,|g(y)|\,\mathbb{1}_{x-\operatorname{supp} f}(y),$$

donc la fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Donc les fonctions f et g sont convolables.

PROPOSITION 1.6 *(inégalité de YOUNG)*. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ avec $p, q \geqslant 1$. Alors les fonctions sont toujours convolables. On suppose que $1/p + 1/q \geqslant 1$. Si $r \geqslant 1$ est tel que $1/p+1/q = 1+1/r$, alors

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}. \tag{$*$}$$

De plus, si $1/p + 1/q = 1$, alors $f * g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ tend vers 0 à l'infini.

Preuve Démontrons cette proposition dans deux cas particuliers.

- *Cas n° 1.* On suppose que $p = q = 1$. Le théorème de FUBINI donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

donc $(x,y) \longmapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Alors $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. De plus, l'inégalité triangulaire donne l'inégalité $(*)$.

- *Cas n° 2.* On suppose que $q = 1$ et $r = p$. En notant p' le conjugué de p, l'inégalité de HÖLDER donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\right| \mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p\,|g(y)|\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^{p/p'} \mathrm{d}x \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^{1+p/p'} \\ &= \|f\|_p^p \,\|g\|_1^p.\end{aligned}$$

Le même raisonnement que précédemment montre que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ puis l'inégalité $(*)$. □

PROPOSITION 1.7. Soient $f \in \mathscr{C}^k_0(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)$.

Preuve On suppose d'abord que $k = 1$. On a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |f(x-y)g(y)| \leqslant \sup_{z\in\operatorname{supp} f} |f(z)|\,|g(y)|\,\mathbb{1}_{x-\operatorname{supp} f}(y),$$

La support de f est contenue dans une certaine boule $\mathrm{B_f}(0,M)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ Alors

$$\mathbb{1}_{x-\operatorname{supp} f}(y) \leqslant \mathbb{1}_{\mathrm{B_f}(0,M)}(y),$$

donc

$$|f(x-y)g(y)| \leqslant \sup_{z\in\operatorname{supp} f} |f(z)|\,|g(y)|\,\mathbb{1}_{\mathrm{B_f}(0,M)}(y).$$

Le théorème de convergence dominée conclut alors que $f*g$ est continue sur $\mathrm{B_f}(0,M)$ et donc sur $\mathbb{R}^d$. On procède de même si f est de classe $\mathscr{C}^k$. □

1.2.5 Retour sur le support

◇ REMARQUE. Si $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, on a $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}$ et pourtant $f = 0$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

DÉFINITION 1.8. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable. On pose $\mathrm{O}(f)$ l'ensemble des ouverts $O \subset \Omega$ tels que $f = 0$ presque partout sur O. On remplace la précédente définition du support par

$$\operatorname{supp} f \coloneqq \Big(\bigcup_{O\in\mathrm{O}(f)} O\Big)^{\mathrm{c}}.$$

Proposition 1.9. L'ensemble $(\operatorname{supp} f)^c$ est le plus grand ouvert tel que $f = 0$ presque partout sur celui-ci.

Preuve Il faut montrer que $(\operatorname{supp} f)^c \in \mathrm{O}(f)$. L'ensemble $(\operatorname{supp} f)^c$ est ouvert comme union d'ouverts. On pose

$$V := \bigcup_{\substack{x\in\mathbb{Q}^d\cap\Omega\\ r\in\mathbb{Q}\\ f=0 \text{ pp sur } \mathrm{B}(x,r)}} \mathrm{B}(x,r).$$

Alors $f = 0$ presque partout sur V, donc $V \subset (\operatorname{supp} f)^c$ et $V \in \mathrm{O}(f)$.

Réciproquement, montrons que $V \supset (\operatorname{supp} f)^c$. Soit $z \in (\operatorname{supp} f)^c$. Il existe $O \in \mathrm{O}(f)$ tel que $z \in O$. Comme O est un ouvert, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\mathrm{B}(z,r) \subset O$. Il existe $\tilde{z} \in \mathbb{Q}^d$ tel que $|z-\tilde{z}| < r/4$. Alors $\mathrm{B}(\tilde{z}, r/2) \subset \mathrm{B}(z,r) \subset O$ et $f = 0$ presque partout sur $\mathrm{B}(\tilde{z}, r/2)$ avec $z \in \mathrm{B}(\tilde{z}, r/2)$. On en déduit que $z \in V$. Finalement, on a $V = (\operatorname{supp} f)^c \in \mathrm{O}(f)$. □

Proposition 1.10. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$. Alors $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$.

Preuve On a

$$\overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}^{\mathrm{c}} = \overset{\circ}{\widehat{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}} =: U.$$

On a $f = 0$ presque partout sur U, donc $U \subset (\operatorname{supp} f)^c$. De plus, comme $f = 0$ presque partout sur $(\operatorname{supp} f)^c$, on a $f = 0$ sur $(\operatorname{supp} f)^c$ par continuité, donc $(\operatorname{supp} f)^c \subset U$ ce qui montre l'égalité. □

Proposition 1.11. Soient $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convolables. Alors $\operatorname{supp} f * g \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

◇ Remarque. On montre facilement que $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ si un des deux supports est compact.

Preuve En choisissant de bons représentants, on prend des fonctions f et g telles que $f = 0$ sur $(\operatorname{supp} f)^c$ et $g = 0$ sur $(\operatorname{supp} g)^c$. Soit $z \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a soit $z - y \notin \operatorname{supp} f$ soit $y \notin \operatorname{supp} g$, donc soit $f(z-y) = 0$ soit $g(y) = 0$, donc $f(z-y)g(y) = 0$. Donc la fonction $y \longmapsto f(z-y)g(y)$ est bien intégrable et $f * g(z) = 0$. On a ainsi montré que $f * g = 0$ sur $(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)^c$ et donc sur $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}^{\mathrm{c}}$ ce qui montre l'inclusion. □

1.2.6 Densité des fonctions continues à support compact

Définition 1.12. On appelle *suite régularisante* toute famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

- $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
- $\rho_\varepsilon \geqslant 0$;
- il existe $r_\varepsilon > 0$ tel que $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subset \mathrm{B_f}(0, r_\varepsilon)$;
- $r_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

▷ Exemple. Soit $\theta \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On considère la fonction $\theta\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp[-(1-\|x\|^2)^{-1}] & \text{sur } \mathrm{B}(0,1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors une suite régularisante $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est donnée par

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \frac{\theta(x/\varepsilon)}{\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Proposition 1.13. Soit $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Alors la suite $(\rho_\varepsilon * f)_{\varepsilon>0}$ est appartient à $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ et elle converge uniformément vers f.

Preuve Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x) f(x-y)\,\mathrm{d}y - f(x) \\ &= \int_{\mathrm{B}(0,r_\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

donc

$$|\rho_\varepsilon * f(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathrm{B}(0,r_\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)\,|f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \sup_{|r|\leqslant r_\varepsilon} |f(x-y)-f(x)|$$

où ce dernier terme converge uniformément vers 0 en x en utilisant le fait que f est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $\rho_\varepsilon * f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme $\rho_\varepsilon \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $\rho_\varepsilon * f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc

$$\operatorname{supp} \rho_\varepsilon * f \subset \overline{\operatorname{supp} \rho_\varepsilon + \operatorname{supp} f} \subset \mathrm{B_f}(0, r_\varepsilon) + \operatorname{supp} f,$$

donc le support de $\rho_\varepsilon * f$ est fermé dans un compact, donc il est compact. □

Théorème 1.14. Soit $p \in [1, \infty[$. Alors l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Voir le cours d'intégration de Lebesgue. □

Théorème 1.15. Soit $p \in [1, \infty[$. Alors l'espace $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour toute suite régularisante $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, on a $\rho_\varepsilon * f \to f$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$

Preuve Soit $\eta > 0$. D'après le théorème précédent, il existe $g_\eta \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\|f - g_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \eta.$$

Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite régularisante. Alors $\|\rho_\varepsilon * g_\eta - g_\eta\|_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ et, si $\operatorname{supp} g_\eta \subset \mathrm{B_f}(0, r_\eta)$, alors $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon * g_\eta \subset \mathrm{B_f}(0, r_\eta + 1)$. Alors

$$\|\rho_\varepsilon * g_\eta - g_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \lambda(\mathrm{B}(0, r_\eta+1))^{1/p} \, \|\rho_\varepsilon * g_\eta - g_\eta\|_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|f - \rho_\varepsilon * f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|f - g_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\eta - \rho_\varepsilon * g_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_\varepsilon * g_\eta - \rho_\varepsilon * f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \|f - g_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\eta - \rho_\varepsilon * g_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\eta - f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant 2\eta + \|g_\eta - \rho_\varepsilon * g_\eta\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 3\eta
\end{aligned}$$

en choisissant ε assez petit. □

1.2.7 Fonctions plateaux et partitions de l'unité

Théorème 1.16. Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et O un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tels que $K \subset O$. Alors il existe $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

- $\chi = 1$ sur un ouvert U tel que $K \subset U$;
- $\operatorname{supp} \chi \subset O$.

Preuve Soit $x \in K$. Il existe $r_x > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r_x) \subset O$. On considère la fonction $\rho\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(y) = \begin{cases} \exp[(\|y\|^2 - 1)^{-1}] & \text{si } \|y\| \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose alors la fonction $F_x\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_x(y) = \rho\left(\frac{x-y}{r_x}\right).$$

Alors $F_x \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{supp} F_x = \mathrm{B_f}(x, r_x)$. On note

$$O_x \coloneqq \{y \in \mathrm{B_f}(x, r_x) \mid F_x(y) > 1/2e\}.$$

Alors $K \subset \bigcup_{x\in K} O_x$. Par compacité de K, il existe $x_1, \dots, x_N \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^N O_{x_i}$. On considère

$$g\colon y \in \mathbb{R}^d \longmapsto 2e \sum_{i=1}^N F_{x_i}(y) \quad \text{et} \quad \psi\colon t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\int_{-\infty}^t \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \exp(-1/x(x-1)) \,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} vs \exp(-1/x(x-1)) \,\mathrm{d}x}.$$

Alors $\psi = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $\psi = 1$ sur $[1, +\infty[$. On pose alors $\chi \coloneqq \psi \circ g$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par composition. Si $y \in U \coloneqq \bigcup_{i=1}^N O_{x_i}$, alors $g(y) > 1$, donc $\chi(y) = \psi(g(y)) = 1$. Alors

$$\operatorname{supp} \chi \subset \bigcup_{i=1}^N \mathrm{B_f}(x_i, r_{x_i}) \subset O.$$ □

Théorème 1.17. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Preuve Soit $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. On prolonge f en une fonction $\tilde{f} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ en posant $\tilde{f} = 0$ sur Ω^{c}. Soit $\varepsilon > 0$. Par densité, il existe $g_\varepsilon \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\|\tilde{f} - g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leqslant n,\ d(x, \partial\Omega) \geqslant 1/n\}$$

et on considère $\chi_n \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi_n = 1$ sur un voisinage ouvert de K_n et $\operatorname{supp} \chi_n \subset \Omega$. Comme $|g_\varepsilon \chi_n| \leqslant |g_\varepsilon|$ pour $n \in \mathbb{N}$, le théorème de convergence dominée donne $g_\varepsilon \chi_n \to g_\varepsilon$ dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Pour $n = n_\varepsilon$ assez grand, on a alors $\|g_\varepsilon \chi_n - g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon$, donc l'inégalité triangulaire assure

$$\begin{aligned}\|f - g_\varepsilon \chi_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} &\leqslant \|f - g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|g_\varepsilon - g_\varepsilon \chi_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \\ &\leqslant \|\tilde{f} - g_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\varepsilon - g_\varepsilon \chi_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.18 *(partition de l'unité).* Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. On dispose d'ouverts $O_1, \dots O_n$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n O_i \quad \text{et} \quad O_i \cap K \neq \emptyset$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors il existe $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que

- $\operatorname{supp} \chi_i \subset O_i$ et $\operatorname{Im} \chi_i \subset [0, 1]$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;
- $\chi_1 + \dots + \chi_n = 1$ sur un voisinage ouvert de K

Preuve Il existe des compacts K_1, …, K_n telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i \quad \text{et} \quad K_i \subset O_i,\ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

En effet, soit $x \in K$. Il existe $i_x \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in O_{i_x}$. Comme O_{i_x} est un ouvert, il existe $r_x > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r_x) \subset O_{i_x}$. Ainsi

$$K \subset \bigcup_{x \in K} \mathrm{B}(x, r_x/2).$$

Par compacité, il existe $x_1, \dots, x_N \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{\ell=1}^K \mathrm{B}(x_\ell, r_{x_\ell}/2).$$

Il suffit alors de poser $K_i \coloneqq \bigcup_{x_\ell \in O_i} \mathrm{B_f}(x_\ell, r_{x_\ell}/2)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cela montre l'existence de tels compacts.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par le théorème précédent, il existe $\tilde{\chi}_i \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

- $\tilde{\chi}_i = 1$ sur un voisinage ouvert $\tilde{O}_i$ de K_i ;
- $\operatorname{supp} \tilde{\chi}_i \subset O_i$ et $\operatorname{Im} \tilde{\chi}_i \subset [0, 1]$.

On note $\tilde{O} = \tilde{O}_1 \cup \dots \cup \tilde{O}_n$. Alors $K \subset \tilde{O}$. Soit $\tilde{\chi} \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\tilde{\chi} = 1$ sur un voisinage ouvert de K et $\operatorname{supp} \tilde{\chi} \subset \tilde{O}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On pose

$$\chi_i \coloneqq \frac{\tilde{\chi}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{\chi}_i + 1 - \tilde{\chi}}.$$

Le dénominateur ne s'annule bien jamais car sinon on aurait $\tilde{\chi}(x) = 1$ et $\tilde{\chi}_i(x) = 0$ ce qui est impossible, donc la fonction est bien définie. On a bien $\operatorname{supp} \chi_i = \operatorname{supp} \tilde{\chi}_i \subset O_i$ et on vérifie qu'une telle fonction χ_i vérifient les hypothèses voulues. □

Proposition 1.19. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{C}_0^1(\Omega)$. Alors pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\int_\Omega \partial_i f(x) \varphi(x) \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x) \partial_i \varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

Preuve • *Cas particuliers.* On suppose que $d = 1$ et $\Omega =]a, b[$ avec $a < b$. Comme φ est à support compact dans l'intervalle $]a, b[$, une intégration par parties affirme

$$\int_a^b f'(x) \varphi(x) \,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \varphi'(x) \,\mathrm{d}x.$$

On suppose que $d \geqslant 1$ et $\Omega = \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$. Avec le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \partial_i f_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= -\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

- *Cas général.* On pose $K \coloneqq \operatorname{supp}\varphi$. Par compacité, on peut l'écrire comme

$$K \subset \bigcup_{\ell=1}^{N} P_\ell \quad \text{avec} \quad P_\ell \coloneqq \prod_{i=1}^{d}]a_i^\ell, b_i^\ell[,\ \ell \in [\![1, d]\!].$$

D'après le théorème précédent, il existe $\chi_1, \dots, \chi_N \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que
– $\operatorname{supp}\chi_\ell \subset P_\ell$ et $\operatorname{Im}\chi_\ell \subset [0, 1]$ pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$;
– $\chi_1 + \cdots + \chi_n = 1$ sur un voisinage ouvert de K.

Alors comme $\chi_\ell\varphi$ est à support compact, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{\ell=1}^{N} \int_\Omega \partial_i f(x)\chi_\ell(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\ell=1}^{N} \int_{P_\ell} \partial_i f(x)(\chi_\ell\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{\ell=1}^{N} \int_{P_\ell} f(x)\partial_i(\chi_\ell\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{\ell=1}^{N} \int_\Omega f(x)\partial_i(\chi_\ell\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega f(x)\partial_i\Big(\Big[\sum_{\ell=1}^{N} \chi_\ell\Big]\varphi\Big)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

◇ Remarque. Pour tout $g \in \mathscr{C}_0^1(\Omega)$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\cdot\nabla g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega f_i(x)\partial_i g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \partial_i f_i(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \operatorname{div} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Chapitre 2
Distributions, exemples et opérations

2.1 Distributions et exemples 9
2.2 Dual topologique de $\mathscr{D}(\Omega)$ 11
2.3 Convergence de distributions 11
2.4 Dérivation des distributions 12
2.5 Multiplication 14
2.6 Localisation et recollement 15
2.7 Composition 17
2.8 Dérivation et intégration 17

2.1 Distributions et exemples

Définition 2.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une forme linéaire T sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est une *distribution* si, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, on ait

$$\langle T, \varphi\rangle := T(\varphi) \leqslant C_K \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leqslant p_K}} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

De plus, on dit que T est d'*ordre* inférieur ou égal à $p \in \mathbb{N}$ si $p_K \leqslant p$ pour tout compact K de Ω

Notation. On note $\mathscr{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

▷ Exemple. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On considère l'application

$$T_f : \left| \begin{aligned} \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière est bien définie et il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$. De plus, soit K un compact de Ω. Alors pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, on a

$$\langle T_f, \varphi\rangle \leqslant C_K \|\varphi\|_\infty \quad \text{avec} \quad C_K := \int_K |f(x)| \,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que T_f est une distribution sur Ω d'ordre 0.

Lemme 2.2. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors $f = 0$ presque partout.

Preuve Soient $\theta \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. On prolonge la fonction $f\theta$ sur $\mathbb{R}^d$ par 0 en dehors de Ω. Alors cette dernière appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $f\theta * \rho_\varepsilon = 0$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Comme $f\theta * \rho_\varepsilon \to f\theta$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que $f\theta = 0$ presque partout.

On écrit $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ où les ensembles K_n sont des compacts. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\theta_n \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau telle que $\theta_n = 1$ sur K_n et $\operatorname{supp}\theta \subset \Omega$. Alors $f\theta_n = 0$ presque partout sur Ω, donc $f = 0$ presque partout sur K_n. On en déduit que $f = 0$ presque partout sur Ω. ☐

Par le lemme précédent, il existe donc un plongement de $\mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ par l'application $f \longmapsto T_f$. On s'autorisera alors à noter f pour T_f et donc à considérer qu'une fonction $f \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est un élément de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

▷ Exemple. 1. Soit $a \in \Omega$. On considère l'application

$$\delta_a : \left| \begin{aligned} \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi &\longmapsto \varphi(a). \end{aligned}\right.$$

C'est clairement une distribution. Cependant, montrons qu'elle ne s'identifie pas à une fonction. Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. On note $\theta \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$\theta = 1 \text{ sur } \mathrm{B}(0,1) \quad \text{et} \quad \theta = 0 \text{ sur } \mathrm{B}(0,3/2)^{\mathrm{c}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\theta_n : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \theta_n[n(x-a)]$. Alors $\operatorname{supp}\theta_n \subset \mathrm{B}(a, 3/2n) \subset \Omega$ pour n assez grand et

$$1 = \langle \delta_a, \theta_n\rangle = \int_\Omega f(x)\theta_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathrm{B}(0,3/2n)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

ce qui est impossible.

2. Soit μ une mesure de Ω de masse finie sur les compacts. Alors l'application

$$T_\mu : \left| \begin{array}{l} \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi \longmapsto \displaystyle\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu \end{array} \right.$$

est une distribution sur Ω.

3. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors l'application

$$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \longmapsto \langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0)$$

est une distribution sur Ω d'ordre inférieur ou égal à $|\alpha|$. En effet, supposons que son ordre q soit strictement inférieur à $p := |\alpha|$. Soit $\theta \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta = 1$ sur un voisinage de 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\chi : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto x^p \theta(x) \quad \text{et} \quad \chi_n : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \chi[n(x - x_0)]$$

de sorte que

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \chi_n \rangle = n^p p! \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} \chi \subset \operatorname{supp} \chi_n.$$

Comme la distribution est supposée d'ordre q, il existe $C > 0$ tel que

$$n^p p! \leqslant C \sup_{|\beta| \leqslant q} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\beta \chi_n(x)|. \tag{$*$}$$

Or pour tout $x \in \Omega$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leqslant q$, on a

$$\partial^\beta \chi_n(x) = n^{|\beta|} \partial^\beta \chi(n(x - x_0)), \quad \text{donc} \quad \sup_{x \in \Omega} |\partial^\beta \chi_n^(x)| \leqslant n^q \|\partial^\beta \chi(x)\|_\infty.$$

En réinjectant dans la relation $(*)$, on obtient une contradiction car $q < p$.

4. On suppose $\Omega = \mathbb{R}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors l'application

$$T := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \partial^n \delta_n$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$ car, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset [-N, N]$ et, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vérifie $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi^{(n)}(n) \leqslant \max_{n \in [\![1, N]\!]} |a_n| \sup_{k \leqslant N} \|\varphi^{(k)}\|_\infty.$$

Définition 2.3. La *valeur principale* de la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1/x$ est la fonction

$$\mathrm{vp}(1/x) : \left| \begin{array}{l} \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi \longmapsto \langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi \rangle := \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

C'est bien une distribution d'ordre 1.

Preuve En effet, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$\langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi \rangle \leqslant 2\lambda(K) \left\|\varphi'\right\|_\infty.$$

Par l'absurde, supposons que $\mathrm{vp}(1/x)$ soit d'ordre 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\theta_n \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\theta = 1$ sur $[1/n, 1]$ et $\theta = 0$ sur $]-\infty, 1/2n] \cup [2, +\infty[$. Alors

$$\langle \mathrm{vp}(1/x), \theta_n \rangle \geqslant \int_{1/n}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x} \geqslant \ln n.$$

Mais il existe $C \geqslant 0$ telle que $\langle \mathrm{vp}(1/x), \theta_n \rangle \leqslant C \left\|\theta_n\right\|_\infty$. Dans ce cas, on a $C \leqslant \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui est impossible. Donc $\mathrm{vp}(1/x)$ est d'ordre 1. □

Définition 2.4. Une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est *positive* si, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a

$$\varphi \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle \geqslant 0.$$

Exercice 2.1. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Alors T_f est positive si et seulement si f est positive.

Proposition 2.5. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ positive. Alors T est d'ordre 0.

Preuve Soit K un compact de Ω. On note $\theta \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau telle que $\theta = 1$ sur un voisinage ouvert de K et $\operatorname{supp} \theta \subset \Omega$. Alors pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, on a

$$\langle T, \left\|\varphi\right\|_\infty \theta - \varphi \rangle \geqslant 0,$$

donc $\langle T, \varphi \rangle \leqslant C_K \left\|\varphi\right\|_\infty$ avec $C_K := \langle T, \theta \rangle$. Donc T est d'ordre 0. □

2.2 Dual topologique de $\mathscr{D}(\Omega)$

Définition 2.6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si
– pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_\infty \longrightarrow 0$;
– il existe un compact K de Ω telle que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.7. Soit T une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) T une distribution ;
(ii) pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve $\Rightarrow$ On suppose que T est une distribution. Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telles que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Alors il existe un compact K de Ω tel que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. De plus, il existe $C_K \geqslant 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \varphi_n - \varphi\rangle| \leqslant C_K \sup_{|\alpha|\leqslant p_K} \sup_{x\in K} \|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\Leftarrow$ Par contraposée, on suppose que T n'est pas une distribution. Alors il existe un compact K de Ω tel que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_{n,p} \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que

$$\operatorname{supp}\varphi_{n,p} \subset K \quad \text{et} \quad \langle T, \varphi_{n,p}\rangle > n \sup_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi_{n,p}\|_\infty.$$

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $\varphi_{n,p} \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. On pose

$$\psi_{n,p} \coloneqq \frac{\varphi_{n,p}}{\langle T, \varphi_{n,p}\rangle}.$$

Alors

$$1 > n \sup_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha \psi_{n,p}\|_\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\psi_{n,p} \subset K.$$

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant n$, on a $\|\partial^\alpha \psi_{n,n}\| < 1/n$. Si on avait la proposition (ii), comme $\psi_{n,n} \to 0$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$, on aurait $\langle T, \psi_{n,n}\rangle \to 0$ ce qui impossible. □

2.3 Convergence de distributions

Définition 2.8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ si, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a $\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ dans $\mathbb{R}$. On note alors $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

▷ Exemples. – Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telles que $f_n \to f$. Alors $T_{f_n} \to T_f$.
– Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Ω et $a \in \Omega$ tels que $a_n \to a$. Alors $\delta_{a_n} \to \delta_a$.
– Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n \colon x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{1}_{[1/n,+\infty[}(|x|)x^{-1}$. Alors $f_n \to \operatorname{vp}(1/x)$.
– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$f_n \colon x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{x + i/n}.$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Il existe $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$. Alors

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i/n}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x + i/n}\,\mathrm{d}x + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x + i/n}\,\mathrm{d}x.$$

D'une part, comme φ est à support compact, on a $|(\varphi(x) - \varphi(0))/(x + i/n)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le théorème de convergence dominée donne

$$\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x + i/n}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{vp}(1/x).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x + i/n}\,\mathrm{d}x &= \varphi(0) \int_{-R}^{R} \frac{x - i/n}{x^2 + 1/n^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{i\varphi(0)}{n} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + 1/n^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -i\varphi(0) \int_{-nR}^{nR} \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} \longrightarrow -i\pi\varphi(0).\end{aligned}$$

On en déduit que $f_n \to \operatorname{vp}(1/x) - i\pi\delta_0$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 2.9. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, la suite $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Alors il existe $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve On rappel le théorème de BANACH-STEINHAUS dans ce cas-ci, appelé le principe de bornitude uniforme :

Soient K un compact de Ω et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, la suite $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Alors il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp}\varphi \subset K \quad \Longrightarrow \quad \langle T_n, \varphi\rangle \leqslant C_K \sup_{|\alpha|\leqslant p_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty . \qquad (*)$$

Ce théorème se montre avec le lemme de BAIRE dans l'espace de FRÉCHET $\mathscr{C}_K^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$.

On reprend les notations de ce théorème. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on pose alors $\langle T, \varphi\rangle := \lim_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi\rangle$. Alors l'application T est une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$. En laissant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $(*)$, on obtient la caractérisation d'une distribution T. ☐

THÉORÈME 2.10. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \to T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Alors $\langle T_n, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$.

Preuve Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\langle T_n, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi\rangle = \langle T_n, \varphi_n - \varphi\rangle + \langle T_n - T, \varphi\rangle$. Comme $T_n \to T$, on a $\langle T_n - T, \varphi\rangle \to 0$. Or $\varphi_n \to \varphi$, donc il existe un compact K de Ω tel que les fonctions φ et φ_n soient à support dans K. Par le théorème admis, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ vérifiant la relation $(*)$. Alors

$$|\langle T_n, \varphi_n - \varphi\rangle| \leqslant C_K \sup_{|\alpha|\leqslant p_K} \|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_\infty \longrightarrow 0.$$

On en déduit alors que $\langle T_n, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi\rangle \to 0$. ☐

2.4 Dérivation des distributions

DÉFINITION 2.11. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Pour $j \in [\![1, d]\!]$, l'application $\partial_j T \colon \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle \partial_j T, \varphi\rangle := -\langle T, \partial_j \varphi\rangle$$

est une distribution.

PROPOSITION 2.12. Soient $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $j \in [\![1, d]\!]$. Alors $\partial_i T_f = T_{\partial_i f}$.

Preuve Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, le formule d'intégration par parties donne

$$\langle \partial_j T_f, \varphi\rangle = \langle T_f, \partial_j \varphi\rangle = -\int_\Omega f(x)\partial_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_j f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{\partial_j f}, \varphi\rangle. \qquad ☐$$

▷ EXEMPLES. 1. Soit $\Omega = \mathbb{R}$. On note $H := \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de HEAVISIDE. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

La dérivée de cette distribution est donc $H' = \delta_0$. De même, la dérivée de la masse de DIRAC en 0 est $\varphi \longmapsto \varphi'(0)$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) := \ln|x|$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^{+\infty} \ln|x|\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left([\varphi(x)\ln|x|]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + [\varphi(x)\ln|x|]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}[\varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon - \varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon] + \langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Or le théorème des accroissements finis assure $|\varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon - \varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon| \leqslant 2\varepsilon\,\|\varphi'\|_\infty \longrightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $f' = \mathrm{vp}(1/x)$. Déterminons f''. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle f'', \varphi\rangle = \langle \mathrm{vp}(1/x)', \varphi\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant 0}\frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi(-\varepsilon)+\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité vient d'un développement de Taylor.

Définition 2.13. La *partie finie* de la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1/x^2$ est la distribution

$$
\mathrm{pf}(1/x^2)\colon \left|\begin{array}{l}\mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\\ \varphi \longmapsto \langle \mathrm{pf}(1/x^2), \varphi\rangle \coloneqq \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right)\end{array}\right.
$$

Elle vérifie $\mathrm{vp}(1/x)' = -\,\mathrm{pf}(1/x^2)$.

Proposition 2.14 *(formule des sauts).* Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, *i. e.* la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, a_1]$ et sur $[a_N, b[$ et il existe $a_1, \dots, a_N \in I$ tels que

$$
\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \exists g_k \in \mathscr{C}^1([a_k, a_{k+1}]), \quad f|_{]a_k, a_{k+1}[} = g.
$$

Pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, on note $f(a_i^\pm) \coloneqq \lim_{x\to a_i\pm} f(x)$. On note $\{f'\} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$ l'unique fonction telle que $\{f'\} = f'$ sur $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$. Alors

$$
(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{k=1}^{N}[f(a_k^+) - f(a_k^-)]\delta_{a_k}.
$$

Preuve On note $I =]a, b[$ avec $a < b$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(I)$, on a

$$
\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi\rangle &= -\int_I f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\sum_{k=1}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a_1} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a_N}^{b} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\Bigg[\sum_{k=1}^{N-1}\left([f(x)\varphi(x)]_{a_k}^{a_{k+1}} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right) + [f(x)\varphi(x)]_a^{a_1} - \int_a^{a_1} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x +\\
&\qquad\qquad [f(x)\varphi(x)]_{a_N}^{b} - \int_{a_N}^{b} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Bigg]\\
&= \int_I f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{N-1}[f(a_{k+1}^-)\varphi(a_{k+1}) - f(a_k^+)\varphi(a_k)] + f(a_1^-)\varphi(a_1) - f(a_N^+)\varphi(a_N)\\
&= \langle T_{\{f'\}}, \varphi\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{N}[f(a_k^+) - f(a_k^-)]\delta_{a_k}, \varphi\right\rangle.
\end{aligned}
$$

□

Théorème 2.15. Soient $I \coloneqq]a, b[$ un intervalle ouvert et $T \in \mathscr{D}'(I)$ telle que $T' = 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T = \lambda$.

Preuve Soit $\varphi \in \mathscr{D}(I)$ telle que $\int_I \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Alors l'application

$$
\psi\colon x \in I \longmapsto \int_a^x \varphi(x)\,\mathrm{d}x
$$

est à support compact puisque, si $\operatorname{supp}\varphi = [c, d] \subset]a, b[$, alors $\int_a^z \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $z \geqslant d$ ou $z \leqslant c$, donc $\operatorname{supp}\psi \subset [c, d]$. Alors $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi'\rangle = \langle T', \psi\rangle = 0$.

Plus généralement, soit $\varphi \in \mathscr{D}(I)$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(I)$ de masse 1. Alors la fonction

$$
\tilde{\varphi}\colon x \in I \longmapsto \varphi(x) - \chi(x)\int_I \varphi(z)\,\mathrm{d}z
$$

est de masse nulle et à support compact. Le cas précédent donne $\langle T, \tilde{\varphi} \rangle = 0$. Comme T est linéaire, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_I \varphi(x)\, \mathrm{d}x \,\langle T, \chi \rangle = \int_I \langle T, \chi \rangle\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

On pose alors $\lambda := \langle T, \chi \rangle$ et on obtient que $T = \lambda$. □

DÉFINITION 2.16. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, l'application $\partial^\alpha T \colon \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

est une distribution.

PROPOSITION 2.17. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$ telle que $T_n \to T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial^\alpha T_n \longrightarrow \partial^\alpha T.$$

Autrement dit, la dérivation est continue.

2.5 Multiplication

On ne peut pas multiplier des distributions, voici pourquoi.

▷ EXEMPLE. Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. Alors $\rho_\varepsilon \to \delta_0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Soient I un intervalle ouvert et $\rho \in \mathscr{D}(I)$ telle que $\rho \geqslant 0$ et $\int_I \rho = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$\rho_\varepsilon \colon \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \varepsilon^{-1}\rho(\varepsilon^{-1}x). \end{array} \right.$$

Alors pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, la quantité $\langle \rho_\varepsilon \delta_0, \varphi \rangle = \rho_\varepsilon(0)\varphi(0) = \varepsilon^{-1}\rho(0)\varphi(0)$ n'admet pas de limite. Si on avait une multiplication, on devrait avoir $\rho_\varepsilon \delta_0 \to (\delta_0)^2$. Il est donc impossible de définir une distribution $(\delta_0)^2$.

DÉFINITION 2.18. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. L'application $aT \colon \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle$$

est une distribution.

Preuve Il suffit d'utiliser la formule de LEIBNIZ pour majorer les normes $\|\partial^\alpha(a\varphi)\|_\infty$. Soit K un compact de Ω et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Comme T est une distribution, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp} \psi \subset K \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \psi \rangle \leqslant C_K \sup_{|\alpha| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha \psi\|_\infty .$$

Comme $\operatorname{supp} a\varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$, on a $a\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et la formule de LEIBNIZ donne

$$\begin{aligned} \langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle &\leqslant C_K \sup_{|\alpha| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha(a\varphi)\|_\infty \\ &\leqslant C_K \sup_{|\alpha| \leqslant p_K} \Big\| \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta}\varphi \Big\|_\infty \\ &\leqslant C_K \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant p_K \\ |\gamma_1| \leqslant p_K \\ |\gamma_2| \leqslant p_K}} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\gamma_1} a\|_\infty \|\partial^{\gamma_2}\varphi\|_\infty \\ &\leqslant C'_K \max_{|\alpha| \leqslant p_k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \quad \text{avec} \quad C'_K := C_K 2^{p_K} \max_{|\gamma| \leqslant p_K} \|\partial^\gamma a\|_\infty . \end{aligned}$$

On en conclut que l'application aT est bien une distribution. □

◇ REMARQUE. L'ordre de aT est intérieur ou égal à celui de T.

▷ EXEMPLES. 1. On note $T := \delta_0 + \delta'_2$. Soit $a \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} a \subset [-1, 1]$ et $\alpha(0) = 1$. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle aT, \varphi \rangle = a(0)\varphi(0) + (a\varphi')(2)$ avec $(a\varphi')(2) = 0$. D'où $aT = \delta_0$.
2. On a $x \operatorname{vp}(1/x) = 1$ et $x \operatorname{pf}(1/x^2) = \operatorname{vp}(1/x)$.

PROPOSITION 2.19. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$. On suppose que $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\partial^\alpha a_n \to \partial^\alpha a$ uniformément sur tout compact pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors $a_n T_n \to aT$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve On suppose que $T_n = T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et K un compact tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle T, (a_n - a)\varphi\rangle \leqslant C_K \sup_{|\alpha| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha (a_n - a)\varphi)\|_\infty . \tag{$*$}$$

Or pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant p_K$, on a

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha (a_n - a)\varphi)\|_\infty &= \Big\| \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta (a_n - a) \partial^{\alpha - \beta}\varphi \Big\|_\infty \\ &\leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta (a_n - a)\|_{\infty, K} \|\partial^{\alpha-\beta}\varphi\|_\infty \\ &\leqslant 2^{p_K} \max_{|\beta| \leqslant p_K} \|\partial^\beta (a_n - a)\|_{\infty, K} \max_{|\beta| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty . \end{aligned}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\langle T, a_n\varphi\rangle - \langle T, a\varphi\rangle| \leqslant 2^{p_K} C_K \max_{|\beta| \leqslant p_K} \|\partial^\beta (a_n - a)\|_{\infty, K} \max_{|\beta| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Revenons au cas général. Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et K un compact tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Alors

$$\langle a_n T_n, \varphi\rangle - \langle aT, \varphi\rangle = \langle (a_n - a)T_n, \varphi\rangle + \langle a(T_n - T), \varphi\rangle.$$

Ce second terme tend vers 0 par le cas précédent car $T_n \to T$. D'après le principe de bornitude uniforme, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que $(*)$ ce qui conclut : le premier terme tend vers 0. □

◇ Remarque. On pourrait utiliser que, si $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$, alors $\langle T_n, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ en montrant que $a_n\varphi \to a\varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$.

Proposition 2.20. Soient $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors

$$\partial^\alpha (aT) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} T.$$

En particulier, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\partial_j (aT) = (\partial_j a)T + a\partial_j T.$$

Preuve On procède par récurrence en se basant sur le cas particuliers. □

▷ Exemple. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ tels que $T' + aT = 0$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T' + aT, \varphi\rangle = -\langle T, \varphi' - a\varphi\rangle \\ &= -\left\langle T, \left(\varphi(x) \exp\Big[-\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big]\right)' \exp\Big[\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big] \right\rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\left\langle \exp\Big[-\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big] \left(\exp\Big[\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big] T\right)', \varphi \right\rangle = 0.$$

En prenant $\psi := \exp(-\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y)\varphi$, on obtient que

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \left(\exp\Big[\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big] T\right)', \psi \right\rangle = 0.$$

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\exp\Big(\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big) T = \lambda, \quad i.\ e. \quad T = \lambda \exp\Big(-\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big).$$

- *Autre méthode.* En multipliant par $\exp\big(\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\big)$, on obtient que

$$\exp\Big(\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big) (T' + aT) = 0, \quad \text{donc} \quad \left(\exp\Big[\int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y\Big] T\right)' = 0$$

ce qui mène à la même conclusion.

2.6 Localisation et recollement

DÉFINITION 2.21. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et ω un ouvert de Ω. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On définit la distribution $T|_\omega \in \mathscr{D}'(\omega)$ par

$$\langle T|_\omega, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{\varphi}\rangle \quad \text{avec} \quad \tilde{\varphi} := \begin{cases} \varphi & \text{sur } \omega, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\omega)$

PROPOSITION 2.22 *(recollement de distributions).* Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Ω telle que $\Omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Pour $i \in I$, soit $T_i \in \mathscr{D}'(\omega_i)$. On suppose que $T_i|_{\omega_i\cap\omega_j} = T_j|_{\omega_i\cap\omega_j}$ pour tous $i, j \in I$. Alors il existe une unique distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que

$$\forall i \in I, \quad T|_{\omega_i} = T_i.$$

Preuve • *Unicité.* Soient T_1 et T_2 deux telles distributions. On pose $S := T_1 - T_2$. Alors $S|_{\omega_i} = 0$ pour $i \in I$. Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et K un compact tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Calculons $\langle S, \varphi\rangle$. Comme K est un compact qui est inclut dans Ω, il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $K = \omega_{i_1} \cup \cdots \cup \omega_{i_n}$. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ des partitions de l'unité associées, *i. e.* vérifiant

- $\chi_1 + \cdots + \chi_n = 1$ sur un voisinage de K,
- $\operatorname{supp}\chi_\ell \subset \omega_{i_\ell}$ pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$.

Comme φ est à support dans K, on a

$$\langle S, \varphi\rangle = \langle S, \sum_{\ell=1}^{n} \chi_\ell\varphi\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \langle S, \chi_\ell\varphi\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \langle S|_{\omega_{i_\ell}}, \chi_\ell\varphi|_{\omega_{i_\ell}}\rangle = 0.$$

Ceci montre que $S = 0$, *i. e.* $T_1 = T_2$.

• *Existence.* Soient $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et K un compact tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. On reprend les mêmes notations que dans l'unicité. Si une telle distribution T existe, alors

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \chi_\ell\varphi\rangle.$$

Soit $\tilde{K}$ un compact tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset \tilde{K}$. Il existe $j_1, \ldots, j_p \in \mathbb{N}$ tels que $\tilde{K} = \omega_{j_1} \cup \cdots \cup \omega_{j_p}$. Soient $\tilde{\chi}_1, \ldots, \tilde{\chi}_p \in \mathscr{D}(\Omega)$ les partitions de l'unité associées. Montrons que

$$\sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \chi_\ell\varphi\rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle T_{i_k}, \tilde{\chi}_k\varphi\rangle$$

ce qui montrera que T est bien définie. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \chi_\ell\varphi\rangle &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \tilde{\chi}_k\chi_\ell\varphi\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{p} \langle T_{i_\ell}|_{\omega_{j_k}\cap\omega_{i_\ell}}, \tilde{\chi}_k\chi_\ell\varphi\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{p} \langle T_{j_k}|_{\omega_{j_k}\cap\omega_{i_\ell}}, \tilde{\chi}_k\chi_\ell\varphi\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{j_k}, \tilde{\chi}_k\chi_\ell\varphi\rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle T_{j_k}, \tilde{\chi}_k\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Montrons que l'application T est bien une distribution. Soit K un compact de ω. Il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $K = \omega_{i_1} \cup \cdots \cup \omega_{i_n}$. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ des partitions de l'unité associées. Pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, il existe $C_\ell > 0$ et $p_\ell \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\omega_i), \quad \operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp}\chi_\ell \quad \Longrightarrow \quad \langle T_{i_\ell}, \psi\rangle \leqslant C_\ell \max_{|\alpha|\leqslant p_\ell} \|\partial^\alpha\psi\|_\infty.$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Alors comme dans des preuves précédentes, on a

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi\rangle &= \sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \chi_\ell\varphi\rangle \\
&\leqslant \sum_{\ell=1}^{n} C_\ell \max_{|\alpha|\leqslant p_\ell} \|\partial^\alpha\psi\|_\infty \\
&\leqslant C_K \max_{|\alpha|\leqslant p_K} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty
\end{aligned}$$

avec

$$C_K := \sum_{\ell=1}^{n} C_\ell 2^{p_\ell} \max_{|\alpha|\leqslant p_\ell} \|\partial^\alpha \chi_\ell\|_\infty \quad \text{et} \quad p_K := \max_{1\leqslant \ell\leqslant n} p_\ell$$

ce qui montre que c'est une distribution. □

2.7 Composition

Remarque préliminaire. Soient $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\chi \colon \tilde\Omega \to \Omega$ un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme. Pour être cohérent avec la formule du changement de variables, on voudrait définir la distribution $T_f \circ \chi$ par

$$\langle T_f \circ \chi, \varphi\rangle := \int_\Omega f(y)\varphi(\chi^{-1}(y))|\det \mathrm{J}_\chi(\chi^{-1}(y))|^{-1}\,\mathrm{d}y, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\tilde\Omega).$$

Définition 2.23. Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\chi \colon \tilde\Omega \to \Omega$ un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme. On définit la distribution $T\circ\chi$ par

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\tilde\Omega), \quad \langle T\circ \chi, \varphi\rangle_{\mathscr{D}'(\tilde\Omega),\mathscr{D}(\tilde\Omega)} := \langle T, |\det \mathrm{J}_\chi(\chi^{-1})|^{-1}\varphi\circ\chi^{-1}\rangle_{\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}(\Omega)}$$

◇ Remarque. Cela définit bien une distribution d'après la formule de Faà di Bruno.

▷ Exemple. On suppose que $\Omega = \tilde\Omega = \mathbb{R}^d$. On considère $\chi \colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto Ax+b$ avec $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. Alors pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle T\circ\chi, \varphi\rangle = |\det A|^{-1}\langle T, \varphi\circ\chi^{-1}\rangle \quad \text{avec} \quad \varphi\circ\chi^{-1}(x) = \varphi[A^{-1}(x-b)].$$

2.8 Dérivation et intégration

Proposition 2.24. Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$. Soit K un compact de Ω tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K\times\mathbb{R}^n$. Alors la fonction $y \longmapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et vérifie

$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{d+n}, \quad \partial_y^\alpha\langle T, \varphi(\cdot,y)\rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\rangle.$$

Preuve Montrons cette proposition uniquement dans le cas $\mathscr{C}^1$ et $|\alpha| = 1$. Soient $x\in\Omega$ et $y_0, h \in \mathbb{R}^n$. La formule de Taylor donne

$$\varphi(x, y_0+h) - \varphi(x,y_0) = \sum_{|\alpha|=1} h^\alpha \partial_y^\alpha \varphi(x,y_0) + r(x,y_0,h)$$

avec

$$r(x,y_0,h) := 2\sum_{|\alpha|=1}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_y^\alpha\varphi(x, y_0+th)\,\mathrm{d}t.$$

Alors

$$\langle T, \varphi(\cdot, y_0+h)\rangle - \langle T, \varphi(\cdot, y_0)\rangle = \sum_{|\alpha|=1} h^\alpha\langle T, \partial_y^\alpha\varphi(\cdot,y_0)\rangle + \langle T, r(\cdot, y_0, h)\rangle.$$

La somme est linéaire en h. Montrons que le second terme est un $o(h)$. Il existe $c_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp}\psi \subset K \quad \langle T, \psi\rangle \leqslant C_k \max_{|\beta|\leqslant p_K}\|\partial^\beta\psi\|.$$

Alors comme $\operatorname{supp} r(\cdot, y_0, h) \subset K$, on a

$$\langle T, r(\cdot,y_0,h)\rangle \leqslant \max_{|\beta|\leqslant p_K}\|\partial_x^\beta r(\cdot, y_0, h)\|.$$

On suppose que $\|h\| \leqslant 1$. Alors une majoration grossière de l'intégrale donne

$$\langle T, r(\cdot, y_0, h)\rangle \leqslant C_K \max_{|\beta|\leqslant p_K}\sum_{|\alpha|=2}\frac{|h^\alpha|}{\alpha!}\sup_{\substack{x\in K\\ \|y-y_0\|\leqslant 1}}|\partial_x^\beta\partial_y^\alpha\varphi(x,y)|.$$

Dans tous les cas, si $h = (h_1, \dots, h_n)$ et $|\alpha| = 2$, on a $|h^\alpha| \leqslant \|h\|^2$. Alors

$$\langle T, r(\cdot, y_0, h)\rangle \leqslant \|h\|^2 C_K \max_{|\beta|\leqslant p_K}\sum_{|\alpha|=2}\sup_{\substack{x\in K\\ \|y-y_0\|\leqslant 1}}|\partial_x^\beta\partial_y^\alpha\varphi(x,y)| = O(h).$$

Ceci montre que l'application est différentiable en y_0. Ainsi, on montre, par récurrence, qu'il existe des dérivées partielles à tout ordre. □

◇ Remarque. On n'a pas vraiment besoin que la fonction φ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à y. On a un résultat identique si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega \times V)$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, vérifie $\operatorname{supp} \varphi \subset K \times V$.

Proposition 2.25. Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle \,\mathrm{d}y = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\cdot, y) \,\mathrm{d}y \right\rangle.$$

Preuve • *Cas particulier.* On suppose que $n = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) \,\mathrm{d}y = 0$ pour tout $x \in \Omega$. Il existe un compact K de Ω et $R > 0$ tels que $\operatorname{supp} \varphi \subset K \times [-R, R]$. Pour $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}$, on pose

$$\theta(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(x, z) \,\mathrm{d}z.$$

Cette fonction θ vérifie les hypothèses du théorème précédente. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\partial_y \langle T, \theta(\cdot, y)\rangle = \langle T, \partial_y \theta(\cdot, y)\rangle = \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle,$$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \langle T, \theta(\cdot, y)\rangle = \int_{-\infty}^{y} \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle \,\mathrm{d}z + \lambda. \tag{$*$}$$

Si $y < -R$, alors $\langle T, \theta(\cdot, y)\rangle = 0$ et $\langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle = 0$ pour tout $z \in]-\infty, y]$, donc $\lambda = 0$. En laissant tendre y vers $+\infty$, on obtient l'égalité voulue.

On ne suppose plus la seconde hypothèse. Il existe un compact K de Ω et $R > 0$ tels que $\operatorname{supp} \varphi \subset K \times [-R, R]$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} \chi \subset [-R, R]$ et $\int_{\mathbb{R}} \chi(y) \,\mathrm{d}y = 1$. Pour $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}$, on pose

$$\psi(x, y) \coloneqq \varphi(x, y) - \chi(y) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, z) \,\mathrm{d}z.$$

Alors la fonction ψ vérifie l'hypothèse du cas particulier, donc

$$\int_{\mathbb{R}} \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle \,\mathrm{d}y = 0,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle \,\mathrm{d}y - \left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot, z) \,\mathrm{d}z \right\rangle \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \chi(y) \,\mathrm{d}y}_{1} = 0.$$ □

• *Cas général.* Il existe un compact K de Ω et $R > 0$ tels que $\operatorname{supp} \varphi \subset K \times \mathrm{B_f}(0, R)$. Comme T est une distribution, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\langle T, \varphi\rangle \coloneqq T(\varphi) \leqslant C_K \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leqslant p_K}} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

On en déduit que la fonction $y \longmapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle$ est à support dans $\mathrm{B_f}(0, R)$, donc elle appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème de Fubini, on peut alors intégrer une variable à la fois et on se ramène au cas $n = 1$.

Chapitre 3
Convolution de distributions

3.1 Support d'une distribution 19
3.2 Distributions à support compact 19
3.3 Convolution $\mathscr{D}' * \mathscr{D}$ 22
3.4 Convolution $\mathscr{D}' * \mathscr{E}'$ 24

3.1 Support d'une distribution

Définition 3.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathrm{O}(T)$ l'ensemble des ouverts ω de Ω tel que $T|_\omega = 0$. Le support d'une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est l'ensemble $\operatorname{supp} T$ vérifiant

$$(\operatorname{supp} T)^{\mathrm{c}} := \bigcup_{\omega \in \mathrm{O}(T)} \omega.$$

◇ Remarque. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrons que les deux notions de support coïncident. Pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, on a $f = 0$ presque partout sur ω si et seulement si $T_f|_\omega = 0$. On en déduit que $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} T_f$.

Proposition 3.2. L'ensemble $(\operatorname{supp} T)^{\mathrm{c}}$ est le plus grand ouvert O de Ω tel que $T|_O = 0$.

Preuve Pour tout ouvert O telle que $T|_O = 0$, on a $O \subset (\operatorname{supp} T)^{\mathrm{c}}$. Soit $(T_\omega)_{\omega \in \mathrm{O}(T)}$ une famille de distribution telles que $T_\omega \in \mathscr{D}'(\Omega)$ pour tout $\omega \in \mathrm{O}(T)$. Alors

$$\forall \omega \in \mathrm{O}(T), \quad T_\omega = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathrm{O}(T), \quad T_{\omega_1}|_{\omega_1 \cap \omega_2} = T_{\omega_2}|_{\omega_1 \cap \omega_2}.$$

On peut les recoller, *i. e.* il existe une unique distribution $\tilde{T} \in \mathscr{D}'((\operatorname{supp} T)^{\mathrm{c}})$ telle que

$$\forall \omega \in \mathrm{O}(T), \quad \tilde{T}|_\omega = T_\omega = 0.$$

Alors $T|_{(\operatorname{supp} T)^{\mathrm{c}}} = 0 = \tilde{T}$. D'où la proposition. □

◇ Remarques. L'ensemble $\operatorname{supp} T$ est le plus petit fermé F de Ω tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \cap F = \emptyset$. Attention : il faut que les supports sont disjoints pour conclure que $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Par exemple, on prend $T = \delta'_0$. Alors $\operatorname{supp} T = \{0\}$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = 1$ sur $[-1, 1]$. Alors

$$\langle T, x\varphi \rangle = \langle \delta'_0, x\varphi \rangle = -(x\varphi' + \varphi)(0) = 1$$

et, pourtant, on a $x\varphi = 0$ sur $\operatorname{supp} T$. La raison est que $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} T = \{0\} \neq \emptyset$.

▷ Exemple. On a $\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$.

Proposition 3.3. Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors $\operatorname{supp} \partial^\alpha T \subset \operatorname{supp} T$.

Preuve Soit ω un ouvert de Ω tel que $T|_\omega = 0$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega$, alors $\operatorname{supp} \partial^\alpha \varphi \subset \omega$ et donc $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = 0$. D'où l'inclusion. □

◇ Remarque. Pour tous $x \in \operatorname{supp} T$ et $r > 0$, on a $T|_{\mathrm{B}(x,r)} \neq 0$.

Proposition 3.4. Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $a \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Alors $\operatorname{supp} aT \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$.

Preuve Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nulle sur un voisinage ouvert V de $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$. Comme a est nulle sur $(\operatorname{supp} a)^{\mathrm{c}}$, la fonction $a\varphi$ l'est aussi, donc elle l'est sur $V \cup (\operatorname{supp} T)^{\mathrm{c}}$ qui est un voisinage de $\operatorname{supp} T$, donc $\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle = 0$. On en déduit l'inclusion. □

Proposition 3.5. Soient $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Alors $\operatorname{supp}(S + T) \subset \operatorname{supp} S \cup \operatorname{supp} T$.

Preuve Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nulle sur un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} S \cup \operatorname{supp} T$. Alors φ est nulle sur un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} S$ et sur un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} T$, donc $\langle S, \varphi \rangle = 0$ et $\langle T, \varphi \rangle = 0$, donc $\langle S + T, \varphi \rangle = 0$. □

3.2 Distributions à support compact

Définition 3.6. On note $\mathscr{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions de $\mathscr{D}'(\Omega)$ à support compact, *i. e.* dont le support est compact.

Théorème 3.7. Une distribution $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini et il existe un compact K de Ω, $c \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi\rangle \leqslant c \max_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}. \tag{$*$}$$

Preuve On suppose que $T \neq 0$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ sur un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} T$. Alors pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle$ puisque la fonction $(1-\chi)\varphi$ est nulle sur un voisinage ouvert de $\operatorname{supp} T$. On note $K \coloneqq \operatorname{supp} \chi$. Alors il existe $C_K \geqslant 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp} \psi \subset K \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \psi\rangle \leqslant C_K \max_{|\alpha| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha \psi\|_{\infty, K}.$$

Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, comme $\operatorname{supp} \chi\varphi \subset K$, on a

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle &\leqslant C_K \max_{|\alpha| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha(\chi\varphi)\|_{\infty, K} \\ &= C \max_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}\end{aligned}$$

avec

$$C \coloneqq 2^{p_K} C_K \max_{|\alpha| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha \chi\|_{\infty, K} \quad \text{et} \quad p \coloneqq p_K. \qquad \square$$

◇ Remarque. L'espace $\mathscr{E}(\Omega) \coloneqq \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées sur tout compact. Soit $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\chi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ une fonction plateau associé à $K_n \coloneqq \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geqslant 1/n, \|x\| \leqslant n\}$. Alors $\chi_n \varphi \to \varphi$ dans $\mathscr{E}(\Omega)$. En effet, pour tout compact K de Ω, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_{n_0}$, donc $\chi_n\varphi = \varphi$ sur un voisinage ouvert de K pour tout $n > n_0$.

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Avec la relation $(*)$, on montre que la suite $(\langle T, \chi_n\varphi\rangle)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et on peut poser

$$\langle T, \varphi\rangle \coloneqq \lim_{n \to +\infty} \langle T, \chi_n \varphi\rangle.$$

On vérifie que, si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$. On a ainsi prolongé la distribution T en une distribution de $\mathscr{E}'(\Omega)$ et elle vérifie la relation $(*)$.

Proposition 3.8. Soient $x_0 \in \Omega$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et une famille de réels $(a_\alpha)_{|\alpha| \leqslant p}$ tels que

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant p} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

Preuve On note $p \in \mathbb{N}$ l'ordre de T. Quitte à considérer la distribution S définie par $\langle S, \varphi\rangle \coloneqq \langle T, \varphi(\cdot - x_0)\rangle$, on peut supposer que $x_0 = 0$. Soit $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\chi_\varepsilon(x) \coloneqq \psi(\|x\|/\varepsilon).$$

Alors la fonction χ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact et elle vérifie $\chi_\varepsilon = 1$ sur $\mathrm{B}(0, \varepsilon)$ et $\operatorname{supp} \chi_\varepsilon \subset \mathrm{B}(0, 2\varepsilon)$. En prenant ε assez petit, on a $\chi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Comme $1 - \chi_\varepsilon = 0$ sur un voisinage ouvert de $\{0\}$, on a $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi_\varepsilon \varphi\rangle$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{B}}(0, r) \subset \Omega$. Il existe $c \geqslant 0$ tel que

$$\forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle T, \phi\rangle \leqslant c \max_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha \phi\|_{\infty, \overline{\mathrm{B}}(0,r)}.$$

Alors

$$\langle T, \chi_\varepsilon \varphi\rangle \leqslant c \max_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha(\chi_\varepsilon \varphi)\|_{\infty, \overline{\mathrm{B}}(0,r)}.$$

• *Cas particulier.* On suppose d'abord que $\varphi(0) = \partial^\alpha \varphi(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant p$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la formule de Leibniz donne

$$\partial^\alpha(\chi_\varepsilon \varphi)(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \chi_\varepsilon(x) \partial^{\alpha - \beta} \varphi(x)$$

où, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $\beta \leqslant \alpha$, on a

$$\partial^\beta \chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|\beta|} \partial^\beta \chi_1(x/\varepsilon).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la formule de Taylor assure

$$\varphi(x) = (p+1) \sum_{|\beta| = p+1} \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^p \partial^\beta \varphi(tx) \,\mathrm{d}t,$$

donc

$$|\varphi(x)| \leqslant (p+1) \sum_{|\beta|=p+1} \frac{x^\beta}{\beta!} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty \int_0^1 (1-t)^p \,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}}(0, 2\varepsilon)$, on a alors

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leqslant (p+1) \sum_{|\beta|=p+1} (2\varepsilon)^{p+1} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty \\ &= (p+1)\varepsilon^{p+1} 2^{p+1} \sum_{|\beta|=p+1} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant p$. Alors la fonction $\partial^\alpha \varphi$ vérifie les mêmes hypothèses que φ en remplaçant p par $p - |\alpha|$. Pour tout $x \in \overline{\mathrm{B}}(0, 2\varepsilon)$, on a alors

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \varphi(x)| &\leqslant (p+1)\varepsilon^{p+1-|\alpha|} 2^{p+1-|\alpha|} \sum_{|\beta|=p+1-|\alpha|} \|\partial^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty \\ &= (p+1)\varepsilon^{p+1-|\alpha|} 2^{p+1} \sum_{|\beta|=p+1} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(\chi_\varepsilon \varphi)(x)| &\leqslant (p+1) \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{-|\beta|} \|\partial^\beta \chi_1\|_\infty \varepsilon^{p+1-|\alpha-\beta|} 2^{p+1} \sum_{|\gamma|=p+1} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty \\ &= \varepsilon^{p+1-|\alpha|} C_p(\varphi) \quad \text{avec} \quad C_p(\varphi) \coloneqq (p+1) \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta \chi_1\|_\infty \sum_{|\gamma|=p+1} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

De plus, on a $\partial^\alpha(\chi_\varepsilon \varphi)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(0, 2\varepsilon)$. Avec les hypothèse, on obtient donc que

$$\langle T, \chi_\varepsilon \varphi \rangle \leqslant c C_p(\varphi) \max_{|\alpha| \leqslant p} \varepsilon^{p+1-|a|} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

donc $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

- *Cas général.* Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\psi(x) \coloneqq \varphi(x) - \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{x^k}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) \Big) \chi_{r/2}(x).$$

Alors la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact et vérifie les hypothèses du cas précédent. On en déduit que $\langle T, \psi \rangle = 0$, donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant p} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) \quad \text{avec} \quad a_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \chi_{r/2}(x) \rangle. \qquad \square$$

Application. On suppose que $\Omega = \mathbb{R}$. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On cherche une distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ telle que $(x - x_0)^m T = 0$. Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ une telle distribution. Montrons que $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ tel que $x_1 \in \operatorname{supp} T$. Pour $r > 0$, on a $T|_{\mathrm{B}(x_1, r)} \neq 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{D}(]-r, r[)$ telle que $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$. Alors pour tout $r < |x_1 - x_0|$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \Big\langle (x - x_0)^m T, \frac{\varphi}{(x - x_0)^m} \Big\rangle = 0$$

ce qui est impossible. D'où $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$. D'après la proposition, la distribution T s'écrit sous la forme

$$T = \sum_{k=0}^p a_k \partial^\alpha \delta_{x_0}.$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Alors $\langle (x - x_0)^m T, \varphi \rangle = 0$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^p a_\alpha (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} [(x - x_0)^m \varphi] \Big|_{x = x_0} = 0.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in [\![0, p]\!]$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} [(x - x_0)^m \varphi] \Big|_{x = x_0} = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} [(x - x_0)^m \Big|_{x = x_0} \frac{\mathrm{d}^{k-\ell} \varphi}{\mathrm{d}x^{k-\ell}} \Big|_{x = x_0}$$

où, pour tout $\ell \in [\![0,k]\!]$, le terme $\mathrm{d}^\ell/\mathrm{d}x^\ell[(x-x_0)^m|_{x=x_0}$ est non nul si et seulement si $m=\ell$ et, dans ce cas, il vaut $m!$, donc

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x-x_0)^m\varphi]\bigg|_{x=x_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<m, \\ \dfrac{k!}{m!(k-m)!}m!\,\dfrac{\mathrm{d}^{k-m}\varphi}{\mathrm{d}x^{k-m}}\bigg|_{x=x_0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $p \geqslant m$, alors

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \qquad \sum_{k=m}^{p} a_k(-1)^k \frac{k!}{m!(k-m)!}m!\,\frac{\mathrm{d}^{k-m}\varphi}{\mathrm{d}x^{k-m}}\bigg|_{x=x_0} = 0$$

et on en déduit que $a_k=0$ pour tout $k \geqslant m$. Finalement, on a

$$T = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \partial^k \delta_{x_0}.$$

Réciproquement, une telle distribution est bien solution de l'équation $(x-x_0)^m T = 0$.

3.3 Convolution $\mathscr{D}' * \mathscr{D}$

Définition 3.9. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$T * \varphi(x) := \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle.$$

Proposition 3.10. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors $T*\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial^\alpha(T*\varphi) = T*\partial^\alpha\varphi = \partial^\alpha T * \varphi.$$

De plus, on a $\operatorname{supp} T*\varphi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\varphi$.

Preuve Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ sur un voisinage V de x_0. Si la fonction $x \longmapsto \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle\chi(x)$ est infiniment différentiable en voisinage de x_0, alors la fonction $x \longmapsto \langle T,\varphi(x-\cdot)\rangle$ l'est aussi. Pour $y,x\in\mathbb{R}^d$, on note $\psi(y,x) = \varphi(x-y)\chi(x)$. Alors $\operatorname{supp}\psi \subset (-\operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\chi)\times\operatorname{supp}\chi$. Le théorème de dérivation donne alors, pour tout $x \in V$,

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(T*\varphi)(x) = \partial_x^\alpha\langle T,\varphi(x-\cdot)\rangle &= \partial_x^\alpha\langle T,\varphi(x-\cdot)\chi(x)\rangle \\ &= \langle T, \partial_x^\alpha[\varphi(x-\cdot)\chi(x)]\rangle \\ &= \langle T, \partial_x^\alpha\varphi(x-\cdot)\rangle \\ &= T*\partial^\alpha\varphi(x).\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(T*\varphi)(x) = \partial_x^\alpha\langle T,\varphi(x-\cdot)\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T,\partial^\alpha\varphi(x-\cdot)\rangle \\ &= \langle \partial^\alpha T, \varphi(x-\cdot)\rangle.\end{aligned}$$

Montrons l'inclusion des supports. Comme $T*\varphi$ est continue, on peut regarder l'adhérence des points où la fonction $T*\varphi$ est non nulle. Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\varphi)$. Alors $\operatorname{supp}\varphi(x-\cdot)\cap\operatorname{supp} T = \emptyset$. En effet, sinon il existe $z \in \operatorname{supp}\varphi(x-\cdot)\cap\operatorname{supp} T$, donc il existe $y\in\operatorname{supp}\varphi$ tel que $y = x-z$, donc $x = y+z \in \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp} T$ ce qui est impossible. On en déduit que $\langle T,\varphi(x-\cdot)\rangle = 0$. On a donc montre que

$$\{x\in\mathbb{R}^d \mid \langle T,\varphi(x-\cdot)\rangle \neq 0\} \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\varphi.$$

Comme $\operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\varphi$ est un fermé, on en déduit que

$$\operatorname{supp} T*\varphi = \overline{\{x\in\mathbb{R}^d \mid \langle T,\varphi(x-\cdot)\rangle \neq 0\}} \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\varphi. \qquad \square$$

Corollaire 3.11. Soient $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors $T*\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

◇ Remarque. On peut alors définir la convolé $T*\varphi$ où $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^d)$. On obtient les mêmes résultats que ceux de la proposition 3.10.

Théorème 3.12. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. Alors

$$T*\rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} T \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Preuve Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle T*\rho_\varepsilon,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} T*\rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \rho_\varepsilon(x - \cdot)\rangle \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $(x, y) \longmapsto \rho_\varepsilon(x - y)\varphi(x)$ est à support dans $(-\operatorname{supp}\rho_\varepsilon + \operatorname{supp}\varphi) \times \operatorname{supp}\varphi$ qui est bien compact. Le théorème d'intégration donne alors

$$\begin{aligned}\langle T * \rho_\varepsilon, \varphi\rangle &= \langle T, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x - \cdot)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\rangle \\ &= \langle T, \tilde{\rho}_\varepsilon * \varphi(x)\rangle\end{aligned}$$

où $\tilde{\rho}_\varepsilon \colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \rho_\varepsilon(-x)$. La suite $(\tilde{\rho}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est aussi une approximation de l'unité, donc $\tilde{\rho}_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, donc $\langle T * \rho_\varepsilon, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ ce qui termine la preuve. □

Théorème 3.13. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Alors il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ telle que $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$K_n \coloneqq \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geqslant 1/n,\ |x| \leqslant n\}.$$

Soit $\chi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\chi_n = 1$ au voisinage de K_n et $\operatorname{supp}\chi_n \subset K_n + \mathrm{B}(0, 1/2n)$. On prolonge $\chi_n T$ à $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ en posant $\langle \chi_n T, \varphi\rangle \coloneqq \langle T, \chi_n\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une approximation de l'unité telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{supp}\rho_n \subset \mathrm{B}(0, 1/4n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n \coloneqq (\chi_n T) * \rho_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et cette fonction vérifie

$$\operatorname{supp} T_n \subset (\operatorname{supp}\chi_n T_n) + \operatorname{supp}\rho_n \subset K_n + \overline{\mathrm{B}}(0, 1/2n) + \mathrm{B}(0, 1/4n) \subset \Omega,$$

donc $T_n \in \mathscr{D}(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ qu'on prolonge par 0 en dehors de Ω. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\langle T_n, \varphi\rangle &= \langle (\chi_n T_n) * \rho_n, \varphi\rangle \\ &= \langle \chi_n T, \tilde{\rho}_n * \varphi\rangle \\ &= \langle T, \chi_n(\tilde{\rho}_n * \varphi)\rangle.\end{aligned}$$

De plus, on a $\chi_n(\tilde{\rho}_n * \varphi) \longrightarrow \varphi$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, donc $\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$ ce qui montre que $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. □

Proposition 3.14. Soit $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors l'application

$$\left|\begin{aligned}\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \\ \varphi &\longmapsto T * \varphi\end{aligned}\right.$$

est séquentiellement continue.

Preuve Soit K_1 un compact de $\mathbb{R}^d$ voisinage du support de T. Il existe $c > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle T, \psi\rangle \leqslant c \max_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K_1}. \tag{$*$}$$

Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe un compact K_2 de $\mathbb{R}^d$ tel que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in K_2$, on a

$$\begin{aligned}|T * \varphi_n(x) - T * \varphi(x)| &= |\langle T, (\varphi_n - \varphi)(x - \cdot)\rangle| \\ &\leqslant c \max_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x - \cdot)\|_{\infty, K_1} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

De même, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in K_2} |\partial^\beta T * \varphi_n(x) - \partial^\beta T * \varphi(x)| &= \sup_{x\in K_2} |T * (\partial^\beta[\varphi_n - \varphi])(x)| \\ &\leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant p} \sup_{\substack{x\in K_2 \\ y\in K_1}} |\partial^{\alpha+\beta}(\varphi_n - \varphi)(x - y)| \\ &\leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant p+|\beta|} \sup_{z\in K_2} |\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(z)| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.15. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $T_n \to T$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite $(\partial^\alpha T_n * \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $\partial^\alpha T * \varphi$. De plus, s'il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ tel que $\operatorname{supp} T_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $T_n * \varphi \to T * \varphi$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Quitte à remplacer T_n par $T_n - T$, on peut suppose que $T = 0$ et, quitte à remplacer φ par $\partial^\alpha\varphi$, on peut supposer que $\alpha = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, comme $T_n \to T$ et $\varphi(x - \cdot) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$|T * \varphi_n(x) - T * \varphi(x)| = |\langle T_n - T, \varphi(x - \cdot)\rangle| \longrightarrow 0.$$

Soit K_1 un compact de $\mathbb{R}^d$. Il existe $R > 0$ tel que $K_1 \subset \overline{\mathrm{B}}(0, R)$. Soit $x \in K_1$. Soit K_2 un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $\operatorname{supp} \varphi + \overline{\mathrm{B}}(0, R) \subset K_2$. On note $c > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ comme dans le relation $(*)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de bornitude. Soit $i \in [\![1, d]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} |\partial_i (T_n * \varphi)(x)| &= |T_n * \partial_i \varphi(x)| \\ &= |\langle T_n, \partial_i \varphi(x - \cdot) \rangle| \\ &\leqslant c \sup_{y \in K_2} \sup_{|\alpha| \leqslant p} |\partial^{\alpha + \delta_i} \varphi(x - y)| \end{aligned}$$

avec $\delta_i := (\delta_{i,n})_{1 \leqslant n \leqslant d}$. On a

$$\sup_{x \in K_1} |\partial_i (T_n * \varphi)(x)| \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant p+1} \sup_{z \in K_2} |\partial^\alpha \varphi(z)|.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $L_1 > 0$ tel que

$$\forall x, y \in K_1, \quad |T_n * \varphi(x) - T_n * \varphi(y)| \leqslant L_1 \, |x - y| \, .$$

Par l'absurde, supposons que la suite $(T_n * \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $T * \varphi = 0$ sur K_1. Alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de K_1 et $\eta > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |T_n * \varphi(x_n)| > \eta.$$

Quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $\overline{x} \in K$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |T_n * \varphi(\overline{x})| &\geqslant |T_n * \varphi(x_n)| - |T_n * \varphi(x_n) - T_n * \varphi(\overline{x})| \\ &\geqslant \eta - L_1 \, |x_n - x| \longrightarrow \eta. \end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient que $0 \geqslant \eta$ ce qui est impossible. D'où la converge uniforme sur tout compact. □

3.4 Convolution $\mathscr{D}' * \mathscr{E}'$

Définition 3.16. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$. On définit la distribution $T * S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{S} * \varphi \rangle$$

où $\langle \tilde{S}, \varphi \rangle := \langle S, \tilde{\varphi} \rangle$ et $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Preuve Montrons qu'il s'agit d'une distribution. Comme $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe un compact K_1 voisinage du support de S, $c > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle T, \psi \rangle \leqslant c \max_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K_1}.$$

Comme $\operatorname{supp} \tilde{S} * \varphi \subset \operatorname{supp} \tilde{S} + \operatorname{supp} \varphi$, on a $\tilde{S} * \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ tels que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Comme $\operatorname{supp} \tilde{S} * \varphi \subset K - K_1$, il existe $c_2 > 0$ et $p_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\langle T, \tilde{S} * \varphi \rangle \leqslant c_2 \sup_{|\alpha| \leqslant p_2} \|\partial^\alpha (\tilde{S} * \varphi)\|_{\infty, K_2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{S} * \varphi \rangle &\leqslant c_2 \sup_{|\alpha| \leqslant p_2} \sup_{x \in K_2} \Big(c \sup_{|\beta| \leqslant p} \sup_{y \in K_1} |\partial^{\alpha + \beta} \varphi(x - y)| \Big) \\ &= c_K \sup_{|\alpha| \leqslant p_K} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_{\infty, K_2} \end{aligned}$$

avec $c_K := c c_2$ et $p_K := p + p_2$. Cela montre que l'application $T * S$ est une distribution sur $\mathbb{R}^d$. □

Proposition 3.17. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\operatorname{supp} T * S \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$.

Preuve L'ensemble $F := \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$ est un ouvert, donc son complémentaire $O := \mathbb{R}^d \setminus F$ est un ouvert. Il faut montrer que $T * S|_O = 0$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset O$. Montrons que $\operatorname{supp} \tilde{S} * \varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ ce qui impliquera que $\langle T * S, \varphi \rangle = 0$. Si $\operatorname{supp} \tilde{S} * \varphi \cap \operatorname{supp} T \neq \emptyset$, alors il existe $x \in \operatorname{supp} \tilde{S} * \varphi \cap \operatorname{supp} T$ et on peut l'écrire comme $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{supp} \tilde{S}$ et $z \in \operatorname{supp} \varphi$, donc $z \in \operatorname{supp} \varphi$ et $z \in \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$ ce qui est impossible. D'où $O \subset (\operatorname{supp} T * S)^{\mathrm{c}}$, donc $\operatorname{supp} T * S \subset F$. □

◇ Remarque. On peut définir une convolution $\mathscr{E}' * \mathscr{D}'$. Si $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, on pose $\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S, \tilde{T} * \varphi \rangle$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. On peut montrer que $S * T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S * T = T * S$.

▷ Exemple. Pour toute $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a $T * \delta_0 = T$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^d$, on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

PROPOSITION 3.18. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial^\alpha (T * S) = \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S.$$

Preuve Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \tilde{S} * \partial^\alpha \varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha (\tilde{S} * \varphi)\rangle \\ &= \langle \partial^\alpha T, \tilde{S} * \varphi\rangle \\ &= \langle \partial^\alpha T * S, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

De même, on a

$$\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \tilde{S} * \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \tilde{S} * \varphi\rangle.$$

Or pour toute $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha \tilde{S}, \psi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle \tilde{S}, \partial^\alpha \psi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle S, \widetilde{\partial^\alpha \psi}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle S, \partial^\alpha \tilde{\psi}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle \partial^\alpha S, \tilde{\psi}\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle \widetilde{\partial^\alpha S}, \psi\rangle,\end{aligned}$$

donc $\partial^\alpha \tilde{S} = (-1)^{|\alpha|}\widetilde{\partial^\alpha S}$. On en déduit que

$$\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi\rangle = \langle T, \widetilde{\partial^\alpha S} * \varphi\rangle = \langle T * \partial^\alpha S, \varphi\rangle. \qquad \square$$

▷ EXEMPLE. On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles $-\Delta u = f$. On suppose que l'on connaît une distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $-\Delta T = \delta_0$. Alors

$$-\Delta(T * f) = (-\Delta T) * f = \delta_0 * f = f,$$

donc la fonction $u = T * f$ est une solution. On appelle la distribution T une *solution fondamentale*.

PROPOSITION 3.19. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $T_n \to T$. Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $S_n \to S$. On suppose qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ tel que $\operatorname{supp} S_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $T_n * S_n \to T * S$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. On a $\tilde{S}_n * \varphi \to \tilde{S} * \varphi$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et, comme $\langle T_n * S_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \tilde{S}_n * \varphi\rangle$ et $T_n \to T$, on a $\langle T_n * S_n, \varphi\rangle \to \langle T * S, \varphi\rangle$, donc $T_n * S_n \to T * S$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. $\square$

THÉORÈME 3.20. Soient $R, S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont deux sont dans $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(R * S) * T = R * (S * T)$.

Preuve On fait le cas où S et T sont dans $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, les autres se démontrant pareil. Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité telle que $\operatorname{supp} \rho_n \in \overline{\mathrm{B}}(0,1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n := \rho_n * S$ et $T_n := \rho_n * T$. Alors les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ convergeant respectivement vers S et T. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{supp} S_n \subset \operatorname{supp} S + \overline{\mathrm{B}}(0,1) \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} T_n \subset \operatorname{supp} T + \overline{\mathrm{B}}(0,1). \tag{$*$}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\begin{aligned}R * (S_n * T_n)(x) &= \langle R, S_n * T_n(x - \cdot)\rangle \\ &= \left\langle R, \int_{\mathbb{R}^d} S_n(z) T_n(x - \cdot + z)\,\mathrm{d}z\right\rangle \\ &= \left\langle R, \int_{\mathbb{R}^d} S_n(x - \cdot - z) T_n(z)\,\mathrm{d}z\right\rangle.\end{aligned}$$

Le théorème d'intégration appliqué à la fonction $\psi\colon (y,z) \longmapsto S_n(x-y-z)T_n(z)$ qui vérifie

$$\operatorname{supp} \psi \subset [x - \operatorname{supp} S_n - \operatorname{supp} T_n] \times \operatorname{supp} T_n$$

donne

$$\begin{aligned}R * (S_n * T_n)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle R, S_n(x - \cdot - z)\rangle T_n(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} R * S_n(x - z) T_n(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$= (R * S_n) * T_n(x).$$

D'où $R * (S_n * T_n) = (R * S_n) * T_n$. Passons à la limite. Cette égalité est vraie dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et *a fortiori* dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Or $S_n * T_n \to S * T$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et le support des distributions $S_n * T_n$ est inclus dans un compact commun d'après la relation $(*)$. On en déduit que $R * (S_n * T_n) \longrightarrow R * (S * T)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, on a $R * S_n \longrightarrow R * S$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. De même, par la relation $(*)$ et comme $T_n \to T$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a $(R * S_n) * T_n \longrightarrow (R * S) * T$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Par l'unicité de la limite, on a $R * (S * T) = (R * S) * T$. $\square$

Chapitre 4

TRANSFORMATION DE FOURIER

4.1 La classe de SCHWARZ 27
4.1.1 Définition et convergence dans cet espace 27
4.1.2 Propriétés de la classe 27
4.2 Transformation de FOURIER sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 29

4.1 LA CLASSE DE SCHWARZ

4.1.1 Définition et convergence dans cet espace

DÉFINITION 4.1. L'espace de SCHWARTZ de $\mathbb{R}^d$, notée $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty.$$

▷ EXEMPLES. Toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sont dans la classe de SCHWARTZ. Toutes les fonctions de la forme $\varphi(x) = P(x)e^{-a\|x\|^2}$ avec $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$ et $a > 0$ sont dans la classe.

◇ REMARQUE. On veut pouvoir donner une topologie à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$N_p(\varphi) := \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant p\\ |\beta|\leqslant p}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

DÉFINITION 4.2. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p(\varphi_n - \varphi) \longrightarrow 0.$$

PROPOSITION 4.3. L'espace $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\chi = 1$ sur $\overline{\mathrm{B}}(0,1)$ et $\operatorname{supp}\chi \subset \mathrm{B}(0,2)$. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\chi_n \colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \chi(x/n)$ et $\varphi_n := \chi_n\varphi$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $|\alpha| \leqslant p$ et $|\beta| \leqslant p$. Soient $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$\partial^\beta(\varphi_n - \varphi)(x) = (1 - \chi_n(x))\partial^\beta\varphi(x) - \sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ |\gamma|\geqslant 1}} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{n^{|\gamma|}} \partial^\gamma\chi_n(x)\partial^{\beta-\gamma}\varphi(x),$$

donc

$$\begin{aligned}|x^\alpha\partial^\beta(\varphi_n - \varphi)(x)| &\leqslant |x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\varphi(x)| + \frac{1}{n}\sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\\ |\gamma|\geqslant 1}} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{z\in\mathbb{R}^d}|\partial^\gamma\chi(z)| \sup_{z\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)| \\ &\leqslant |x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\varphi(x)| + \frac{C}{n}N_p(\varphi)\end{aligned}$$

avec

$$C := 2^p \max_{0<|\gamma|\leqslant p} \sup_{z\in\mathbb{R}^d} |\partial^\gamma\chi(z)|.$$

De plus, on a

$$|x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}|x^\alpha|x|^2\partial^\beta\varphi(x)| \leqslant \frac{N_{p+2}(\varphi)}{n^2}$$

car $0 \leqslant 1 - \chi(z) \leqslant |z|^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$. On en déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha\partial^\beta(\varphi_n - \varphi)(x)| \leqslant \frac{N_{p+2}(\varphi)}{n^2} + \frac{CN_p(\varphi)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela montre que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ □

COROLLAIRE 4.4. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

4.1.2 Propriétés de la classe

Définition 4.5. Une fonction continue $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ est dite à *croissance polynomiale* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$f(x) = o_{\|x\| \to +\infty}(\|x\|^n)$$

Proposition 4.6. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors
1. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial^\alpha \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$;
2. pour toute $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées sont à croissance polynomiale, on a $f\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$;
3. pour tout $q \in [1, +\infty]$, on a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$. De plus, il existe $C > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| \leqslant p$ et $|\beta| \leqslant p$, on ait
$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C N_p(f)^{1-1/q} N_{p+d+1}(f)^{1/q} \ ;$$
4. pour toute $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a $S * \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve 1. Il suffit d'appliquer la définition de l'espace de Schwartz.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées sont à croissance polynomiale. Soit $p \in \mathbb{N}$. La formule de Leibniz donne
$$N_p(f\varphi) \leqslant \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant p \\ |\beta| \leqslant p}} \sum_{\gamma \leqslant p} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\gamma f(x) \partial^{\beta-\gamma} \varphi(x)|.$$
Comme les dérivées sont à croissance polynomiale, il existe $n_p \in \mathbb{N}$ et $M_p > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall \gamma \in \mathbb{N}^d, \quad |\gamma| \leqslant p \quad \Longrightarrow \quad |\partial^\gamma f(x)| \leqslant M_p(1 + \|x\|^{2n_p}).$$
Comme la fonction $z \longmapsto z^{2n_p}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, pour tous $a_1, \dots, a_d \geqslant 0$, on a
$$(a_1 + \dots + a_d)^{n_p} = d^{n_p} \left(\frac{a_1 + \dots + a_d}{d}\right)^{n_p} \leqslant d_{n_p} \frac{a_1 + \dots + a_d}{d} = d^{n_p - 1}(a_1 + \dots + a_d).$$
Pour tout $x \coloneqq (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, cette égalité de convexité donne alors
$$\|x\|^{2n_p} = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{n_p} \leqslant d^{2n_p - 1}(x_1^{2n_p} + \dots + x_d^{2n_p}).$$
On en déduit que $N_p(f\varphi) \leqslant C N_{p+2n_p}(\varphi) < +\infty$ avec
$$C \coloneqq M_p(1 + d^{2n_p - 1}) \sup_{|\beta| \leqslant p} \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma}.$$
D'où $f\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
3. Soient $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha| \leqslant p$ et $|\beta| \leqslant p$. On pose $g \coloneqq x^\alpha \partial^\beta f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors
$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial^\beta f\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}^q = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q \,\mathrm{d}x &\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x)|^{q-1} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x)|^{q-1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(1 + \|x\|^{d+1}) g(x)| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \|x\|^{d+1}} \\ &= C N_0(g)^{q-1} N_{d+1}(g) \end{aligned}$$
avec
$$C \coloneqq (1 + d^{(d-1)/2}) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \|x\|^{d+1}}.$$
On en déduit alors que
$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}^q \leqslant C N_p(f)^{q-1} N_{p+d+1}(f).$$
Il suffit alors de prendre la racine q-ième.
4. Remarquons que la fonction $S * \varphi$ est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$. Comme S est à support compact, il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$, $q \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que
$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), \quad \langle S, \psi \rangle \leqslant C \max_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha \psi\|_{\infty, K}.$$
Il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]^d$. De plus, pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a
$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta (S * \varphi)(x)| &= |x^\alpha (S * \partial^\beta \varphi)(x)| \\ &\leqslant |x^\alpha| C \max_{|\gamma| \leqslant |\beta| + q} \sup_{y \in K} |\partial^\gamma (x + y)| \\ &\leqslant C \max_{|\gamma| \leqslant |\beta| + q} \sup_{y \in K} |(x + y - y)^\alpha \partial^\gamma (x + y)| \\ &\leqslant C 2^{|\alpha| - 1} \max_{|\gamma| \leqslant |\beta| + q} \sup_{z \in K} (|z^\alpha| + R^\alpha) |\partial^\gamma (z)|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$N_p(S * \varphi) \leqslant 2^{p-1}(1+R^p)CN_{p+q}(\varphi)$$

et ceci pour tout $p \in \mathbb{N}$. Cela montre que $S * \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

4.2 Transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

Définition 4.7. La transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est la fonction

$$\mathscr{F}\varphi\colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \xi \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

où l'application $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$.

◇ Remarque. Cette application linéaire $\mathscr{F}$ est bien définie puisque, pour tous $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|e^{-i\langle \xi, x\rangle}\varphi(x)| = |\varphi(x)|$$

avec $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4.8. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

1. la fonction $\mathscr{F}\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_j \mathscr{F}\varphi(\xi) = \mathscr{F}(-ix_j\varphi)(\xi)\ ;$$

2. pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathscr{F}(\partial_j\varphi)(\xi) = i\xi_j\mathscr{F}\varphi(\xi)\ ;$$

3. pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on pose $\tau_a\varphi\colon x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \varphi(x-a)$ et on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathscr{F}(\tau_a\varphi)(\xi) = e^{-i\langle \xi, a\rangle}\mathscr{F}\varphi(\xi).$$

Preuve 1. La fonction $\psi\colon (x,\xi) \longmapsto e^{-i\langle \xi, x\rangle}\varphi(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\partial_{\xi_j}\psi(x,\xi)\right| = |-ix_je^{-i\langle \xi, x\rangle}\varphi(x)| = |x_j\varphi(x)| \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d).$$

Le théorème de dérivation sous l'intégrale assure alors que $\mathscr{F}\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, la relation

$$\partial_j\mathscr{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_j}\psi(x,\xi)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} -ix_je^{-i\langle \xi, x\rangle}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{F}(-ix_j\varphi)(\xi).$$

2. On suppose que $j = 1$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Alors une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle \xi, (x_1, x')\rangle}\partial_1\varphi(x_1, x')\,\mathrm{d}x_1 &= [e^{-i\langle \xi, (x_1, x')\rangle}\varphi(x_1,x')]_{\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}}(\partial_{x_1}e^{-i\langle \xi, (x_1, x')\rangle})\varphi(x_1,x')\,\mathrm{d}x_1 \\ &= i\xi_1\int_{\mathbb{R}} e^{-\langle \xi, (x_1, x')\rangle}\varphi(x_1,x')\,\mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x' cette dernière inégalité et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\partial_1\varphi(x)\,\mathrm{d}x = i\xi_1\int_{\mathbb{R}} e^{-\langle \xi, x\rangle}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qu'on voulait démontrer.

3. Il suffit de faire un changement de variables $z = x - a$. □

Théorème 4.9 *(formule d'inversion de Fourier)*. La transformation de Fourier $\varphi \longmapsto \mathscr{F}\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Son inverse est donné par

$$\mathscr{F}^{-1}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi\rangle}\psi(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}, \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d.$$

Enfin, les isomorphismes $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^{-1}$ sont continues sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, *i. e.* pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \quad N_p(\mathscr{F}\varphi), N_p(\mathscr{F}^{-1}\varphi) \leqslant C_pN_{p+d+1}(\varphi). \tag{$*$}$$

Pour démontrer ce théorème, il est utile de montrer préalablement le lemme suivant qui sert beaucoup dans la théorie des probabilités continues et qui étudie la densité gaussienne.

LEMME 4.10. Soit $A \in \mathscr{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ une matrice définie positive. Alors l'application

$$G_A \colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}x, x\rangle}}{\sqrt{(2\pi)^d \det A}} \end{array} \right.$$

appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et vérifie

$$\mathscr{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Preuve du théorème Montrons que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par $\mathscr{F}$. Soient $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. La proposition précédente donne

$$\xi^\alpha \partial^\beta(\mathscr{F}\varphi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathscr{F}[\partial^\alpha(x^\beta\varphi)].$$

Or la formule de LEIBNIZ assure que

$$\partial^\alpha(x^\beta\varphi) = \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma x^\beta \partial^{\alpha-\gamma}\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d).$$

Comme $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que $\xi^\alpha\partial^\beta(\mathscr{F}\varphi) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'où $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Montrer l'inégalité $(*)$. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. D'après le point 3 de la proposition 4.6 pour $p = q = 1$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\xi^\alpha\partial^\beta(\mathscr{F}\varphi)(\xi)| \leqslant \|\partial^\alpha(x^\beta\varphi)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant CN_{d+1}(\partial^\alpha(x^\beta\varphi)) \leqslant CN_{p+d+1}(\varphi),$$

donc il existe $C_p > 0$ tel que $N_p(\mathscr{F}\varphi) \leqslant C_p N_{p+d+1}(\varphi)$.

Passons à la forme d'inversion de FOURIER. Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$G_\varepsilon(x-y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x-y\rangle - \frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2} \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}.$$

Comme la fonction $(y, \xi) \longmapsto e^{i\langle \xi, x-y\rangle - \frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2}\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, le théorème de FUBINI donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} G_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{\frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, y\rangle}\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{\frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2} \mathscr{F}\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}. \end{aligned}$$

Un changement de variables $z = x - y$ dans la première intégrale assure l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-z)G_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{\frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2} \mathscr{F}\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}.$$

De plus, le changement de variables $z = \sqrt{\varepsilon}w$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-z)G_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - \sqrt{\varepsilon}x)G_1(w)\,\mathrm{d}w.$$

Pour tout $w \in \mathbb{R}^d$, comme $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue, on a $\varphi(x - \sqrt{\varepsilon}x)G_1(w) \longrightarrow \varphi(x)G_1(w)$ quand $\varepsilon \to 0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|\varphi(x - \sqrt{\varepsilon}x)G_1(w)| \leqslant \|\varphi\|_\infty G_1(w)$$

où $G_1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. L§e théorème de convergence dominée assure alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-z)G_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} G_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = \varphi(x).$$

Par ailleurs, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a $e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{\frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2} \mathscr{F}\varphi(\xi) \longrightarrow e^{i\langle \xi, x\rangle}\mathscr{F}\varphi(\xi)$ quand $\varepsilon \to 0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{\frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2} \mathscr{F}\varphi(\xi)| \leqslant |F\varphi(\xi)|$$

où $|\mathscr{F}\varphi| \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. De même, le théorème de convergence dominée donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} e^{\frac{1}{2}\varepsilon\|\xi\|^2} \mathscr{F}\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} \mathscr{F}\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}.$$

Finalement, par unicité de la limite, on a

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}. \qquad \square$$

Preuve du lemme On note λ_1, …, λ_n les valeurs propres de A telles que $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$. Il existe $Q \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ telle que $A = Q\Lambda\,{}^{\mathrm{t}}Q$ avec $\Lambda \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Montrons d'abord que $G_A \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tous $\beta \in \mathbb{N}^d$, on montre qu'il existe un polynôme $P_\beta \in \mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on ait

$$\partial^\beta G_A(x) = P_\beta(x)e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}x, x\rangle}$$

ce qui implique l'inégalité

$$|\partial^\beta G_A(x)| \leqslant |P_\beta(x)|\, e^{-|x|^2/2a_1}.$$

Cela montre que $G_A \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$. Procédons au changement de variables $y = {}^{\mathrm{t}}Qx$ et on pose $\eta := {}^{\mathrm{t}}Q\xi$. Comme $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_d$ et à l'aide du théorème de Fubini, on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}G_A(\xi) &= \Big(\prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\Big) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle {}^{\mathrm{t}}Q\varepsilon, {}^{\mathrm{t}}Qx\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \Lambda^{-1}\, {}^{\mathrm{t}}Qx, {}^{\mathrm{t}}Qx\rangle} \,\mathrm{d}x \\
&= \Big(\prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\Big) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \eta, y\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \Lambda^{-1} y, y\rangle} \,\mathrm{d}y \\
&= \Big(\prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\Big) \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-i\eta_k y_k - \frac{1}{2} y_k/\lambda_k} \,\mathrm{d}y_k \\
&= \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-i\eta_k y_k} e^{y_k^2/2\lambda_k} \frac{\mathrm{d}y_k}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}.
\end{aligned}$$

Avec cette dernière relation, il suffit de faire le calcul pour $d = 1$. Soit $a > 0$. On considère la fonction

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni g_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2/2a}}{\sqrt{2\pi a}}. \end{array} \right.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, cette fonction vérifie

$$\frac{\mathrm{d}g_a}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{x}{a} g_a(x).$$

En appliquant la transformée de Fourier à cette dernière égalité et en intégrant par parties, on obtient que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$i\xi \mathscr{F}g_a(\xi) = \frac{1}{ia} \frac{\mathrm{d}\mathscr{F}g_a}{\mathrm{d}\xi}(\xi), \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}\mathscr{F}g_a}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = -a\xi \mathscr{F}g_a(\xi).$$

On reconnaît une équation différentielle du première ordre, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{F}g_a(\xi) = Ce^{a\xi^2/2}.$$

En particulier, on a $\mathscr{F}g_a(0) = C$, donc $C = \int_{\mathbb{R}} g_a(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Revenons au cas général. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$. On pose toujours $\eta := {}^{\mathrm{t}}Q\xi$. Alors

$$\mathscr{F}G_A(\xi) = \prod_{k=1}^d e^{\lambda_k \eta_k^2/2} = e^{-\frac{1}{2}\langle \Lambda\eta, \eta\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle \Lambda\, {}^{\mathrm{t}}Q\xi, {}^{\mathrm{t}}Q\xi\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle Q\Lambda\, {}^{\mathrm{t}}Q\xi, \xi\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle}. \qquad \square$$

Corollaire 4.11 *(formule de Plancherel).* Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \mathscr{F}\varphi, \mathscr{F}\psi\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve Par le théorème de Fubini et la formule d'inversion, on peut écrire les égalités

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi\rangle} \mathscr{F}\varphi(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}} \psi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi\rangle} \overline{\mathscr{F}\varphi(\xi)} \psi(x)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathscr{F}\varphi(\xi)} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi\rangle} \psi(x)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathscr{F}\varphi(\xi)} \mathscr{F}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \mathscr{F}\varphi, \mathscr{F}\psi\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \qquad \square$$