Équations différentielles ordinaires

(ED2)

Philippe Chartier

1A maths 2019, ENS de Rennes

Chapitre 1
Introductions et exemples

1.1 Le problème à N corps

1.1.1 Historique

Tycho Brahé (1540-1603) commença à faire des observations astronomiques. Il remarqua que la trajectoire de la Terre est une ellipse. Ensuite, Johannes Kepler (1571-1630) établit les « lois de Kepler ».

1. Les planètes du système solaire ont une mouvement plan autour du Soleil et l'orbite d'une planète est une ellipse dont le Soleil est un foyer.
2. Le rayon vecteur balais des aires égales en des durées égales.
3. Si a est le demi-grand axe et T la période de la trajectoire, alors $a^3/T^2 = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$.

On va essayer de vérifier ces lois à partir des lois fondamentales de la dynamique d'Isaac Newton (1642-1727)

1.1.2 Résolution du problème à deux corps

On se donne un repère et deux objets (x_1, m_1) et (x_2, m_2) où les x_i sont les positions (des vecteurs) et les m_i sont les masses. Une masse exerce une force sur l'autre et réciproquement. On note le vecteur unitaire

$$u \coloneqq \frac{x_2 - x_2}{\|x_2 - x_1\|_2}.$$

Après application des lois de Newton, on obtient le système

$$m_1\ddot{x}_1 = \frac{\kappa m_1 m_2}{r^2}\frac{x_2 - x_1}{r}, \tag{1.1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = \frac{\kappa m_1 m_2}{r^2}\frac{x_1 - x_2}{r} \tag{1.2}$$

où κ est la constante de gravitation et $r \coloneqq \|x_2 - x_1\|_2$. Soit x le centre de gravité de (x_1, m_1) et (x_2, m_2). En notant $m \coloneqq m_1 + m_2$, il vérifie $mx = m_1x_1 + m_2x_2$. On a

$$m\ddot{x} = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = \frac{\kappa m_1 m_2}{r^3}(x_2 - x_1 + x_1 - x_2) = 0.$$

Alors x a un mouvement rectiligne de vitesse constante. Pour compléter la description de la dynamique du système, on introduit $X \coloneqq x_1 - x_2$. On a

$$\ddot{X} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{\kappa m_2}{r^3}(x_2 - x_1) - \frac{\kappa m_2}{r^3}(x_1 - x_2) = -\frac{\kappa m}{r^3}X.$$

Lemme 1.1. Le mouvement de X régi par l'équation

$$m\ddot{X} = -\frac{\kappa m^2}{r^3}X \quad \text{avec} \quad r \coloneqq \|X\|_2$$

est un mouvement plan. Il s'effectue dans le plan perpendiculaire à $n_0 \coloneqq \dot{X}(0) \wedge X(0)$ passant par $X(0)$.

Preuve Soit $n(t) \coloneqq \dot{X}(t) \wedge X(t)$. Comme le produit vectoriel est bilinéaire, on a

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = \ddot{X}(t) \wedge X(t) + \underbrace{\dot{X}(t) \wedge \dot{X}(t)}_{0} = -\frac{\kappa m}{r^3}X(t) \wedge X(t) = 0.$$

De plus, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X(t) - X(0), n_0\rangle = \langle \dot{X}(t), n_0\rangle = \langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \wedge X(t)\rangle = 0.$$

Donc le mouvement est plan. □

On suppose donc désormais que $X(t) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'on a deux invariants qui sont

$$E(t) = \frac{1}{2} m \|\dot{X}(t)\|_2^2 - \frac{\kappa m^2}{r}, \tag{1.3}$$

$$G(t) = \det(X(t), m\dot{X}(t)). \tag{1.4}$$

Lemme 1.2. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ régi par l'équation

$$m\ddot{X} = -\frac{\kappa m^2}{r^3} X \quad \text{avec} \quad r := \|X\|_2 .$$

Alors il existe deux constantes E_0 et E_0 telles que

$$\forall t \geqslant 0, \quad E(t) = E_0 \quad \text{et} \quad G(t) = L_0.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \rangle - \frac{\kappa m}{\langle X(t), X(t) \rangle^{1/2}} \right] \\ &= m \left[\langle \ddot{X}(t), \dot{X}(t) \rangle + \frac{\kappa m}{r^3} \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle \right] \\ &= \left\langle \dot{X}, m\ddot{X} + \frac{\kappa m^2}{r^2} \dot{X} \right\rangle = \langle \dot{X}, 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc l'énergie E est bien constante. De plus, on a

$$\frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t} = \det(\dot{X}, m\dot{X}) + \det(X, m\ddot{X}) = \det\left(X, -\frac{\kappa m^2}{r^3} X \right) = 0.$$

Donc le moment angulaire est bien constant. □

On écrit maintenant le vecteur position sous la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos\theta(t) \\ r(t) \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$E(t) = \frac{1}{2} m [(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2] - \frac{\kappa m^2}{r} = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] - \frac{\kappa m^2}{r}.$$

Par ailleurs, on a

$$G(t) = m \begin{vmatrix} r\cos\theta & \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\sin\theta & \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{vmatrix} = mr^2\dot{\theta}.$$

On a donc $\dot{\theta} = L_0/mr^2$ et, en réinjectant dans l'équation $E(t) = E_0$, on obtient

$$\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{m^2 r^2} - \frac{2\kappa m}{r} = \frac{2E_0}{m}.$$

On paramétrise les équations en θ (car θ est bijective puisqu'elle est monotone) et on a

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \frac{L_0}{mr^2} = -\frac{L_0}{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\frac{1}{r} \right).$$

En posant $z := 1/r$, on trouve

$$\left(-\frac{L_0}{m} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} \right)^2 + \frac{L_0^2}{m^2} z^2 - 2\kappa m z = \frac{2E_0}{m}.$$

On introduit $u := z - \alpha$ avec $\alpha := \kappa m^2 / L_0^2$, on obtient

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \right)^2 + u^2 = \alpha^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \beta := \frac{2E_0 m}{L_0^2}.$$

En dérivant cette dernière équation, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = 0.$$

Les solutions s'écrit sous la forme $u(\theta) = u_{\theta_0} \cos(\theta - \theta_0)$ avec $u_{\theta_0} = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta}$. Ainsi

$$r = \frac{p}{1 + \pm e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad p := \frac{1}{\alpha} = \frac{L_0^2}{\kappa m^3} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m^5 X^2}}.$$

1.2 Dynamiques des populations

1.2.1 Cas d'une espace

Loi de Malthus. Si $N(t)$ désigne le nombre d'individus d'une populations quelconques, on peut modéliser son évolution par l'équation

$$\dot{N}(t) = rN(t) \tag{1.5}$$

où r désigne l'accroissement naturel. Les solutions sont de la forme $N(t) = N_0 e^{rt}$ ce qui n'est pas vraiment convaincant.

Modèle de Verhulst. Dans ce modèle, le nombre d'individus vérifie

$$\dot{N}(t) = N(t)[n(N(t)) - m(N(t))] \tag{1.6}$$

où n et m sont deux fonctions affines de telle sorte qu'on peut réécrire l'équation sous la forme

$$\dot{N} = N(a - bN) = aN\left(1 - \frac{N}{c}\right)$$

où $c \coloneqq a/b$ est appelé la capacité d'accueil. Les solutions s'écrit

$$N(t) = \frac{c}{1 + (c/N_0 - 1)e^{-at}}.$$

1.2.2 Cas de deux espèces

Système de Lotka-Volterra. On considère deux espèces et on note N_1 l'effecteur des proies et N_2 l'effectif des prédateurs. Le système de Lotka-Volterra est

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(\alpha - \beta N_2), \\ \dot{N}_2 = -N_2(\delta - \gamma N_1) \end{cases} \tag{1.7}$$

où α et β sont respectivement les deux de natalité et de mortalité des proies et δ et γ ceux des prédateurs. Il existe deux points d'équilibres qui sont $(N_1, N_2) = (0, 0)$ et $(N_1, N_2) = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$. On note ce système sous la forme $\dot{y} = f(y)$. Soit y_e un point d'équilibre, *i. e.* vérifiant $f(y_\mathrm{e}) = 0$. On fait un développement de Taylor à l'ordre 1 et on a

$$f(y) = f(y_\mathrm{e}) + f'(y_\mathrm{e})(y - y_\mathrm{e}) + \text{poubelle}.$$

Après justification, l'équation se réécrit $\dot{Y} = f'(y_\mathrm{e})Y$ avec $Y \coloneqq y - y_\mathrm{e}$. La jacobienne de f s'écrit

$$\mathrm{J}_f(N_1, N_2) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta N_2 & -\beta N_1 \\ \gamma N_2 & -\delta + \gamma N_1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\mathrm{J}_f(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_f\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\delta/\gamma \\ \alpha\gamma/\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le premier cas, les valeurs propres sont α et $-\delta$, donc la position $(0, 0)$ est instable. Donc le second cas, les valeurs propres sont $\pm i\sqrt{\alpha\delta}$: on ne peut pas conclure sur la stabilité de $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$.

On veut établir l'existence de cycles périodique. Pour cela, on exhibe un invariant. En multipliant la première équation par $-N_2(\delta - \gamma N_1)$, la seconde par $N_1(\alpha - \beta N_2)$ et en sommant, on obtient

$$\dot{N}_1 N_2(\delta - \gamma N_1) + N_1 \dot{N}_2(\alpha - \beta N_2) = 0.$$

En réarrangeant les termes, on trouve

$$\delta\frac{\dot{N}_1}{N_1} - \delta\dot{N}_1 + \alpha\frac{\dot{N}_2}{N_2} - \beta\dot{N}_2 = 0.$$

En intégrant, on obtient l'invariant

$$I(N_1, N_2) = \delta \log N_1 - \gamma N_1 + \alpha \log N_2 - \beta N_2 = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

1.3 Discrétisation d'équation aux dérivées partielles

On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y,z) + a(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y,z) + b(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y,z) + c(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z}(t,x,y,z) = 0 \tag{1.8}$$

d'inconnue $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. On se donne en plus une condition initiale $f(0,x,y,z) = f_0(x,y,z)$. Une méthode de résolution de l'équation (1.8) est donnée par les caractéristiques : elle consiste à chercher des trajectoires de la forme $(x(t), y(t), z(t))$ telle que $f(t, x(t), y(t), z(t))$ soit constante, *i. e.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

On est donc conduit à déterminer les solutions du système d'équation différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y,z), \\ \dot{y} = b(x,y,z), \\ \dot{z} = c(x,y,z). \end{cases}$$

On note $\varphi_t(x_0, y_0, z_0)$ la solution de ce système issue de la condition initiale (x_0, y_0, z_0). Alors $f(t, \varphi_t(x_0, y_0, z_0))$ est constante égale à $f_0(x_0, y_0, z_0)$.

1.4 Exemples de résolutions d'équations simples

1.4.1 Équation à variables séparées

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \tag{1.9}$$

où x et y sont scalaires. On cherche des solutions régulières, *i. e.* des solutions le desquelles g ne s'annule pas. On peut récrire l'équation comme

$$\frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}x}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soient H et F des primitives de $1/g$ et f. La fonction H est bijective car la fonction g ne s'annule pas, donc son inverse $1/g$ est de signe constant. Alors $H(y) = F(x) + K$, donc $y(x) = H^{-1}(F(x) + K)$.

Approche rigoureuse. En réarrangeant l'équation puis en intégrant, on a

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \quad \text{donc} \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y'(\sigma)}{g(y(\sigma))}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{x_0}^{x} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

On retombe alors bien sur l'équation $H(y(x)) = F(x) + K$.

▷ Exemple. Résolvons, sur un intervalle I non vide, l'équation

$$y' = 2x(1 + y^2). \tag{1.10}$$

On a alors

$$\frac{y'}{1+y^2} = 2x, \quad \text{donc} \quad \operatorname{Arctan} y(x) = x^2 + K, \quad \text{donc} \quad y(x) = \tan(x^2 + K)$$

si $x^2 + K \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

1.4.2 Équation de Bernoulli

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^m(x) \tag{1.11}$$

avec $m \geqslant 2$ et $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que y ne s'annule pas. Alors

$$\frac{y'(x)}{y^m(x)} + \frac{a(x)}{y^{m-1}(x)} = b(x).$$

On pose $u(x) = y^{1-m}(x)$. Alors l'équation se réécrit

$$\frac{u'(x)}{1-m} + a(x)u(x) = b(x).$$

On note $\alpha(x) = (1-m)a(x)$ et $\beta(x) = (1-m)b(x)$. Les solutions de l'équation homogène $u'(x) + \alpha(x)u(x) = 0$ sont de la forme

$$u(x) = u_0 \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} \alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big).$$

La méthode de la variation de la constante donne

$$u(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} \beta(\sigma)\exp\Big(\int_{x_0}^{\sigma}\alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\sigma + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}\Big)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x}\alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)$$

Finalement, dans le cas qui nous intéresse, on a

$$y(x) = y_0 \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\Big)\left[1+(1-m)y_0^{m-1}\int_{x_0}^{x}\beta(\sigma)\exp\Big(-(m-1)\int_{x_0}^{\sigma}\alpha(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}\sigma\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

▷ Exemple. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = -\frac{1}{2}y^3(x). \tag{1.12}$$

En posant $u = 1/y^2$, l'équation se réécrit

$$-\frac{1}{2}u'(x) + (\cos x)u(x) = -\frac{1}{2}.$$

On trouve alors

$$u(x) = e^{2\sin x}\left(c + \int_0^x e^{-2\sin\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\right).$$

1.4.3 Équation de Ricatti

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x). \tag{1.13}$$

L'idée est de déterminer une solution particulière y_1 puis de chercher une solution sous la forme $y(x) = y_1(x)+u(x)$. Soit y_1 une solution particulière de (1.13). On suppose que $y_1 + u$ est également solution. En réinjectant, on trouve

$$u' = (q_1 + 2q_2y_1)u + u^2.$$

On est alors ramené à une équation de Bernoulli. On pose $z = 1/u$ et on a

$$z' + (q_1 + 2q_2y_1)z + q_2 = 0.$$

▷ Exemple. On considère l'équation différentielle

$$y' = \cos x - (\sin x)y + y^2.$$

La fonction $y_1(x) = \sin x$ est une solution particulière. On suppose que $y(x) \coloneqq \sin x + 1/z(x)$ est une solution. Alors

$$z'(x) = +(\sin x)z(x) + 1 = 0$$

1.4.4 Équation différentielle homogène

On appelle équation homogène du premier ordre degré n toute équation de la forme

$$y' = F(x, y). \tag{1.14}$$

où la fonction F est homogène de degré n, *i. e.*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(tx, ty) = t^n F(x, y).$$

Alors pour tous $y \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, on peut écrire $F(x, y) = x^n F(1, y/x) = x^n h(y/x)$. Pour $n = 0$, le système se réécrit de manière très simple

$$y'(x) = h(y(x)/x).$$

On pose alors $u(x) = y(x)/x$ et on a

$$u(x) + xu'(x) = h(u(x)), \quad \text{donc} \quad \frac{u'}{h(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

Chapitre 2
Théorèmes généraux

2.1 Préliminaire

2.1.1 Cadre général

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $t_0 \in I$, E un espace de Banach, D un ouvert connexe de E et $y_0 \in E$. On considère $f \colon I \times D \to E$ continue.

Définition 2.1. On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $t_0 \in J \subset I$ et d'une application $y \colon J \to E$ dérivable telle que

$$\begin{cases} \forall t \in J, \quad y'(t) = f(t, y(t)), \\ \qquad\qquad y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

◇ Remarque. On peut également remplacer la relation (2.1) par la formulation intégrale

$$\forall t \in J, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, \mathrm{d}s.$$

Définition 2.2. 1. Le couple (J, y) est appelé solution locale si $t_0 \in J \subset I$, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^1$, l'intervalle J est un voisinage de t_0 dans I et (2.1) est satisfait.
2. Soient (J_1, y_1) et (J_2, y_2) deux solutions locales. On dit que (J_1, y_1) prolonge (J_2, y_2) si $J_2 \subset J_1$ et $y_{1|J_2} = y_2$.
3. Une solution locale (J, y) est appelée solution maximale si, pour tout prolongement $(\tilde{J}, \tilde{y})$, on a $\tilde{J} = J$.
4. Une solution locale (J, y) est appelée solution globale si $J = I$.

Lemme 2.3. Si la fonction f est classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \times D$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors toute solution locale (J, y) est telle que la fonction y est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

▷ Exemples. – Le problème

$$\begin{cases} y' = -2ty^2 \\ y(0) = 1, \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une solution global $(\mathbb{R}, t \longmapsto 1/(1+t^2))$.
– Le problème

$$\begin{cases} y' = 2ty^2 \\ y(0) = 1, \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une solution locale $(]-1, 1[, t \longmapsto 1/(1-t^2))$.
– On considère le problème

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$. Si $I =]-\varepsilon, +\infty[$, alors une solution global est $t \longmapsto 1/(1+t)$. Si $I = \mathbb{R}$, alors une solution maximale est $t \longmapsto 1/(1+t)$ sur $J \coloneqq]-1, +\infty[$.
– Si le second membre n'est pas assez « régulier », on perd l'unicité. On considère le problème

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}(1+y^2) \\ y(0) = 1, \\ I = [0, +\infty[. \end{cases}$$

Alors 0 est solution, mais la fonction

$$t \in \left[a, a + \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, a], \\ \tan^2(t-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ est également solution.

DÉFINITION 2.4. Soient $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$. On dit que K est compact s'il satisfait la propriété de BOREL-LEBESGUE, à savoir que, de tous recouvrements de K par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

2.1.2 Lemme de GRÖNWALL

LEMME 2.5. Soient $t_0 \in I$ et $u, f, g \colon I \to \mathbb{R}_+$ continues telles que

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leqslant f(t) + \left| \int_{t_0}^t u(s) g(s) \, \mathrm{d}s \right|.$$

Alors

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leqslant f(t) + \left| \int_{t_0}^t f(s) g(s) \exp\left(\left| \int_s^t g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right| \right) \mathrm{d}s \right|.$$

Preuve On suppose que $t \geqslant t_0$. L'hypothèse se réécrit

$$u(t) \leqslant f(t) + y(t) \quad \text{avec} \quad Y \colon \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^t u(s) g(s) \, \mathrm{d}s. \end{array} \right.$$

En dérivant, on a

$$\dot{Y}(t) = g(t) u(t) \leqslant f(t) g(t) + g(t) Y(t),$$

donc

$$(\dot{Y}(t) - g(t) Y(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(s) \, \mathrm{d}s \right) \leqslant f(t) g(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(s) \, \mathrm{d}s \right),$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[Y(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(s) \, \mathrm{d}s \right) \right] \leqslant f(t) g(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(s) \, \mathrm{d}s \right),$$

En intégrant entre t_0 et t, on trouve

$$Y(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(s) \, \mathrm{d}s \right) - \underbrace{Y(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(s) \, \mathrm{d}s \right)}_{0} \leqslant \int_{t_0}^t g(s) f(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s,$$

donc

$$Y(t) \leqslant \int_{t_0}^t g(s) f(s) \exp\left(\int_{t_0}^t g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma - \int_{t_0}^s g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s.$$

Avec l'hypothèse, on a donc

$$u(t) \leqslant f(t) + \int_{t_0}^t f(s) g(s) \exp\left(\int_s^t g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s.$$

On procède identiquement dans le cas où $t \leqslant t_0$. □

COROLLAIRE 2.6. Sous les hypothèses précédentes, si f est constante égale à $c_1 \geqslant 0$, alors

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leqslant c_1 \exp\left(\left| \int_s^t g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right| \right).$$

Preuve En appliquant le lemme de GRÖNWALL, on a

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leqslant c_1 + \left| \int_{t_0}^t c_1 g(s) \exp\left(\left| \int_s^t g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right| \right) \mathrm{d}s \right|.$$

Soit $t \geqslant t_0$. On a alors donc

$$u(t) \leqslant c_1 \left(1 + \int_{t_0}^t -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \exp\left(\int_s^t g(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}s \right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant c_1\left(1-\left[\exp\left(\int_s^t g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\right]_{t_0}^{t}\right)\\
&\leqslant c_1\exp\left(\int_{t_0}^t g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right).
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 2.7. Sous les hypothèse du corollaire précédent, si g est constante égale à $c_2 \geqslant 0$, alors

$$\forall t \in I, \quad u(t) \leqslant c_1 \exp[c_2(t-t_0)].$$

2.2 Le cas lipschitzien

On se place dans un espace $(E, \|\ \|)$ supposé de Banach. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.

Définition 2.8. Soit $f\colon I\times E \to E$.

1. On dit que f est globalement lipschitzienne par rapport à y s'il existe une constante $L \geqslant 0$ telle que

$$\forall t \in I,\ \forall y_1, y_2 \in E, \quad \|f(t,y_2)-f(t,y_1)\| \leqslant L\,\|y_2-y_1\|.$$

2. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à y si, pour $(t,y)\in I\times E$, il existe un voisinage $U\times V$ de (t,y) et une constante $L(t,y)\geqslant 0$ tels que

$$\forall s \in U,\ y_1, y_2 \in V, \quad \|f(s,y_2)-f(s,y_1)\| \leqslant L(t,y)\,\|y_2-y_1\|.$$

On rappel le théorème du point fixe de Banach qui va nous servir dans le prochain théorème.

Théorème 2.9. Soient X un fermé de E et $f\colon X\to X$ contractante. Alors f admet un unique point fixe.

2.2.1 Le cas global

Théorème 2.10 *(Cauchy-Lipschitz)*. Soit $f\colon I\times E\to E$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à y. Alors pour $y_0\in E$, il existe une unique solution globale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)),\\ y(t_0)=y_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

De plus, toute solution locale est une restriction de cette solution globale.

Preuve On suppose tout d'abord que I est un intervalle fermé borné. Soit $\mathscr{E} := \mathscr{C}(I,E)$ muni de la norme

$$\left|\begin{aligned} &\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\\ &y \longmapsto \|y\|_{\mathscr{E}} := \max_{t\in I} e^{-2L|t-t_0|}\,\|y(t)\| \end{aligned}\right.$$

où L est la constante de Lipschitz de f. Alors $(\mathscr{E}, \|\ \|_{\mathscr{E}})$ est un espace de Banach. On considère maintenant la transformation $T\colon \mathscr{E}\to\mathscr{E}$ définie par

$$\forall y\in\mathscr{E},\ \forall t\in I, \quad Ty(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s,y(s))\,\mathrm{d}s.$$

Soient $y_1, y_2\in\mathscr{E}$. Pour tout $t\geqslant t_0$, on a

$$Ty_2(t)-Ty_1(t) = \int_{t_0}^t [f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))]\,\mathrm{d}s,$$

donc le caractère lipschitzien de la fonction f donne

$$
\begin{aligned}
\|Ty_2(t)-Ty_1(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^t L\,\|y_2(s)-y_1(s)\|\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant L\int_{t_0}^t \|y_2-y_1\|_{\mathscr{E}}\, e^{2L(s-t_0)}\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{1}{2}e^{2L(t-t_0)}\,\|y_2-y_1\|_{\mathscr{E}},
\end{aligned}
$$

donc

$$e^{2L(t-t_0)}\,\|Ty_2(t)-Ty_1(t)\| = \|Ty_2-Ty_1\|_{\mathscr{E}} \leqslant \frac{1}{2}\,\|y_2-y_1\|_{\mathscr{E}}.$$

Le même inégalité est vraie pour $t \leqslant t_0$. On a donc montré que l'application T est $\frac{1}{2}$-contractante, donc le théorème du point fixe de Banach affirme qu'elle possède un unique point fixe $y \in E$ et cette fonction y convient.

On revient au cas général. On peut toujours écrit l'intervalle I sous la forme $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ où la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note y_n l'unique solution du problème de Cauchy sur I_n. On définit $y\colon I \to E$ telle que $y = y_n$ sur I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette fonction y convient. □

Proposition 2.11. Dans le cadre du théorème précédente, pour toutes solutions y_1 et y_2 et tout $t \in I$, on a

$$\forall t \in I, \quad \|y_2(t) - y_1(t)\| \leqslant e^{L(t-t_0)} \|y_2(t_0) - y_1(t_0)\|.$$

Preuve On applique le corollaire 2.7. □

2.2.2 Le cas local

Pour $y_0 \in E$ et $r > 0$, on note

$$\mathrm{B}_r(y_0) \coloneqq \{y \in E \mid \|y - y_0\| \leqslant r\}.$$

Théorème 2.12. Soient $f\colon I \times E \to E$ continues, $y_0 \in E$ et $\eta, r, M, L \geqslant 0$. On suppose que

(i) on a $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \mathrm{B}_r(y_0) \subset I \times E$;

(ii) pour tout $(t, y) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \mathrm{B}_r(y_0)$, on a $\|f(t, y)\| \leqslant M$;

(iii) pour tous $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ et $y_1, y_2 \in \mathrm{B}_r(y_0)$, on a $\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leqslant L \|y_2 - y_1\|$.

Alors il existe une solution (J, y) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

telle que $J = [t_0 - \tilde\eta, t_0 + \tilde\eta]$ avec $\tilde\eta \coloneqq \min(\eta, r/2M)$.

Preuve Soit $\theta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, [0, 1])$ telle que $\theta(x) = 1$ si $x \leqslant 1$ et $\theta(x) = 0$ si $x \geqslant 1$. On considère

$$F\colon \left| \begin{array}{l} I \times E \longrightarrow E, \\ (t, y) \longmapsto \begin{cases} \theta\Big(\dfrac{\|y - y_0\|}{r}\Big) f(t, y) & \text{si } y \in \mathrm{B}_r(y_0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Alors F est bornée par M. Par ailleurs, pour $y_1, y_2 \in \mathrm{B}_r(y_0)$ et $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} \|F(t, y_2) - F(t, y_1)\| &= \Bigg\| \theta\Big(\frac{\|y_2 - y_0\|}{r}\Big) f(t, y_2) - \theta\Big(\frac{\|y_2 - y_0\|}{r}\Big) f(t, y_1) + \\ &\qquad \theta\Big(\frac{\|y_2 - y_0\|}{r}\Big) f(t, y_1) - \theta\Big(\frac{\|y_1 - y_0\|}{r}\Big) f(t, y_1) \Bigg\| \\ &\leqslant \Big|\theta\Big(\frac{\|y_2 - y_0\|}{r}\Big)\Big| \|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| + \Big|\theta\Big(\frac{\|y_2 - y_0\|}{r}\Big) - \theta\Big(\frac{\|y_1 - y_0\|}{r}\Big)\Big| \|f(t, y_1)\| \\ &\leqslant \Big|\theta\Big(\frac{\|y_2 - y_0\|}{r}\Big)\Big| L \|y_2 - y_1\| + \Big|\theta\Big(\frac{\|y_2 - y_0\|}{r}\Big) - \theta\Big(\frac{\|y_1 - y_0\|}{r}\Big)\Big| M \\ &\leqslant L \|y_2 - y_1\| + \frac{M}{r} \sup_{[0,1]} |\theta'| \, \big| \|y_2 - y_0\| - \|y_1 - y_0\| \big|. \end{aligned}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis. De même si $y_1 \in \mathrm{B}_r(y_0)$ et $y_2 \notin \mathrm{B}_r(y_0)$. Ainsi la fonction F est lipschitzienne dont la constante de Lipschitz est $L + \frac{M}{r} \sup |\theta'|$. On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz global du problème et il existe une unique solution globale y définie sur I du problème

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pour tout $t \in I$, on a

$$y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t F(s, y(s)) \,\mathrm{d}s,$$

donc

$$\|y(t) - y_0\| \leqslant M |t - t_0| \leqslant M\tilde\eta \leqslant \frac{r}{2}.$$

Or pour tout $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathrm{B}_{r/2}(y_0)$ tels que $|t - t_0| \leqslant \tilde\eta$, on a $F(t, y) = f(t, y)$. Donc y est une solution du problème de Cauchy. □

2.2.3 Unicité locale

Lemme 2.13. Soient $f\colon I\times E\to E$ localement lipschitzienne par rapport à y, J un compact de I et K un compact de E. Alors f est uniformément lipschitzienne par rapport à y sur $J\times K$.

Preuve On note $M=\max_{(t,y)\in J\times K}\|f(t,y)\|$. Par hypothèse, pour tout $(t,y)\in J\times K$, il existe $L(t,y)\geqslant 0$ et un voisinage $U_t\times V_y$ de (t,y) dans $I\times E$ telle que

$$\forall s\in U_t,\ \forall y_1,y_2\in V_y,\quad \|f(s,y_2)-f(s,y_1)\|\leqslant L(t,y)\,\|y_2-y_1\|\,.$$

Pour $y\in K$, on peut supposer que $V_y=\mathring{\mathrm{B}}_{r(y)}(y_0)$ pour un certain $r(y)>0$. Alors l'union

$$\bigcup_{(t,y)\in J\times K} U_t\times\mathring{\mathrm{B}}_{r(y)/2}(y_0)$$

recouvre $J\times K$ qui est compact. La propriété de Borel-Lebesgue nous permet d'extraire un recouvrement fini : il existe $(t_1,y_1),\dots,(t_n,y_n)\in J\times K$ tels que

$$J\times K\subset\bigcup_{i=1}^n U_{t_i}\times\mathring{\mathrm{B}}_{r(y_i)/2}(y_i).$$

On pose

$$\tilde L\coloneqq\max_{1\leqslant i\leqslant n}L(t_i,y_i)\quad\text{et}\quad r\coloneqq\min_{1\leqslant i\leqslant n}r(y_i).$$

Soient $t\in J$ et $\tilde y_1,\tilde y_2\in K$. Il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $(t,\tilde y_1)\subset U_{t_0}\times\mathring{\mathrm{B}}_{r(y_{i_0})/2}(y_{i_0})$. Deux cas se présentent alors :

– si $\|\tilde y_1-\tilde r_2\|\leqslant r/2$, alors $\tilde y_2\in\mathrm{B}_r(y_{i_0})$, donc

$$\|f(t,\tilde y_1)-f(t,\tilde y_2)\|\leqslant\tilde L\,\|\tilde y_1-\tilde y_2\|\ \ ;$$

– si $\|\tilde y_1-\tilde r_2\|>r/2$, alors

$$\|f(t,\tilde y_1)-f(t,\tilde y_2)\|\leqslant 2M=\frac{4M}{r}\frac{r}{4}\leqslant\frac{4M}{r}\,\|\tilde y_1-\tilde y_2\|\,.$$

Ainsi, la fonction f est global lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à $\max(\tilde L,4M/r)$. □

Théorème 2.14. Soit $f\colon I\times E\to E$ continue et localement lipschitzienne par rapport à y, (J_1,y_1) et (J_2,y_3) deux solutions locales du problème de Cauchy

$$\begin{cases}y'(t)=f(t,y(t)),\\ y(t_0)=y_0.\end{cases}\tag{2.6}$$

Alors $y_{1|J_1\cap J_2}=y_{2|J_1\cap J_2}$.

Preuve Soit $J\subset J_1\cap J_2$ un compact. On considère $K\coloneqq y_1(J)\cup y_2(J)$. D'après le lemme précédente, la fonction f est uniformément lipschitzienne sur $J\times K$ et on peut appliquer le théorème d'existence globales. En notant L la constante de Lipschitz de f, on en déduit que

$$\forall t\in J,\quad\|y_1(t)-y_2(t)\|\leqslant e^{L|t-t_0|}\,\|y_1(t_0)-y_2(t_0)\|=0.$$

D'où le résultat. □

2.2.4 Solution maximale

Corollaire 2.15. Sous les hypothèses du théorèmes précédent, il existe une solution maximale (J,y) du problème de Cauchy. De plus, l'intervalle J est un ouvert dans I.

Preuve On pose

$$t^+\coloneqq\sup\left\{\tilde t\in I\;\middle|\;\text{il existe une solution sur }[t_0,\tilde t]\right\},$$
$$t^-\coloneqq\sup\left\{\tilde t\in I\;\middle|\;\text{il existe une solution sur }[\tilde t,t_0]\right\}.$$

On définit une solution sur $]t^-,t^+[$ en recollant les morceaux de la manière suivante. Si $t\in]t^-,t^+[$ avec $t>t_0$, alors il existe $\tilde t\geqslant t$ tel que la solution soit définie sur $[b,\tilde t]$. On la note $(J,\tilde y)$ avec $J\coloneqq[t_0,\tilde t]$ et cette solution convient. Montrons que J est un ouvert dans I. Par l'absurde, supposons que la solution maximale soit définie sur $[t_0,t^+]$ avec $t^+<\sup I$. Alors on peut définir une solution locale sur $[t^+,t^++\varepsilon[$ avec $\varepsilon>0$ ce qui contredit la définition de t^+. Donc J est un ouvert relatif de I. □

2.3 Le cas des fonctions non localement lipschitzienne en dimension finie

2.3.1 Théorème d'Ascoli

Définition 2.16. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans E. On dit que cette suite est équicontinue si

$$\forall t \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t' \in I, \quad |t - t'| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|g_n(t) - g_n(t')\| < \varepsilon.$$

On rappel le théorème suivant, démontré en cours d'analyse.

Théorème 2.17 *(Ascoli)*. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans E. On suppose que

(i) l'intervalle I est compact dans $\mathbb{R}$,

(ii) la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et uniformément bornée par $M > 0$.

Alors on peut extraire de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur I vers une fonction continue sur I.

2.3.2 Solutions approchées

Dans toute cette section, on supposera que E est de dimension finie et même que $E = \mathbb{R}^d$.

Définition 2.18. Soient $\varepsilon > 0$, $J \subset I$ un intervalle et $y_\varepsilon \colon J \to E$. On dit que (J, y) est une ε-solution approchée si

- J est d'intérieur non vide et contient t_0,
- y_ε est continue,
- $y(t_0) = y_0$,
- pour tout $t \in J$, on a

$$\left\| y_\varepsilon(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Lemme 2.19. Soient $f \colon I \times E \to E$ continue et $(t_0, y_0) \in I \times E$. Soient $\eta, r > 0$ tel que $I_\eta := [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset I$. On pose

$$C_{\eta,r} := I_\eta \times \overline{\mathrm{B}}_r(y_0), \quad M := \max_{(t,y)\in C_{\eta,r}} \|f(t,y)\| \quad \text{et} \quad \tilde{\eta} = \min\left(\eta, \frac{r}{M}\right).$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ε-solution approchée $y_\varepsilon \in \mathscr{C}(I_{\tilde{\eta}}, \overline{\mathrm{B}}_r(y_0))$. De plus, on a

$$\forall t, s \in I_{\tilde{\eta}}, \quad \|y_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(s)\| \leqslant M\,|t - s|\,. \tag{2.7}$$

Preuve L'ensemble $C_{\eta,r}$ étant compact, la fonction $f_{|C_{\eta,r}}$ est uniformément continue. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (t,y), (\bar{t}, \bar{y}) \in C_{\eta,r}, \quad \max(\|y - \bar{y}\|, |t - \bar{t}|) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(t,y) - f(\bar{t}, \bar{y})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\tilde{\eta}}.$$

Considérons $n \in \mathbb{N}$ et une suite de points $(t_j)_{-n\leqslant j\leqslant n}$ tels que

$$t_{-n} = t_0 - \tilde{\eta} < t_{1-n} < \cdots < t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + \tilde{\eta} \quad \text{et} \quad \max_{-n\leqslant j\leqslant n-1} |t_{j+1} - t_j| \leqslant \min(\delta, \delta/M).$$

On définit la fonction y_ε par

$$\forall t \in I_\eta, \quad y_\varepsilon(t) = \begin{cases} y_\varepsilon(t_i) + (t - t_i) f(t_i, y_\varepsilon(t_i)) & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ et } i \geqslant 0, \\ y_\varepsilon(t_{i+1}) + (t - t_{i+1}) f(t_{i+1}, y_\varepsilon(t_{i+1})) & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ et } i \leqslant -1. \end{cases}$$

Montrons que y_ε est définie sur $[t_{-n}, t_n]$ à valeurs dans $\overline{\mathrm{B}}_r(y_0)$. Soient $K \in [\![0, n]\!]$ et $t \in [t_0, t_K]$. Par téléscopage, on a

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t_0)\| &\leqslant \|y_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t_{K-1})\| + \sum_{\ell=1}^{K-1} \|y_\varepsilon(t_\ell) - y_\varepsilon(t_{\ell-1})\| \\ &\leqslant (t - t_{K-1})\,\|f(t_{K-1}, y_\varepsilon(t_{K-1}))\| + \sum_{\ell=1}^{K-1} (t_\ell - t_{\ell-1})\,\|f(t_{\ell-1}, y_\varepsilon(t_{\ell-1}))\| \\ &\leqslant M(t - t_{K-1}) + \sum_{\ell=1}^{K-1} M(t_\ell - t_{\ell-1}) = M\,|t - t_0| \leqslant M\tilde{\eta} = r. \end{aligned}$$

On raisonne de manière similaire à gauche de t_0. On conclut alors par récurrence que la solution y_ε est à valeurs dans $\overline{\mathrm{B}}_r(y_0)$. De même, on a l'inégalité 2.7. Montrons que y_ε est une ε-solution approchée. Soient $\ell \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$. On a

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s &= (t-t_\ell) f(t_\ell, y_\varepsilon(t_\ell)) + \sum_{i=0}^{\ell-1} (t_{i+1}-t_i) f(t_i, y_\varepsilon(t_i)) - \\ &\qquad \int_{t_\ell}^t f(s, y_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s - \sum_{i=0}^{\ell-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{t_\ell}^t [f(t_\ell, y_\varepsilon(t_\ell)) - f(s, y_\varepsilon(s))]\,\mathrm{d}s + \sum_{i=0}^{\ell-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t_i, y_\varepsilon(t_i)) - f(s, y_\varepsilon(s))]\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Par construction de la subdivision, pour tout $i \in [\![-n, n-1]\!]$, on a $|t_i - t_{i+1}| \leqslant \delta$, donc

$$\|y_\varepsilon(t_i) - y_\varepsilon(t_{i+1})\| \leqslant M\,|t_i - t_{i+1}| \leqslant \delta.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \left\| y_\varepsilon(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_\varepsilon(s))\,\mathrm{d}s \right\| &\leqslant (t-t_\ell)\frac{\varepsilon}{\tilde{\eta}} + \sum_{i=0}^{\ell-1}(t_{i+1}-t_i)\frac{\varepsilon}{\tilde{\eta}} \\ &= (t-t_0)\frac{\varepsilon}{\tilde{\eta}} \leqslant \frac{\varepsilon\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Théorème 2.20 *(Cauchy-Peano).* Avec les hypothèses du lemme précédent, il existe une solution locale y définie sur $I_{\tilde{\eta}}$. De plus, on a $y \in \mathscr{C}^1(I_{\tilde{\eta}}, \overline{\mathrm{B}}_r(y_0))$.

Preuve On utilise le lemme précédent avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $y_n \in \mathscr{C}^1(I_{\tilde{\eta}}, \overline{\mathrm{B}}_r(y_0))$ la $\frac{1}{n}$-solution approchée du problème de Cauchy. Ce qui est utile ici, c'est que $\tilde{n}$ et M de dépendant pas de n. On veut utiliser le théorème d'Ascoli sur la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait que

$$\forall t, s \in I_{\tilde{\eta}}, \quad \|y_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(s)\| \leqslant M\,|t-s|\,,$$

donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. De plus, elle est uniformément bornée car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I_{\tilde{\eta}}, \quad \|y_n(t)\| \leqslant \|y(t_0)\| + r.$$

On peut donc extraire de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction y continue sur $I_{\tilde{\eta}}$.. En particulier, on a

$$\forall t \in I_{\tilde{\eta}}, \quad \int_{t_0}^t f(s, y_{n_k}(s))\,\mathrm{d}s \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_t^{t_0} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s,$$

donc

$$\forall t \in I_{\tilde{\eta}}, \quad y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s = 0.$$ □

2.4 Dépendances continues

On considère une fonction $f\colon I \times R \to E$ globalement lipschitzienne par rapport à y. Pour $y_0 \in E$ fixé, on note $t \longmapsto y(t, y_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Proposition 2.21. Pour tout intervalle compact J de I, l'application

$$\left| \begin{aligned} &E \longrightarrow \mathscr{C}(J, E), \\ &y_0 \longmapsto [t \longmapsto y(t, y_0)] \end{aligned} \right.$$

est continue. De plus, on a

$$\forall y_0, \tilde{y}_0 \in E,\ \forall t \in J, \quad \|y(t, y_0) - y(t, \tilde{y}_0)\| \leqslant e^{L|t-t_0|}\,\|y_0 - \tilde{y}_0\|\,.$$

Preuve Soit $J \subset I$ un compact contenant t_0. Alors

$$\|y(t, y_0) - y(t, \tilde{y}_0)\| \leqslant \|y_0 - \tilde{y}_0\| + \left| \int_{t_0}^t L\,\|y(s, y_0) - y(s, \tilde{y}_0)\|\,\mathrm{d}s \right|.$$

On conclut avec le lemme de Grönwall. □

On suppose maintenant que la fonction f est localement lipschitzienne.

PROPRIÉTÉ 2.22. Alors pour tout $y_0 \in E$, il existe un voisinage V de y_0 et $\eta > 0$ tels que, pour tout $\tilde{y}_0 \in V$, il existe une unique solution sur $I_\eta \coloneqq [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$. De plus, l'application

$$\left| \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathscr{C}(J, E), \\ y_0 \longmapsto [t \longmapsto y(t, y_0)] \end{array} \right.$$

est continue

Preuve On reprend la preuve du théorème 2.12. On part de l'hypothèse que f est lipschitzienne sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \mathrm{B}_r(y_0)$ pour obtenir l'existence d'une unique solution sur $[t_0 - \tilde{\eta}, t_0 + \tilde{\eta}]$ et à valeurs dans $\mathrm{B}_r(y_0)$ avec $\tilde{\eta} \coloneqq \min(r, r/M)$. De plus, on avait

$$\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta], \quad \|y(t, y_0) - y_0\| \leqslant \frac{r}{2}$$

de sorte que l'image y ne sorte pas de $\mathrm{B}_{r/2}(y_0)$. On prend $\tilde{y}_0 \in \mathrm{B}_{r/4}(y_0)$. On peut utiliser à nouveau le théorème d'existence d'une unique solution locale et continue sur $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ avec $\mu \coloneqq \min(\eta, r/4M)$ de sorte que

$$\forall t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu], \quad \|y(t, \tilde{y}_0) - \tilde{y}_0\| \leqslant r/4,$$

donc

$$\forall t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu], \quad \|y(t, \tilde{y}_0) - y_0\| \leqslant r/2,$$

donc l'image de $t \longmapsto y(t, \tilde{y}_0)$ ne sort pas de $\mathrm{B}_{r/2}(y_0)$ sur $[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \subset [t_0 - \tilde{\eta}, t_0 + \tilde{\eta}]$. De plus, les deux solutions $t \longmapsto y(t, y_0)$ et $t \longmapsto y(t, \tilde{y}_0)$ sont bien définies sur $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ et restent dans $\mathrm{B}_{r/2}(y_0)$. Elles coïncident avec les solutions du problème de CAUCHY

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

avec les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y(t_0) = \tilde{y}_0$ où F est la fonction définie par l'équation 2.4. Comme F est globalement lipschitzienne, on peut conclure. □

PROPOSITION 2.23. Soient $f \colon \mathbb{R} \times E \to E$ continue et localement lipschitzienne par rapport à y, $y_0 \in E$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit (J, y) la solution maximale du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Alors on peut écrire J sous la forme $J =]T^-(y_0), T^+(y_0)[$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \tilde{y}_0 \in \mathrm{B}_{R_\varepsilon}(y_0), \quad \begin{cases} T^+(\tilde{y}_0) \geqslant T^+(y_0) + \varepsilon & (\text{resp. } +1/\varepsilon \text{ si } T^+(y_0) = +\infty), \\ T^-(\tilde{y}_0) \geqslant T^-(y_0) - \varepsilon & (\text{resp. } -1/\varepsilon \text{ si } T^-(y_0) = -\infty). \end{cases}$$

En outre, l'application (resp. la même application avec des bornes *ad hoc*)

$$\left| \begin{array}{r} \mathrm{B}_{R_\varepsilon}(y_0) \longrightarrow \mathscr{C}(]T^-(y_0) - \varepsilon, T^-(y_0) + \varepsilon[, E), \\ \tilde{y}_0 \longmapsto y(\cdot, \tilde{y}_0) \end{array} \right.$$

est lipschitzienne.

Preuve On pose

$$T_\varepsilon^+ \coloneqq \min(1/\varepsilon, T^+(y_0) - \varepsilon) \quad \text{et} \quad T_\varepsilon^- \coloneqq \min(-1/\varepsilon, T^-(y_0) + \varepsilon).$$

On pose

$$M \coloneqq \sup_{t \in [T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+]} \|y(t, y_0)\|.$$

Soit $\theta \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, [0, 1])$ telle que $\theta(x) = 1$ si $x \leqslant 1$ et $\theta(x) = 0$ si $x \geqslant 2$. On pose

$$F_\varepsilon \colon \left| \begin{array}{l} J \times E \longrightarrow E, \\ (t, y) \longmapsto \theta\Big(\dfrac{\|y\|}{RM_\varepsilon}\Big) f(t, y). \end{array} \right.$$

Il est clair que $y_{|[T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+]}$ est solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y_\varepsilon'(t) = F_\varepsilon(t, y(t)), \\ y_\varepsilon(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Soit $\tilde{y}_0 \in E$. On note $y_\varepsilon(\cdot, \tilde{y}_0)$ la solution de ce problème pour valeur initiale $y_\varepsilon(t_0, \tilde{y}_0) = \tilde{y}_0$. Le lemme de GRÖNWALL donne

$$\|y_\varepsilon(t, \tilde{y}_0) - y_\varepsilon(t, y_0)\| \leqslant e^{L_\varepsilon |t - t_0|} \|\tilde{y}_0 - y_0\| \tag{2.10}$$

où L_ε est la constante de LIPSCHITZ de F_ε. On sait que, si

$$\|\tilde{y}_0 - y_0\| \leqslant R_\varepsilon := e^{-L_\varepsilon \max(|T_\varepsilon^+ - t_0|, |T_\varepsilon^- - t_0|)} M_\varepsilon,$$

alors

$$\forall t \in [T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+], \quad \|y_\varepsilon(t, \tilde{y}_0) - y_\varepsilon(t, y_0)\| \leqslant M_\varepsilon.$$

En particulier, on a

$$\forall \tilde{y}_0 \in \mathrm{B}_{R_\varepsilon}(y_0), \forall t \in [T_\varepsilon^-, T_\varepsilon^+], \quad \|y(t, \tilde{y}_0)\| \leqslant 2M_\varepsilon.$$

Donc $y_\varepsilon(\cdot, \tilde{y}_0)$ est bien solution du problème de CAUCHY (2.9). Ceci montre que, pour tout $y_0 \in \mathrm{B}_{R_\varepsilon}(y_0)$, on a

$$T^-(\tilde{y}_0) \geqslant T_\varepsilon^- \quad \text{et} \quad T^+(\tilde{y}_0) \geqslant T_\varepsilon^+.$$

De plus, la majoration 2.10 montre bien que la fonction de la proposition est lipschitzienne. □

◇ REMARQUE. Si f est classe $\mathscr{C}^1$, on peut montrer que l'application $y_0 \longmapsto y(t, y_0)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

▷ EXEMPLE. On considère le problème

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

La solution est $t \longmapsto 0$ si $y_0 = 0$ et $t \longmapsto 1/(1/y_0 - t)$ sinon. On a alors $T^+(0) = +\infty$ et $T^+(y_0) = 1/y_0$ si $y_0 > 0$.

2.5 PRINCIPE DE MAJORATION *a priori*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E$ continue. On va montrer que, si f est localement lipschitzienne, alors la solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

est maximale pour un certain intervalle $J \subset I$ avec

- soit $\sup J = \sup I$,
- soit $\sup J < \sup I$ et alors on a « explosion » de la solution au voisinage de $\sup J$.

THÉORÈME 2.24 *(de sortie de tout compact).* Soit $(]T^-, T^+[, y)$ la solution maximale du problème de CAUCHY. Si $T^+ < \sup I$, alors la trajectoire

$$\{y(t) \mid t \in]T^-, T^+[\}$$

sort de tout compact au voisinage de T^+, *i. e.* pour tout compact K de E, il existe $t_K \in]T^-, T^+[$ tel que

$$\forall t \in [t_K, T^+[, \quad y(t) \in E \setminus K.$$

Preuve Par l'absurde, supposons qu'il existe un compact K de E et une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $]T^-, T^+[$ tendant vers T^+ tels que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant \mathbb{N}, \quad y(t_n) \in K.$$

Soit $y^+ \in K$ une valeur d'adhérence de la suite $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Comme f est continue et localement lipschitzienne par rapport à y, il existe $\eta, r, L, M > 0$ tels que

(i) on a $[T^+ - \eta, T^+ + \eta] \times \mathrm{B}_r(y_0) \subset I \times E$;
(ii) pour tout $(t, y) \in [T^+ - \eta, T^+ + \eta] \times \mathrm{B}_r(y^+)$, on a $\|f(t, y)\| \leqslant M$;
(iii) pour tous $t \in [T^+ - \eta, T^+ + \eta]$ et $y_1, y_2 \in \mathrm{B}_r(y^+)$, on a $\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leqslant L \|y_2 - y_1\|$.

On pose alors $\tilde{\eta} := \min(\eta, R/2M)$ et on se donne $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|T^+ - t_n| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \quad \text{et} \quad \|y(t_n) - y^+\| \leqslant \frac{r}{2}.$$

Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont encore vraie sur $[t_n - \eta/2, t_n + \eta/2] \times \mathrm{B}_{r/2}(y(t_n))$. D'après le théorème d'existence locale, il existe une solution sur un intervalle $[t_n - \alpha, t_n + \alpha]$ avec $\alpha := \tilde{\eta}/2$. Or

$$t_n + \alpha > T^+ - \frac{\tilde{\eta}}{3} + \frac{\tilde{\eta}}{2} > T^+$$

ce qui est impossible. □

COROLLAIRE 2.25 *(explosion en temps fini).* Si E est de dimension finie et $T^+ < \sup I$, alors la solution

maximale y vérifient
$$\lim_{t \to T^+} \|y(t)\| = +\infty.$$

Preuve On prend $K = \mathrm{B}_R(0)$ avec $R > 0$ et on applique le dernier théorème. $\square$

▷ Exemple. On considère l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t))$ où $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe une fonction $V \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

(i) pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $\langle \nabla V(y), f(y) \rangle \leqslant 0$;
(ii) pour tout $M > 0$, l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^d \mid V(y) \leqslant M\}$ est borné.

Soit (I, y) la solution maximale du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0$. Alors
$$\forall t \in I, \quad \frac{\mathrm{d}V(y(t))}{\mathrm{d}t} = \langle \nabla V(y(t)), f(y(t)) \rangle \leqslant 0,$$
donc
$$\forall t \in I, \quad V(y(t)) \leqslant V(y_0)$$
ce qui montre l'existence globale sur $\mathbb{R}_+$.

Chapitre 3
Solution des équations différentielles linéaires

3.1 Système différentiel linéaire

Dans cette section, on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{L}(E))$ et $b \in \mathscr{C}(I, E)$. On va considérer l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t). \tag{3.1}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence d'une unique solution sur I.

3.1.1 Formule intégrale et résultante

(i) Système homogène

Théorème 3.1. L'ensemble V des solutions de l'équation (3.1) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, E)$ de dimension d. Plus généralement, si $y(\cdot, t_0, y_0)$ désigne la solution de (3.1) avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$, alors l'application

$$\varphi_{t_0} : \left| \begin{aligned} &E \longrightarrow V \subset \mathscr{C}^1(I, E), \\ &y_0 \longmapsto y(\cdot, t_0, y_0) \end{aligned} \right.$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Définition 3.2. On appelle système fondamental de solution de (3.1) avec $b = 0$ toute base de V.

Proposition 3.3. Soient y_1, …, y_d des solutions de (3.1) avec $b = 0$. On pose

$$w : \left| \begin{aligned} &I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &t \longmapsto \det(y_1(t), \dots, y_d(t)) \end{aligned} \right.$$

le wronskien de la famille $(y_1, \dots, y_d)$. Alors pour tout $s, t \in I$, on a la formule de Liouville

$$w(t) = w(s) \exp\left(\int_s^t \operatorname{Tr} A(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right).$$

Preuve Pour $t \in I$, on note

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_d(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}).$$

On a alors $w(t) = \det Y(t)$. Or $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$. Si on note $A(t) = (a_{i,j}(t))$, alors

$$\forall i \in [\![1, d]\!], \dot{\ell}_i(t) = \sum_{j=1}^d a_{i,j}(t) \lambda_j(t)$$

où ℓ_i est la i-ième ligne de Y. Comme $w(t) = \det(\ell_1(t), \dots, \ell_d(t))$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^d \det(\ell_1(t), \dots, \ell_{i-1}(t), \dot{\ell}_i(t), \ell_{i+1}(t), \dots \ell_d(t)) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{i,j}(t) \det(\ell_1(t), \dots, \ell_{i-1}(t), \ell_i(t), \ell_{i+1}(t), \dots \ell_d(t)) \\ &= \sum_{i=1}^d a_{i,i}(t) w(t) = \operatorname{Tr}(A(t)) w(t). \end{aligned}$$

D'où la formule de Liouville. □

DÉFINITION 3.4. On appelle matrice résolvante du système (3.1) avec $b = 0$ l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = A(t)Y(t), \\ Y(t_0) = I_d. \end{cases} \tag{3.2}$$

On la note $S(\cdot, t_0)$.

PROPOSITION 3.5. Pour tous $t, t_0, t_1 \in I$, la matrice résolvante S vérifie

$$S(t, t_0) = S(t, t_1)S(t_1, t_0).$$

En outre, pour tous $t_0, t_1 \in I$, on a $S(t_1, t_0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $S(t_1, t_0)^{-1} = S(t_0, t_1)$. Enfin, la solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t), \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

est la fonction $t \longmapsto S(t, t_0)y_0$.

Preuve La première propriété vient du faire que, si $P \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ et $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, alors

$$\frac{\mathrm{d}(Y(t)P)}{\mathrm{d}t} = A(t)(Y(t)P).$$

L'inversible vient du cas $t = t_0$. □

(ii) Système différentiel non homogène

On note S la résolvante du système (3.1) avec $b = 0$. Alors la solution du système (3.1) avec b quelconque est donnée par la formule de DUHAMEL

$$\forall t \in I, \quad y(t) = S(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t, s)y(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.3}$$

En effet, étant donnée $S(\cdot, t_0)y_0$ la solution du système homogène, on cherche la solution du sysètme avec b quelconque sous la forme $y(t) = S(t, t_0)z(t)$. En reportant dans l'équation, on trouve que

$$\dot{S}(t, t_0)s(t) + S(t, t_0)\dot{z}(t) = A(t)S(t, t_0)z(t) + b(t),$$

donc

$$\dot{z}(t) = S(t, t_0)^{-1}b(t) = S(t_0, t)b(t).$$

On obtient alors

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} S(t_0, s)b(s)\,\mathrm{d}s$$

et on en déduit

$$Y(t) = S(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{S(t, t_0)S(t_0, s)}_{S(t,s)} b(s)\,\mathrm{d}s$$

avec $z_0 = y_0$. D'où la formule (3.3)

3.1.2 Système à coefficients constants

On va considérer l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t). \tag{3.4}$$

où $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ ne dépend plus du temps et $b \in \mathbb{K}^d$.

(i) Exponentielle de matrice

DÉFINITION 3.6. L'exponentielle d'une matrice $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ est la matrice

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

PROPRIÉTÉ 3.7. Soient $A, B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$.

1. Si A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
2. On a $e^0 = I_d$.
3. Si B est inversible, alors $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.

4. Si A est nilpotente d'indice $m \leqslant d$, alors

$$e^A = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!}.$$

◇ REMARQUE. On peut montrer que, si A et B ne commutent pas, alors $e^A e^B = e^C$ avec

$$C \coloneqq A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [A, B]]) + \cdots$$

avec $[A, B] \coloneqq AB - BA$

(ii) Résolvante

Dans le cas constant, la résolvante prend une forme très simple qui est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\Sigma(t) = e^{tA}.$$

L'application Σ est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

3.1.3 Calcul des solutions homogènes

Si y_0 est une vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors la fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)\lambda} y_0$ est solution du problème de CAUCHY

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Plus généralement, si A est diagonalisable, *i. e.* il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$, alors on fait le changement de variable $z = P^{-1}y$ et les solutions sont de la forme $z(t) = e^{tD} z_0$.

PROPOSITION 3.8 *(réduction de JORDAN).* Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique

$$\chi_A = (-1)^d \prod_{i=1}^{\ell} (X - \lambda_j)^{m_j}.$$

Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mu_\ell} \end{pmatrix}$$

où les matrices J_{μ_k} sont des blocs de JORDAN avec $\mu_k \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\}$.

◇ REMARQUE. On peut écrire de façon unique J_μ comme $J_\mu = \mu I_n + N$ où N est une matrice nilpotente dont on note m l'indice. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tJ_\mu} = e^{t\mu} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{t^n}{n!} N^n.$$

PROPOSITION 3.9. Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$\chi_A = (-1)^d \prod_{i=1}^{\ell} (X - \lambda_j)^{m_j}.$$

Alors pour tout $j \in [\![1, \ell]\!]$, il existe m_j solutions indépendantes de l'équation $\dot{y} = Ay$ et elles s'écrivent

$$y_{j,k}(t) = e^{t\lambda_j} p_{j,k}(t), \quad k \in [\![1, m_j]\!]$$

où $p_{j,k} \in \mathbb{C}^d_{k-1}[X]$. L'ensemble des solutions constitue un système fondamental de solutions.

PROPOSITION 3.10. Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique

$$\chi_A = (-1)^d \prod_{i=1}^{\ell} (X - \lambda_j)^{m_j} \quad \text{avec} \quad \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j.$$

Alors il existe un système fondamental de solutions de la forme

$$t \longmapsto t^r e^{t\alpha_j} \cos(\beta_j t)a, \quad t \longmapsto t^s e^{t\alpha_j} \sin(\beta_j t)b \quad \text{avec} \quad r, s \leqslant m_j - 1,\ a, b \in \mathbb{R}^d.$$

3.1.4 Groupe à un paramètre

DÉFINITION 3.11. On appelle groupe à un paramètre tout morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_d(\mathbb{K}), \cdot)$ différentiable.

On va montrer que les seuls groupes à un paramètre sont les solutions de systèmes à coefficients constants. Soit B un groupe à paramètre. On considère $A \coloneqq B'(0)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$B'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{h} = \left(\lim_{h \to 0} \frac{B(h) - B(0)}{h}\right) B(t) = AB(t).$$

Alors B est solution du système $B'(t) = AB(t)$ avec $B(0) = I_d$. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad B(t) = e^{tA}.$$

La matrice A est appelée générateur du groupe.

▷ EXEMPLES. – Pour $A = \lambda I_d$, on a $\{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{e^t I_d \mid t \in \mathbb{R}\}$.
– Pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

3.1.5 Équations différentielles d'ordre supérieur

On s'intéresse aussi aux équations du type

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t) z(t) = b(t) \tag{3.6}$$

où les fonctions a_0, …, a_{n-1} et b sont continues de I dans $\mathbb{R}$.

(i) Transformation en un système d'ordre 1

On suppose que $b = 0$. En posant $y(t) \coloneqq (z(t), z'(t), \dots, z^{(n-1)}(t))$, on obtient le système

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} y(t).$$

THÉORÈME 3.12. Si $g = 0$, alors l'ensemble V est solution de l'équation (3.6) est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. On note $z(\cdot, z_0, \dots, z_{n-1})$ la solution au problème de CAUCHY

$$\begin{cases} z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t) z(t) = b(t), \\ \hfill z(t_0) = z_0, \\ \hfill \vdots \\ \hfill z^{(n-1)}(t) = z_{n-1}. \end{cases}$$

De plus, l'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathscr{C}(I, \mathbb{R}) \\ (z_0, \dots, z_{n-1}) & \longmapsto & z(\cdot, z_0, \dots, z_{n-1}) \end{array} \right.$$

est une isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans V. Si g n'est pas nulle, alors l'ensemble des solutions est un espace affine $\tilde{z} + V$ de dimension n de $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ où $\tilde{z}$ est une solution particulière.

(ii) Wronskien

Pour tout $t \in I$, on pose

$$W(t) \coloneqq \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(n-1)}(t) & \dots & z_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w(t) \coloneqq \det W(t).$$

La formule de LIOUVILLE donne ici

$$\forall s, t \in I, \quad w(t) = w(s) \exp\left(-\int_s^t a_{n-1}(\sigma) \,\mathrm{d}\sigma\right).$$

(iii) Calcul des solutions

Cas des systèmes à coefficients constants. On introduit le polynôme caractéristique de l'équation

$$P \coloneqq X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Proposition 3.13. Si λ est une racine de χ_A de multiplicité m, alors les fonctions

$$t \in I \longmapsto t^r e^{\lambda t}, \quad r \in [\![0, m-1]\!]$$

sont des solutions indépendantes de l'équation (3.6) avec $g = 0$.

Preuve Pour $t \in I$, on pose $z(t) = Q(t)e^{t\lambda}$ avec Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$. Alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $t \in I$, on a

$$z^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} Q^{(j)}(t)\lambda^{k-j}e^{t\lambda}.$$

En prenant $a_n = 1$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k z^{(k)}(t) &= e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{k}\binom{k}{j} Q^{(j)}(t)\lambda^{k-j} \\ &= e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{n}\frac{Q^{(j)}(t)}{j!}\sum_{k=j}^{n}\frac{k!}{(k-j)!}a_k\lambda^{k-j} \\ &= e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{n}\frac{Q^{(j)}(t)}{j!}P^{(j)}(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.14. Soient λ_1, …, λ_ℓ les racines du polynôme caractéristique de multiplicité respective m_1, …, m_ℓ. Pour $j \in [\![1, \ell]\!]$, on a $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Alors il existe un système fondamental de solution de la forme

$$t \longmapsto t^r e^{t\alpha_j}\cos(\beta_j t), \quad t \longmapsto t^s e^{t\alpha_j}\sin(\beta_j t) \quad \text{avec} \quad r, s \leqslant m_j - 1.$$

Cas des coefficients variables. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ un système fondamentale de solutions de l'équation homogène. On note $W(t)$ la wronskienne. Alors il existe une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$z(t) = c_1(t)z_1(t) + \cdots + c_n(t)z_n(t)$$

où les fonctions $c_i \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ vérifient

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{n-1}(t) \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix} = W(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

La résolvante s'écrit alors

$$\forall s, t \in I, \quad S(t, s) = W(t)W^{-1}(s).$$

La formule de Duhamel devient alors

$$y(t) = W(t)W^{-1}(t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} W(t)W^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s.$$

3.2 Comportement qualitatif des solutions

3.2.1 Stabilité asymptotique de l'origine

Théorème 3.15. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie d et $A \in \mathscr{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) toute solution de $\dot{y} = Ay$ tend vers 0 en $+\infty$;
(ii) $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$.

Preuve Les solution du système $\dot{y} = Ay$ s'écrivent $y(t) = e^{tA}y_0$. D'après la décomposition de Dunford, il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ diagonale et $N \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $A = P(D+N)P^{-1}$. Alors les solutions s'écrivent $y(t) = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}y_0$, donc

$$\|y(t)\| \leqslant \|P\|\,\|P^{-1}\|\,\|e^{tA}\|\,\|e^{tN}\|.$$

On suppose (ii). On pose $\mu \coloneqq \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda < 0$. Ainsi $\|e^{tD}\| \leqslant Ce^{\mu t}$ et $\|e^{tN}\| \leqslant C't^{d-1}$ avec $C, C' > 0$. Donc les solutions tendent vers 0 en $+\infty$. La réciproque est claire. □

3.2.2 Solutions bornés

Théorème 3.16. Soit $A \in \mathscr{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) toute solution de $\dot y = Ay$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$;
(ii) $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ et la multiplicité géométrique des valeurs propres de parties réelles nulle est égale à la multiplicité algébrique.

Preuve On reprend la même preuve que précédemment. □

Proposition 3.17. Soit $A \in \mathscr{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) pour toute donnée $b \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ bornée, il existe une unique solution bornée $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ de $\dot y = Ay + b$.
(ii) $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Preuve On suppose (i). Soient $\lambda \in \sigma(A)$ et $y_0 \in E$ un vecteur propre associé à λ. Alors $t \longmapsto e^{t\lambda}y_0$ est une solution pour $b = 0$. Si $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, alors la solution est bornée et de même pour $t \longmapsto \mu e^{t\lambda}y_0$ avec $\mu \in \mathbb{C}$ ce qui est impossible par unicité. Donc $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

On suppose (ii). La formule de Duhamel donne

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s = e^{tA}\left[y_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

On considère

$$y_0 \coloneqq -\lim_{t\to+\infty}\int_0^s e^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Il existe $\mu, C > 0$ tels que

$$\forall s \geqslant 0, \quad \left\|e^{-sA}\right\| \leqslant Ce^{-\mu s}.$$

Alors

$$\left\|\int_0^t e^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s\right\| \leqslant \frac{\|b\|_\infty}{\mu}(1 - e^{-t\mu}),$$

donc

$$\|y(t)\| = \left\|-\int_t^{+\infty} e^{(t-s)A}(s)\,\mathrm{d}s\right\| \leqslant \|b\|_\infty \frac{C}{\mu}.$$ □

3.2.3 Solutions périodiques

On suppose ici que les fonctions $A \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{C}^d))$ et $b \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$ sont T-périodiques avec $T > 0$. Existe-t-il des solutions périodiques de l'équation $\dot y(t) = A(t)y(t) + b(t)$. On note $y(\cdot, t_0, y_0)$ l'unique solution qui passe par y_0 en t_0.

▷ Exemple. Les solutions du système

$$\dot y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

sont de la forme

$$y(t) = \begin{pmatrix} b_2\dfrac{t^2}{2} + (y_2(0) + b_1)t + y_1(0) \\ b_2 t + y_2(0) \end{pmatrix}.$$

Elles sont périodiques si et seulement si $b_2 = 0$ et $y_2(0) = -b_1$.

Théorème 3.18 *(existence de solution périodique).* Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :
(i) il existe une solution périodique de $\dot y(t) = A(t)y(t) + b(t)$;
(ii) pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application $y_0 \longmapsto y(T + t_0, t_0, y_0)$ a un point fixe ;
(iii) il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'application $y_0 \longmapsto y(T + t_0, t_0, y_0)$ ait un point fixe.

Preuve Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont triviales. Supposons (iii) et montrons (i). Soit $y_0 \in \mathbb{C}^d$ un point fixe de l'application $y_0 \longmapsto y(T+t_0, t_0, y_0)$. On pose $y_* = y(\cdot, t_0, y_0)$. On sait que

$$\dot{y}_*(t) = A(t)y_*(t) + b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On considère $z\colon t \in \mathbb{R} \longmapsto y_*(t+T)$. Comme A et b sont périodiques, il vaut immédiatement que

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a $z(t_0) = y_*(t_0+T) = y_0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que $z = y_*$ ce qui montre que la solution y^* est T-périodique. $\square$

Théorème 3.19 *(solution périodique et solution bornée).* Alors il existe une solution périodique de l'équation

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

si et seulement s'il existe une solution bornée.

Preuve Le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose qu'il existe une solution bornée. Par l'absurde, supposons qu'il n'existe aucune solution périodique. D'après le théorème précédent, cela signifie que l'équation

$$y_0 = S(T,0)y_0 + \int_0^T S(T,s)b(s)\,\mathrm{d}s$$

n'a pas de solution, c'est-à-dire $s \notin \operatorname{Im}(I_d - U)$ où

$$U \coloneqq S(T,0) \quad \text{et} \quad z \coloneqq \int_0^T S(T,s)b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$\begin{cases} \dot{S}(t+nT, nT) = A(t)S(t+nT, nT), \\ \quad S(nT, nT) = I_d. \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme donc que $S(t+nT, nT) = S(t,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, on a

$$S((n+1)T, nT) = S(T,0) = U.$$

En réinjectant dans la formule de Duhamel, on obtient que

$$y((n+1)T) = Uy(nT) + \int_{nT}^{(n+1)T} S((n+1)T, s)b(s)\,\mathrm{d}s.$$

En utilisant la périodicité de $S((n+1)T, \cdot)$ et b, on a

$$\int_{nT}^{(n+1)T} S((n+1)T,s)b(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^T S((n+1)T, s+nT)b(s+nT)\,\mathrm{d}s = \int_0^T S(T,s)b(s)\,\mathrm{d}s = z.$$

D'où

$$y((n+1)T) = Uy(nT) + z.$$

On note U^* l'adjoint de U pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^d$. Soient $x \in \operatorname{Im}(I_d - U)$ et $x \in \operatorname{Ker}(I_d - U^*)$. Il existe $u \in \mathbb{C}^n$ tel que $x = u - Uu$. Alors

$$\langle x, x' \rangle = \langle u - Uu, x' \rangle = \langle u, x' \rangle - \langle Uu, x' \rangle = \langle u, x' \rangle - \langle u, U^* x' \rangle = 0.$$

On en déduit que $\operatorname{Im}(I_d - U) = \operatorname{Ker}(I_d - U^*)^\perp$. Ainsi il existe $u \in \mathbb{C}^d$ tel que $U^*u = u$ et $\langle u, z \rangle \neq 0$. On obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} = \langle y((n+1)T), u \rangle &= \langle Uy(nT), u \rangle + \langle u, z \rangle \\ &= \langle y(nT), U^*u \rangle + \langle u, z \rangle \\ &= \alpha_n + \langle u, z \rangle. \end{aligned}$$

On a alors $\alpha_{n+1} = \alpha_0 + (n+1)\langle u, z \rangle$ avec $\langle u, z \rangle \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\alpha_n \to \pm\infty$ ce qui contredit la bornitude de y. $\square$

Chapitre 4
Stabilité des systèmes non linéaires

4.1 Introduction

Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^1$. On considère l'équation différentielle ordinaire autonome

$$\dot{y} = f(y).$$

Définition 4.1. On appelle *portrait de phase* de cette équation l'ensemble

$$\left\{ y(t, 0, y_0) \;\middle|\; y_0 \in \mathbb{R}^d, t \in J_{y_0} \right\}$$

où J_{y_0} est l'intervalle de définition de la solution maximale passant par y_0 en $t = 0$.

Définition 4.2. Un système *hamiltonien* est un système du type

$$\dot{y}(t) = J^{-1}\nabla H(y(t)) \quad \text{avec} \quad H \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que H est constant le long de toute trajectoire. Soit y une solution de ce système. Alors

$$\frac{\mathrm{d}H(y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y}(y(t))\dot{y}(t) = {}^{\mathrm{t}}(\nabla H(y(t)))J^{-1}\nabla H(y(t)) = 0.$$

4.2 Différentes notions de stabilité

4.2.1 Théorème de Grobmann-Hartman

On considère la même équation différentielle que précédemment.

Définition 4.3 *(linéarité)*. Soit et $y_0 \in \mathbb{R}^d$. On appelle système *linéarisé* le système

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0) + f(y_0).$$

Théorème 4.4 *(Grobmann-Hartman)*. On suppose que $f(0) = 0$ et que la matrice $A := \partial_y f$ n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle. Il existe existe des voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et un homéomorphisme $h\colon U \to V$ qui envoie les trajectoires du système non linéaire sur celle du système linéaire en préservant le sens du temps. Plus précisément, si $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est une valeur initiale telle que $y(t, y_0) \in U$, alors $e^{tA}h(y_0) \in V$ et

$$y(t, y_0) = h^{-1}(e^{tA}h(y_0)).$$

◇ Remarque. Ce théorème est énoncé dans le cas $y_0 = 0$. Si $y_0 \neq 0$ avec $f(y_0) = 0$, alors on peut se ramener au cas $y_0 = 0$ en posant $\tilde{y} = y - y_0$ et $\tilde{f}(\tilde{y}) = f(\tilde{y} + y_0)$

4.2.2 Notion de stabilité

Définition 4.5 *(équilibre)*. On dit que $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est un point d'équilibre de l'équation $\dot{y} = f(y =$ si la fonction constante $t \longmapsto y_0$ est solution.

Définition 4.6 *(stabilité)*. On dit que $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est

1. une équilibre stable si, pour tout voisinage U de y_0, il existe un voisinage V de y_0 tel que, pour tout $\tilde{y}_0 \in V$,
   (i) $t \longmapsto y(t, \tilde{y}_0)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$,
   (ii) $y(t, \tilde{y}_0) \in U$ pour tout $t \geqslant 0$.
2. un équilibre asymptotiquement stable si c'est un équilibre stable et s'il existe un voisinage W de y_0 tel que ,

pour tout $\tilde{y}_0 \in W$,
(i) $t \longmapsto y(t, \tilde{y}_0)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$,
(ii) $y(t, \tilde{y}_0) \to y_0$ quand $t \to +\infty$.

THÉORÈME 4.7 *(stabilité en première approximation).* Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre. Si y_0 est un équilibre asymptotiquement stable du linéarisé

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0),$$

alors c'est un équilibre asymptotiquement stable de $\dot{y} = f(y)$.

COROLLAIRE 4.8 *(non stabilité en première approximation).* Si $\partial_y f(y_0)$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors y_0 n'est pas un équilibre stable de $\dot{y} = f(y)$.

◇ REMARQUE. On ne peut pas conclure dans le cas où $\partial_y f(y_0)$ a une valeur propre de partie réelle nulle.

4.2.3 Produit scalaire adapté à un endomorphisme

THÉORÈME 4.9. Soit $g \in \mathscr{L}(R^d)$. On note A sa matrice dans la base canonique et P son polynôme caractéristique. On note $P = P_+ P_-$ où P_+ (resp. P_-) a toute ses racines de parties réelles positives (res. strictement négative). Le lemme des noyaux donnes

$$E = E_+ \oplus E_- \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_- = \operatorname{Ker} P_-(A), \\ E_+ = \operatorname{Ker} P_+(A). \end{cases}$$

Alors il existe un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha > 0$ tels que
- $\operatorname{Ker} P_-(A)$ et $\operatorname{Ker} P_+(A)$ soient orthogonaux,
- pour tout $x \in E_-$, on ait $\langle g(x), x\rangle \leqslant -2\alpha\langle x, x\rangle$,
- pour tout $x \in E_+$, on ait $\langle g(x), x\rangle \geqslant -\alpha\langle x, x\rangle$.

Preuve Cf. cours d'algèbre. □

4.2.4 Preuve du théorème de stabilité en première approximation

LEMME 4.10 *(fonctions de LYAPUNOV et stabilité).* On considère le système $\dot{y} = f(y)$ avec $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On suppose que 0 est un point d'équilibre et qu'il possède une fonction de LYAPUNOV stricte, *i. e.* il existe une boule ouverte B centrée en 0, une fonction $V \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et un réel $\alpha > 0$ tels que
(i) 0 soit un minimum strict de V sur B,
(ii) pour tout $y \in B$, on ait $dV(y)(f(y)) \leqslant -\alpha(V(y) - V(0))$.
Alors 0 est asymptotiquement stable.

Preuve Pour simplifier la preuve, on considère le cas où $V : y \in \mathbb{R}^d \longmapsto \langle y, y\rangle$. L'hypothèse (ii) s'écrit simplement

$$\forall y \in B, \quad 2\langle f(y), y\rangle \leqslant -\alpha \left\| y \right\|_2^2.$$

Quitte à réduire B, on peut supposer que c'est une boule par la norme $\|\ \|_2$. Soient $\tilde{y}_0 \in B$ et $J := \left]T^-, T^+\right[$ l'intervalle de définition de la solution maximal $y(\cdot, \tilde{y}_0)$. Montrons que $T^+ = +\infty$ et $\|y(t, \tilde{y}_0)\| \leqslant \|\tilde{y}_0\|$ pour $t \geqslant 0$. On considère

$$X := \{\tau \in \left]0, T^+\right[\mid \forall t \in [0, \tau[,\ y(t, \tilde{y}_0) \in B\}.$$

Comme la fonction $t \longmapsto y(t, \tilde{y}_0)$ est continue et la boule B est ouvert, l'ensemble X est non vide. On considère la fonction

$$\varphi \colon t \in J \longmapsto \langle y(t, \tilde{y}_0), y(t, \tilde{y}_0)\rangle.$$

Pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\dot{\varphi}(t) = 2\langle y(t, \tilde{y}_0), f(y(t, \tilde{y}_0))\rangle \leqslant -2\alpha \left\| y(t, \tilde{y}_0) \right\|^2 = -\alpha\varphi(t),$$

donc une intégration donne

$$\varphi(t) \leqslant e^{-\alpha t}\varphi(0) = e^{-\alpha t} \left\| \tilde{y}_0 \right\|^2$$

et on en déduit que

$$\left\| y(t, \tilde{y}_0) \right\| \leqslant e^{-\alpha t/2} \left\| \tilde{y}_0 \right\| \leqslant \left\| \tilde{y}_0 \right\|.$$

Cela montre que 0 est stable. On montre ensuite qu'il est stable. □

Preuve du théorème de stabilité Quitte à modifier f, on peut supposer que $y_0 = 0$. On pose $g \coloneqq df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$. Comme g a ses valeurs propres de parties réelles négatives, d'après le théorème précédent, on peut construire un produit scalaire réel $\langle\ ,\ \rangle$ et $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \langle g(y), y\rangle \leqslant -2\alpha \|y\|_2^2 .$$

La fonction $V \colon y \longmapsto \frac{1}{2}\|y\|_2^2$ est classe $\mathscr{C}^1$ et admet 0 pour minimum strict. De plus, au voisinage de 0, on a

$$f(y) = g(y) + o(y),$$

donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall y \in B_\varepsilon \coloneqq \mathrm{B_f}(0,\varepsilon), \quad \|f(y) - g(y)\| \leqslant \alpha \|y\| .$$

Pour tout $y \in B_\varepsilon$, on a

$$dV(y)(f(y)) = \langle y, f(y)\rangle = \langle y, g(y)\rangle + \langle y, f(y) - g(y)\rangle,$$

donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$dV(y)f(y) \leqslant -2\alpha \|y\|^2 + \|y\|_2 \|f(y) - g(y)\|_2 \leqslant -\alpha \|y\|_2^2 .$$

Cela montre que V est une fonction de Lyapunov du système, donc 0 est un asymptotiquement stable. □

4.2.5 Preuve du théorème de non stabilité en première approximation

Théorème 4.11 *(Cetaev).* On considère le système $\dot{y} = f(y)$ avec $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On suppose que $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est un point d'équilibre et qu'il existe une boule B centrée en y_0, une fonction $V \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tels que

(i) $y_0 \in \partial\Omega$,
(ii) $V > 0$ sur Ω et $V = 0$ sur $\partial\Omega$,
(iii) pour tout $y \in \Omega \cap B$, on ait $dV(y)(f(y)) > 0$.

Alors y_0 n'est pas un équilibre stable.

Preuve Par l'absurde, supposons que y_0 soit un équilibre stable. Il existe un voisinage U, d'adhérence compact incluses strictement dans B, et un voisinage ouvert W tel que, pour tout $\tilde{y}_0 \in W$, la solution $y(\cdot, \tilde{y}_0)$ issue de $\tilde{y}_0$ existe sur $\mathbb{R}_+$ et est entièrement contenue dans U. L'intersection $\Omega \cap W$ est non vide. Soit $\tilde{y}_0 \in \Omega \cap W$. On pose

$$X \coloneqq \{\tau > 0 \mid \forall t \in [0,\tau],\ y(t, \tilde{y}_0) \in \Omega\} .$$

Cet ensemble est non vide car la fonction $y(\cdot, \tilde{y}_0)$ est continue et l'ensemble Ω est ouvert. De plus, l'ensemble X est un ouvert de $\mathbb{R}_+$. Montrons que X est aussi fermé dans $\mathbb{R}_+$. Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergeant vers $\tau_\infty \geqslant 0$. On a $y(\tau_\infty, \tilde{y}_0) \in \overline{\Omega}$. Pour tous $\tau \in X$ et $t \in [0,\tau]$, on considère $\varphi(t = V(y(t, \tilde{y}_0))$ et on a

$$\dot{\varphi}(t) = dV(y(t, \tilde{y}_0))(f(y(t, \tilde{y}_0))) > 0,$$

donc $\varphi(t) > \varphi(0) = V(\tilde{y}_0)$. En particulier, par passage à la limite, on a $\varphi(\tau_\infty) > 0$, donc $V(y(\tau_\infty, \tilde{y}_0)) > 0$, donc $y(\tau_\infty, \tilde{y}_0) \notin \partial\Omega$, donc $y(\tau_\infty, \tilde{y}_0) \in \Omega$ et $\tau_\infty \in X$. Cela montre que X est un fermé. Comme $\mathbb{R}_+$ est connexe, on en déduit que $X = \mathbb{R}_+$. Ainsi pour tout $t \geqslant 0$, on a $y(t, \tilde{y}_0) \in \Omega$. Considérons

$$K \coloneqq \{y \in \overline{U} \cap \overline{\Omega} \mid V(y) \geqslant V(\tilde{y}_0)\}.$$

Cet ensemble est compact. De plus, on a $K \subset \overline{U} \subset B$ et $K \subset \Omega$. Donc pour tout $y \in K$, on a $dV(y)(f(y)) > 0$. Soit

$$\alpha \coloneqq \inf_{y\in K} dV(y)(f(y)) > 0.$$

Comme $y(t, \tilde{y}_0) \in K$ pour tout $t \geqslant 0$, on a $\dot{\varphi}(t) \geqslant \alpha$ pour tout $t \geqslant 0$, donc

$$\forall t \geqslant 0, \quad \varphi(t) \geqslant \alpha t + \varphi(0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

Or

$$\forall t \geqslant 0, \quad \varphi(t) = V(y(t, \tilde{y}_0)) \leqslant \sup_{y\in K} V(y) < +\infty$$

ce qui est absurde. Donc y_0 est un équilibre instable. □

Preuve du théorème de non stabilité On se ramène au cas $y_0 = 0$. On pose $g \coloneqq df(0)$. En appliquant le théorème à $-g$, il existe un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^d$ en somme directe et un réel $\alpha > 0$ tels que

$$\forall y \in F, \quad \langle g(y), y\rangle \geqslant 2\alpha \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \forall y \in F, \quad \langle g(y), y\rangle \leqslant \alpha \|y\|^2 .$$

On définit $V \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (y_1, y_2) \in E \times F, \quad V(y_1 + y_2) = \|y_1\|^2 - \|y_2\|^2 .$$

On pose
$$\Omega \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^d \mid V(y) > 0\}.$$
Comme f est classe $\mathscr{C}^1$, on a $f(y) = g(y) + o(y)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall b \in \mathrm{B}(0, \varepsilon), \quad \|f(y) - f(y)\| \leqslant \frac{\alpha}{4} \|y\| .$$
On veut montrer que
$$\forall y \in \Omega \cap \mathrm{B}(0, \varepsilon), \quad dV(y)(f(y)) > 0.$$
Soient $h \coloneqq h_1 + h_2 \in E \oplus F$ et $y \coloneqq y_1 + y_2 \in E \oplus F$. Alors
$$\begin{aligned} V(y+h) - V(y) &= \langle y_1 + h_1, y_1 + h_1 \rangle - \langle y_2 + h_2, y_2 + h_2 \rangle - (\langle y_1, y_1 \rangle - \langle y_2, y_2 \rangle) \\ &= 2\langle y_1, h_1 \rangle - 2\langle y_2, h_2 \rangle + \|h_1\|^2 - \|h_2\|^2 , \end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned} |dV(y)(h)| &= |2\langle y_1, h_1 \rangle - 2\langle y_2, h_2 \rangle| \\ &\leqslant 2(|\langle y_1, h_1 \rangle| + |\langle y_2, h_2 \rangle|) \\ &\leqslant 4 \|y\| \|h\| . \end{aligned}$$
En particulier, pour tout $y \in \mathrm{B}(0, \varepsilon)$, on obtient que
$$|dV(y)(f(y) - g(y))| \leqslant 4 \|y\| \|f(y) - g(y)\| \leqslant \alpha \|y\|^2 .$$
Or E et F sont stable par g, donc
$$\begin{aligned} dV(y)(g(y)) = 2(2\langle y_1, g(y_1) \rangle - 2\langle y_2, g(y_2) \rangle) &\geqslant 2(2\alpha \|y_1\|^2 - \alpha \|y_2\|^2) \\ &\geqslant 2\alpha \|y_1\|^2 . \end{aligned}$$
Finalement, pour tout $y \in \mathrm{B}(0, \varepsilon) \cap \Omega$, on a
$$\begin{aligned} dV(y)(f(y)) &= dV(y)(g(y)) + dV(y)(f(y) - g(y)) \\ &\geqslant 2\alpha \|y_1\|^2 - \alpha \|y\|^2 > 0. \end{aligned}$$
On conclut ensuite par le théorème de Cetaev. $\square$

Chapitre 5

Flots et propriétés

5.1 Définition du flot

Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Le système admet, pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, une solution maximale notée $y(\cdot, t_0, y_0)$ et définie sur $J(t_0, y_0) \subset \mathbb{R}$. L'application

$$(t, t_0, y_0) \longmapsto y(t, t_0, y_0)$$

est définie sur l'ouvert

$$\Omega \coloneqq \{(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \mid t \in J(t_0, y_0)\}.$$

On note plus simplement

$$\Omega_0 \coloneqq \{(t, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \mid t \in J(0, y_0)\}.$$

Définition 5.1. On appelle *flot* de l'équation $\dot{y} = f(y)$ les applications

$$\left| \begin{array}{rcl} \Omega_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^d, \\ (t, y_0) & \longmapsto & \varphi_t(y_0) \coloneqq y(t, 0, y_0). \end{array} \right.$$

◇ Remarques. 1. On a clairement

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_t(y_0)}{\mathrm{d}t} = f(\varphi_t(y_0)) \quad \text{et} \quad \varphi_0(y_0) = y_0.$$

2. Pour tout $(t, t_0, y_0) \in \Omega$, on a $(t - t_0, y_0) \in \Omega_0$ et $y(t, t_0, y_0) = \varphi_{t-t_0}(y_0)$.

Proposition 5.2. L'application $(t, y) \in \Omega_0 \longmapsto \varphi_t(y) \in \mathbb{R}^d$ est continue. En particulier, pour tout $(t, y) \in \Omega_0$, il existe un voisinage V de y tels φ_t soit définie et continue sur V.

Proposition 5.3. On suppose que f est globalement lipschitzienne. Alors la flot est défini sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ et, en notant $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des difféomorphismes de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même, l'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d), \\ t & \longmapsto & \varphi_t \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d), \circ)$.

5.2 Différentiabilité par rapport à la condition initiale

On s'intéresse à la différentiabilité du flot. On suppose ici que la fonction f est classe $\mathscr{C}^1$. On veut montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la différentielle $\partial\varphi_t(y_0)/\partial y_0$ existe et satisfait

$$\frac{\partial\varphi_t(y_0)}{\partial y_0} = S(t, y_0).$$

Théorème 5.4. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne telle que $\partial f/\partial y$ existe et soit continue sur $\mathbb{R}^d$. Alors le flot de l'équation

$$\dot{y} = f(y)$$

est une application continûment différentiable par rapport à y et sa dérivée

$$\Psi_t\colon y_0 \longmapsto \frac{\partial\varphi_t(y_0)}{\partial y_0}$$

vérifie l'*équation variationnelle*

$$\dot{\Psi}_t(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0))\Psi_t(y_0) \quad \text{et} \quad \Psi_0(y_0) = I_d.$$

Preuve Pour montrer l'existence de la différentielle, il suffit d'établir, pour $(t, y_0) \in \Omega_0$, l'existence d'une fonction $\varepsilon \to \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et d'un réel $r > 0$ tels que

$$\forall\, \Delta y_0 \in \mathrm{B}(0, r), \quad \|\varphi_t(y_0 + \Delta y_0) - \varphi_t(y_0) - S(t, y_0)\,\Delta y_0\| \leqslant \|\Delta y_0\|\,\varepsilon(\|\Delta y_0\|) \text{ et } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Sachant que

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_t}{\mathrm{d}t}(y_0 + \Delta y_0) = f(\varphi_t(y_0 + \Delta y_0)),$$

on détermine une équation satisfait $z(s) = \varphi_(y_0) + S(s, y_0)\,\Delta y_0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} &= \dot{\varphi}_s(y_0) + \dot{S}(s, y_0)\,\Delta y_0 \\ &= f(\varphi_s(y_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y_0))S(s, y_0)\,\Delta y_0 \\ &= f(z(s)) - \delta(s)\end{aligned}$$

où

$$\delta(s) = f(\varphi_s(y_0) + S(t, y_0)\,\Delta y_0) - f(\varphi_s(y_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y_0))S(s, y_0)\,\Delta y_0.$$

Il faut majorer $\|\delta(s)\|$. On note sur la fonction $s \longmapsto S(s, y_0)$ est continue sur $[0, t]$, donc elle est majoré par un certain réel $M > 0$. Soit $\rho > 0$. Maintenant, si $r \leqslant \rho/M/$, la fonction $s \in [0, 1] \longmapsto z(s)$ ne sort pas du cylindre compact

$$K_\rho \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^d \mid \exists s \in [0, t],\ \|y - \varphi_s(y_0)\| \leqslant \rho\}$$

et, si ρ est suffisamment petit, alors $K_\rho \subset \Omega_0$. En utilisant le théorème des accroissements finis sur K_ρ avec la fonction

$$\Delta z \longmapsto G(\Delta z) \coloneqq f(z + \Delta z) - f(z) - f'(z)\,\Delta z,$$

on a

$$\|G(\Delta z)\| \leqslant \|\Delta z\| \sup_{\mu \in [0,1]} \|G'(\mu\,\Delta z)\| \quad \text{avec} \quad |G'(\Delta z)| = f'(z + \Delta z) - f'(z).$$

Puis on va utiliser l'uniforme continuité de f' sur K_ρ : on peut écrire

$$\|G'(\Delta z)\| = \|f'(z + \Delta z) - f'(z)\| \leqslant \beta(\|\Delta z\|)$$

où β est une fonction qu'on peut construire en escalier, monotone, de limite 0 en 0. Comme f est localement lipschitzienne sur K_ρ, elle y est globalement lipschitzienne et on note L sa constante de Lipschitz sur K_ρ. Soit $s \in [0, t]$. Comme

$$z(s) - \varphi_s(y_0 + \Delta y_0) = \int_0^s [f(z(\sigma)) - f(\varphi_\sigma(y_0 + \Delta y_0)) - \sigma(s)]\,\mathrm{d}\sigma,$$

le lemme de Grönwall donne

$$\|z(s) - \varphi_s(y_0 + \Delta y_0)\| \leqslant \int_0^s L\,\|z(\sigma) - \varphi_\sigma(y_0 + \Delta y_0)\|\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^s \delta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

En prenant $z = \varphi_s(y_0)$ et $\Delta s = S(s, y_0)$, on a $\delta(s) = G(S(s, y_0)\,\Delta y_0)$, donc

$$\begin{aligned}\|\delta(s)\| &\leqslant \beta(\|S(s, y_0)\,\Delta z_0\|) \times \|S(s, y_0)\,\Delta z_0\| \\ &\leqslant \beta(M\,\|\Delta y_0\|)M\,\|\Delta y_0\|.\end{aligned}$$

Le lemme de Grönwall donne alors

$$\|z(s) - \varphi_s(y_0 + \Delta y_0)\| \leqslant \beta(M\,\|\Delta y_0\|)M\,\|\Delta y_0\|\,\frac{e^{Lt} - 1}{L}.$$

Alors on a bien

$$\|\varphi_t(y_0 + \Delta y_0) - \varphi_t(y_0) - S(t, y_0)\,\Delta y_0\| \leqslant \|\Delta y_0\|\,\varepsilon(\|\Delta y_0\|) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \coloneqq \beta(Mx)M\frac{e^{Lt} - 1}{L}.$$

Il reste à montrer la continuité. Soient $(t, y_0) \in \Omega_0$ et D un voisinage compact de y_0 tel que $[0, 1] \times D \subset \Omega_0$. On définit

$$\mathscr{L} \coloneqq \sup_{\substack{s \in [0,1] \\ y \in D}} \|f'(\varphi_s(y_0))\|.$$

Pour tout $\tilde{y}_0 \in D$, on a

$$\dot{S}(s,\tilde{y}_0) - \dot{S}(s,y_0) = f'(\varphi_s(\tilde{y}_0))(S(s,\tilde{y}_0) - S(s,y_0)) + \Delta(s) \quad \text{avec} \quad \Delta(s) = (f'(\varphi_s(y_0)) - f'(\varphi_s(\tilde{y}_0)))S(s,y_0).$$

Donc si $\sup_{s\in[0,t]} \|\Delta(s)\| \leqslant \delta$, alors

$$\sup_{s\in[0,t]} \left\|\dot{S}(s,\tilde{y}_0) - \dot{S}(s,y_0)\right\| \leqslant \delta \frac{e^{\mathscr{L} t} - 1}{\mathscr{L}}.$$

Par composition de fonctions continues, la fonction S est continue. ☐

Théorème 5.5. Si f est de classe $\mathscr{C}^k$, alors la fonction $(t,y) \longmapsto \varphi_t(y)$ est également de classe $\mathscr{C}^k$ sur Ω_0.

5.3 Propriétés géométriques du flot

5.3.1 Conservation du volume

Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et de divergence nulle, *i. e.* telle que $\operatorname{div}(f) \coloneqq \operatorname{tr}(\partial f/\partial y) = 0$. Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. On introduit son volume

$$\operatorname{Vol}(A) \coloneqq \int_A \mathrm{d}y.$$

Théorème 5.6. Pour le système différentielle $\dot{y} = f(y)$, pour toute partie mesurable A, on a

$$\operatorname{Vol}(\varphi_t(A)) = \operatorname{Vol}(A).$$

Preuve En notant $\Psi_t \coloneqq \partial\varphi_t/\partial y$, cette fonction est solution de l'équation variationnelle

$$\dot{\Psi}_t(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0))\Psi_t(y_0) \quad \text{et} \quad \Psi_0(y_0) = I_d.$$

Pour $M, H \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ avec $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, on rappel que

$$d\det(M)(H) = \det(M)\operatorname{tr}(M^{-1}H).$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\det \Psi_t(y_0)] &= d\det\Psi_t(y_0)\frac{\mathrm{d}\Psi_t}{\mathrm{d}t}(y_0)\\ &= (\det \Psi_t(y_0)\operatorname{tr}(\Psi_t^{-1}(y_0)\dot{\Psi}_t(y_0))\\ &= (\det \Psi_t(y_0)\operatorname{tr}\Big(\Psi_t^{-1}(y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y_0))\Psi_t(y_0)\Big) = 0.\end{aligned}$$

D'après la formule du changement de variable, on a

$$\operatorname{Vol}(\varphi_t(A)) = \int_{\varphi_t(A)} \mathrm{d}y = \int_A \left|\det \frac{\partial\varphi_t}{\partial y_0}\right| \mathrm{d}y = \operatorname{Vol}(A).$$

☐

5.3.2 Conservation de l'énergie

On suppose que le système est hamiltonien, *i. e.* il s'écrit

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y) \quad \text{avec} \quad J \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Son flot préserve le volume puisque, en notant $f \coloneqq J^{-1}\nabla H$, on a

$$\operatorname{div} f = \operatorname{tr}(J^{-1}\nabla^2 H) = \operatorname{tr}(-\nabla^2 H J^{-1}) = -\operatorname{tr}(J^{-1}\nabla^2 H) = -\operatorname{div} f.$$

Théorème 5.7. Soit φ_t le flot associé au système précédent. Alors pour tout $(t,y) \in \Omega_0$, on a $H(\varphi_t(y_0)) = H(y_0)$.

Preuve On a

$$\frac{\mathrm{d}H(\varphi_t(y_0))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_t(y_0))\frac{\mathrm{d}\varphi_t(y_0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_t(y_0))J^{-1}\nabla H(\varphi_t(y_0)) = {}^{\mathrm{t}}(\nabla H(\varphi_t(y_0)))J^{-1}(\nabla H(\varphi_t(y_0))) = 0$$

et $H(\varphi_0(y_0)) = H(y_0)$. ☐

5.3.3 Symplecticité et flot hamiltonien

(i) Quelques propriétés géométriques

On considère le problème hamiltonien
$$\dot{y} = J^{-1}\nabla H.$$
Si on écrit $y = (p, q)$, alors on peut réécrire ce système comme
$$\dot{p} = -\nabla_q H(p, q) \quad \text{et} \quad \dot{q} = \nabla_p H(p, q).$$
On considère le parallélogramme P de $\mathbb{R}^{2d}$ engendré par les vecteurs $\xi := (\xi^p, \xi^q)$ et $\eta := (\eta^p, \eta^q)$. Le parallélogramme P s'écrit alors
$$P = \{t\xi + s\eta \mid s, t \in [0, 1]\}.$$
Si $d = 1$, l'aire orienté de P est
$$\mathrm{Aire.\,Orient\acute{e}e}(P) := \begin{vmatrix} \xi^p & \eta^p \\ \xi^q & \eta^q \end{vmatrix} = \xi^p\eta^q - \xi^q\eta^p.$$
En dimension $d > 1$, on remplace cette expression par les sommes $\omega(\xi, \eta)$ des aires orientées des projections sur les plans (p_i, q_i) de P, *i. e.*
$$\omega(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{d} \begin{vmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{vmatrix}$$
ce qui peut se réécrire comme
$$\omega(\xi, \eta) = {}^{\mathrm{t}}\xi J\eta.$$

(ii) Transformations symplectiques

DÉFINITION 5.8. Une application linéaire $A\colon \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ est dite symplectique si ${}^{\mathrm{t}}AJA = J$, *i. e.* si
$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^{2d}, \quad \omega(A\xi, A\eta) = \omega(\xi, \eta).$$

DÉFINITION 5.9. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$. Une application $g\colon U \to \mathbb{R}^{2d}$ est dite si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa jacobienne est symplectique.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$ et M une variété dimensionnelle (surface) de U telle qu'il existe une carte globale $M = \psi(K)$ où K est un compact de $\mathbb{R}^2$ et ψ est un difféomorphisme de K dans M. La somme des aires orientées des projections sur les plans (p_i, q_i) de tous ces parallélogramme est donnée par
$$\Omega(M) = \iint_K \omega\Big(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

THÉORÈME 5.10. Soit $g\colon U \to \mathbb{R}^{2d}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Si g est symplectique, alors $\Omega(g(M)) = \Omega(M)$.

Preuve La surface $g(M)$ est paramétrée par la fonction $g \circ \psi$ définie sur K, donc
$$\begin{aligned}
\Omega(g(M)) &= \iint_K \omega\Big(\frac{\partial g\circ\psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial g\circ\psi}{\partial t}(s,t)\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \iint_K \omega\Big(g'(\psi(s,t))\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t), g'(\psi(s,t))\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \iint_K {}^{\mathrm{t}}\Big(g'(\psi(s,t))\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)\Big) J g'(\psi(s,t))\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \iint_K {}^{\mathrm{t}}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)\Big)\, {}^{\mathrm{t}}(g'(\psi(s,t))) J g'(\psi(s,t))\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \iint_K {}^{\mathrm{t}}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)\Big) J \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \iint_K \omega\Big(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\Big)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \Omega(M).
\end{aligned}$$
□

(iii) Symplecticité d'un flot d'un système hamiltonien

On considère une fonction $f(y) = J^{-1}\nabla H(y)$ où $H\colon \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Théorème 5.11 *(Poincaré).* Soit $H\colon U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors pour tout $(t,y) \in \Omega_0$, l'application φ_t est une transformation symplectique.

Preuve La matrice $\Psi_t \coloneqq \partial f/\partial y \circ \varphi_t$ satisfait l'équation variationnelle

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_t(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y))\Psi_t(y) = J^{-1}\nabla^2 H(\varphi_t(y))\Psi_t(y), \\ \Psi_0(y) = I_d. \end{cases}$$

On veut montrer que φ_t est symplectique, *i. e.* que ${}^{\mathrm{t}}(\Psi_t(y))J\Psi_t(y) = J$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^{\mathrm{t}}(\Psi_t(y))J\Psi_t(y)) &= {}^{\mathrm{t}}\dot{\Psi}_t(y)J\Psi_t(y) + {}^{\mathrm{t}}\Psi_t(y)J\dot{\Psi}_t(y) \\ &= {}^{\mathrm{t}}\Psi_t(y)\nabla^2 H(\varphi_t(y))J^{-1}J\Psi_t(y) + {}^{\mathrm{t}}\Psi_t(y)JJ^{-1}\nabla^2 H(\varphi_t(y))\Psi_t(y) = 0. \end{aligned}$$

De plus, on a ${}^{\mathrm{t}}(\Psi_0(y))J\Psi_0(y) = J$ ce qui conclut. □

Théorème 5.12. Soit $f\colon \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $t > 0$ et un ouvert étoilé U de $\mathbb{R}^{2d}$ tels que $[0,t] \times U \subset \Omega_0$ et, pour tout $s \in [0,t]$, l'application φ_s est symplectique. Alors le système $\dot{y} = f(y)$ est un système hamiltonien.

Preuve L'équation variationnelle s'écrit ici

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_t(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi_t(y))\Psi_t(y), \\ \Psi_0(y) = I_{2d}. \end{cases}$$

Pour tout $s \in [0,t]$, l'application φ_s est symplectique, donc

$$\forall y \in U, \quad {}^{\mathrm{t}}(\Psi_s(y))J\Psi_s(y) = J.$$

Soient $y \in U$ et $s \in [0,t]$. En dérivant par rapport à s, on a

$$\begin{aligned} 0 &= {}^{\mathrm{t}}(\dot{\Psi}_s(y))J\Psi_s(y) + {}^{\mathrm{t}}(\Psi_s(y))J\dot{\Psi}_s(y) \\ &= {}^{\mathrm{t}}(\Psi_s(y))\,{}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y))\right)J\Psi_s(y) + {}^{\mathrm{t}}(\Psi_s(y))J\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi.s(y))\Psi_y(y) \\ &= {}^{\mathrm{t}}(\Psi_s(y))\left[{}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y))\right)J + J\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y))\right]\Psi_y(y) \end{aligned}$$

En particulier, pour $s = 0$, on a

$${}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y))\right)J + J\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s(y)) = 0,$$

i. e. la matrice $J\frac{\partial f}{\partial y}(y)$ est symétrique. En utilisant le lemme suivant, il existe une fonction H sur U de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$Jf(y) = \nabla_y H(y)$$

ce qui conclut. □

Lemme 5.13 *(d'intégrabilité).* Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f'(y)$ soit symétrique pour tout $y \in U$. Alors pour tout $y_0 \in U$, il existe un voisinage $\mathscr{V}(y_0)$ dans U et $V\colon \mathscr{V}(y_0) \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in \mathscr{V}(y_0), \quad f(y) = \nabla V(y).$$

Preuve Soit B_0 une boule de centre y_0 contenant U. On considère la fonction

$$V\colon \left| \begin{array}{l} B_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ y \longmapsto \displaystyle\int_0^1 {}^{\mathrm{t}}(y-y_0)f(y_0+t(y-y_0))\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y_j}(y) &= \int_0^1 \left[f_j(y_0+t(y-y_0)) + {}^{\mathrm{t}}(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0+t(y-y_0))\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 [f_j(y_0+t(y-y_0)) + t(y-y_0)\nabla f_j(y_0+t(y-y_0))]\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(f_j(y_0 + t(y - y_0)))]\,\mathrm{d}t = f_j(y)$$

ce qui termine la preuve. □

◇ REMARQUE. Dans le cas général, ce théorème est faux. Un contre-exemple est donné par le système

$$\begin{cases} \dot{p} = \dfrac{p}{p^2+q^2}, \\ \dot{p} = \dfrac{q}{p^2+q^2} \end{cases}$$

défini sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ qui n'est pas étoilé.

5.4 Flot et dérivées de Lie

5.4.1 Représentation exponentielle du flot

DÉFINITION 5.14. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On appelle *opérateur dérivée de* LIE l'opérateur L_f définie par

$$\mathrm{L}_f : \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \\ g & \longmapsto & \dfrac{\partial g}{\partial y} f \end{array} \right. .$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors on peut itérer $\mathrm{L}\,f$ de telle sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{L}_f^{k+1}[g] = \mathrm{L}_f[\mathrm{L}_f^k[g]]$$

▷ EXEMPLE. On a

$$\mathrm{L}_f^2[g] = \mathrm{L}_f[g'f] = (g'f)'f = g''(f,f) + g'f'f.$$

On considère deux équations différentielles $y' = f_1(y)$ et $y' = f_2(y)$. On note φ_t^1 et φ_s^2 les flots de ces équations. Alors

$$\varphi_t^2 \cdot \varphi_s^2(y) = \exp(s\,\mathrm{L}_{f_1}) \circ \exp(t\,\mathrm{L}_{f_2})[\mathrm{Id}](y).$$