Équations aux dérivées partielles

Florian Méhats

Master 1 de mathématiques fondamentales · Université de Rennes 1
Notes prises par Téofil Adamski (version du 22 mars 2021)

1 Introduction aux modèles fondamentaux 1

2 Équations linéaires hyperboliques 4
2.1 La méthode des caractéristiques 5
2.2 Solutions classiques des équations hyperboliques 8
2.3 Forme conservative 9
2.4 Solutions faibles 10

3 Équations elliptiques hyperboliques 14
3.1 Introduction et présentation du problème . . 14
3.2 Problèmes aux limites en dimension une . . 17

Chapitre 1

Introduction aux modèles fondamentaux

Une équation aux dérivées partielles (abrégée dans la suite ÉDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui fait intervenir ses différentes dérivées partielles. Les équations différentielles ordinaires (ÉDO) sont alors un cas dégénérée d'ÉDP : la fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable. Un exemple d'ÉDP est l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

vérifiée par une fonction $u\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$. L'ordre d'une ÉDP esst l'ordre maximale de dérivation apparaissant. Par exemple, l'équation (1) est d'ordre 1 ; l'équation de la chaleur unidimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est d'ordre 2.

On a de bonnes raisons de les étudier. Tout d'abord, elles généralisent les ÉDO. Mais surtout, elle interviennent dans la modélisation de la plupart des phénomènes physique (comme la diffusion de la Covid-19) qui ne possèdent pas de caractère aléatoire (on parle d'équation différentielle stochastique dans le cas contraire). Il existe trois grandes catégories d'ÉDP.

1. Les équations elliptiques modélisent des phénomènes stationnaires, *i. e.* ne dépendant pas du temps t. Le prototype de ce genre d'ÉDP est l'équation de Laplace

$$-\Delta u = f \tag{2}$$

d'inconnue $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ où l'ensemble $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert et la fonction $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est donnée. Rappelons que le laplacien d'une fonction $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ est la fonction

$$\Delta u \coloneqq \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

2. Les équations paraboliques modélisent elles des phénomènes instationnaires et diffusifs. L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{3}$$

en est un exemple : l'inconnue est une fonction $u\colon \Omega \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ pour un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ et où le laplacien est spatial (on devrait le noter $\Delta_x u$). Avec cette équation, on se donne également une donnée initiale $u(\cdot, 0)$ connue : on parle alors d'un problème de Cauchy.

3. Enfin, les équations hyperboliques modélisent des phénomènes instationnaires de type « ondes » ou transport (comme le mouvement d'une fumée). On peut trouver deux prototypes importants :
   (a) l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

   d'inconnue $u\colon \Omega \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ avec une donnée initiale $u(\cdot, 0)$ où les fonctions $a_i\colon \Omega \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ sont données pour un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$;
   (b) l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \tag{4}$$

   d'inconnue $u\colon \Omega \times \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ avec une donnée initiale $u(\cdot, 0)$ également.

Ceux trois termes qui qualifient les ÉDP ne sont pas anodins. Pour expliquer ces choix, on va parler de coniques. Simplifions notre cadre et plaçons nous dans les cas particuliers des ÉDP à coefficients constants sur $\mathbf{R}^2$ et d'ordre 2. Soient $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ et $f\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. On considère l'équation

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \tag{5}$$

d'inconnue $u\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Cherchons les solutions de la forme $u(x,y) = e^{rx+sy}$ où $r, s \in \mathbf{R}^2$. En injectant une telle fonction dans l'équation précédente, on obtient l'équation d'un conique

$$ar^2 + brs + cs^2 + dr + es + f = 0.$$

Cette dernière est l'équation d'une ellipse, d'une parabole ou d'une hyperbole selon la valeur du discriminant $b^2 - 4ac$. On qualifiera alors l'équation (5)

– d'elliptique si $b^2 - 4ac < 0$;
– de parabolique si $b^2 - 4ac = 0$;
– d'hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$.

En fonction des valeurs a, b et c, on peut retrouver les équations (2), (3) et (4). Cette classification est très utile et possède plusieurs forces.

1. Si l'on effectue un changement de variables $(x,y) \longmapsto (X,Y)$, *i. e.* une application bijective de classe $\mathscr{C}^2$ dont le jacobien ne s'annule pas, alors la fonction $u(X,Y) \coloneqq u(x,y)$ satisfait une équation du même type que celle dont satisfait une fonction u.
2. Les équations d'une même classe ont des propriétés qualitatives similaires et s'étudient à l'aide d'outils communs.

Cependant, cette explication ne fonctionne que pour les ÉDP d'ordre 2 et sur $\mathbf{R}^2$. De plus, dans les situations réalistes, les modèles font souvent appel à plusieurs de ces catégories en même temps comme en peut le voir dans l'exemple suivant.

En mécanique des fluides, le système de Navier-Stokes permet de modéliser l'écoulement d'un fluide. Ce dernier possède deux inconnues :

– la densité du fluide $\rho(x,t)$
– et la vitesse du fluide $u(x,t)$.

En dimension une, ce système s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(P \circ \rho)}{\partial x} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \end{cases} \tag{6}$$

où l'on suppose connus une fonction de pression $\rho \longmapsto P(\rho)$, un second membre f et un paramètre de viscosité $\nu \geqslant 0$. Ici, cela décrit un « gaz visqueux ». Distinguons trois cas.

1. Plaçons nous dans le cas stationnaire. Alors la fonction $\lambda \coloneqq \rho u$ est constante et on obtient l'équation elliptique

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(P \circ \lambda/u)}{\partial x} = f.$$

2. Maintenant, si on suppose $\partial\rho/\partial x = 0$, alors on obtient l'équation parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f}{\rho}.$$

3. Enfin, on suppose $\nu = 0$ et on étudie des petites perturbations autour d'un état constant. On écrit alors $\rho = \rho_0 + \rho'$ où ρ' est petit et ρ_0 est une constante et $u = u'$ où u' est petit. En supprimant les termes négligeables, on obtient informellement le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial u'}{\partial t} = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial u'}{\partial t} + P'(\rho_0)\dfrac{\partial \rho'}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

En dérivant respectivement les équations par rapport au temps et à l'espace, on trouve le système linéaire d'ordre 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0, \\ \rho_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + P'(\rho_0)\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

on dit qu'on a linéarisé le système (6) dans ce cas particulier. En soustrayant, on obtient l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - P'(\rho_0)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$$

où l'on va supposer $P'(\rho_0) > 0$.

Selon les cas, les équations obtenues sont de types différents.

Chapitre 2
Équations linéaires hyperboliques

2.1 La méthode des caractéristiques 5
2.1.1 En dimension une 5
2.1.2 En dimension supérieure 5
2.2 Solutions classiques des équations hyperboliques 8
2.3 Forme conservative 9
2.4 Solutions faibles 10

Dans ce chapitre, on étudie de façon exhaustive les ÉDP d'ordre 1, linéaires et scalaires. Un exemple d'une telle équation est celle de transport. Soient $T > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On va se donner

– un champ de vecteurs $a\colon \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}^n$ dont on note $a_i\colon \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}$ ses composantes ;
– un coefficient de réaction $a_0\colon \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}$;
– un second membre $f\colon \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}$;
– une donnée initiale $u_0\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

On cherche une solution $u\colon \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}$ à l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} u + a_0 u = f & \text{sur } \mathbf{R}^n \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Notation. Pour une fonction différentiable $u\colon \mathbf{R}^n \times [0,T]$, on notera

– les dérivées partielles sous les formes $\partial_t u$ et $\partial_{x_i} u$;
– le gradient spatial $\nabla_x u \coloneqq (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$.

L'équation de réécrit alors

$$\partial_t u + (\nabla \cdot a) u + a_0 u = f$$

où la notation $\cdot$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

◇ Remarque. Quel est le lien avec les modèles hyperboliques plus généraux ? Pour simplifier, considérons un système d'ordre 1 à coefficient constant en dimension $n = 1$: il s'agit d'une équation de la forme

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

d'inconnue $U\colon \mathbf{R} \times [0,T] \to \mathbf{R}^p$ pour une matrice réelle A de taille $p \times p$. On fait alors l'hypothèse d'hyperbolicité fondamentale : la matrice A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Dans ce cas, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ tels que

$$P^{-1} A P = D \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

En posant $V \coloneqq P^{-1} U$ pour une solution U, la fonction V vérifie l'équation

$$\partial_t V + D \partial_x V = 0.$$

Chaque composante $v_i\colon \mathbf{R} \times [0,T] \to \mathbf{R}$ vérifie alors l'équation scalaire

$$\partial_t v_i + \lambda_i \partial_x v_i = 0, \quad i \in [\![1,p]\!].$$

On est alors ramené à l'équation de transport scalaire. Ces techniques se généralisent aux cas à coefficients non constants, mais cela dépasse le cadre de ce cours.

Quand est-il des équations hyperboliques linéaires d'ordre 2 ? Par exemple, l'équation des ondes

$$\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = 0 \quad \text{sur } \mathbf{R} \times [0,T]$$

se ramène, lorsque la solution u est supposée de classe $\mathscr{C}^2$, au système linéaire d'ordre 1

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0$$

avec

$$U \coloneqq \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ de valeurs propres $\pm c$. On se ramène alors au système

$$\begin{cases} \partial_t V_1 - c\partial_x V_1 = 0, \\ \partial_t V_2 + c\partial_x V_2 = 0. \end{cases}$$

2.1 La méthode des caractéristiques

2.1.1 En dimension une

Pour commencer, on suppose $a_0 = f = 0$, $n = 1$ et $a \in \mathbf{R}$. On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + a\partial_x u = 0 & \text{sur } \mathbf{R} \times [0, T], \\ \quad u(x, 0) = u_0(x), & \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Soit $u \colon \mathbf{R} \times [0, T] \to \mathbf{R}$ une solution. On effectue le changement de variables $s = t$ et $y = x - at$. Alors la fonction $v \colon (y, s) \in \mathbf{R} \times [0, T] \longmapsto u(y + as, s)$ vérifie la relation

$$\partial_s v(y, s) = (\partial_t + a\partial_x u))(y + as, s) = 0, \quad (y, s) \in \mathbf{R} \times [0, T].$$

La solution u est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si la fonction v est une solution de l'équation $\partial_s v = 0$. De plus, on a $v(y, 0) = u_0(y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. On en déduit

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times [0, T].$$

2.1.2 En dimension supérieure

Généralisons ce résultat à la dimension supérieure. Prenons un entier $n \geqslant 1$ et un champ de vecteurs $a \coloneqq (a_1, \dots, a_n) \colon \mathbf{R} \times [0, T] \to \mathbf{R}^n$. On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} u = 0 & \text{sur } \mathbf{R}^n \times [0, T], \\ \qquad u(x, 0) = u_0(x), & \quad x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

On suppose que le champ de vitesse a est de classe $\mathscr{C}^1$ et globalement lipschitzien, *i. e.* il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \forall t \in [0, 1], \quad |a(y, t) - a(x, t)| \leqslant L\,|y - x|$$

où la notation $|\ |$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

DÉFINITION-PROPOSITION 2.1 *(équation caractéristique).* Soient $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \in [0, T]$. Le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = a(X, s), \quad s \in [0, T], \\ X(t) = x. \end{cases} \tag{3}$$

d'inconnue $X \colon [0, T] \to \mathbf{R}^n$ est appelé l'*équation caractéristique* de paramètre (x, t) associée au problème (2). Le théorème 2.2 assure qu'il admet une unique solution, notée $s \longmapsto X(s\,; x, t)$.

Quel est l'intérêt de cette définition ? Cela va nous permettre de résoudre très facilement l'équation (2) en résolvant simplement l'équation caractéristique 3 qui est plus simple à résoudre.

Supposons avoir une solution $u \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n \times [0, T], \mathbf{R})$ de l'équation (2) sous la main et supposons connue l'unique solution $X \in \mathscr{C}^1([0, T] \times \mathbf{R}^n \times [0, T], \mathbf{R})$ de l'équation (3). Soit $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, T]$. Pour $s \in [0, T]$, on pose

$$v(s) \coloneqq u(X(s\,; x, t), s).$$

Pour tout $s \in [0, T]$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \partial_s v(s) &= \Big(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u \partial_s X_i + \partial_t u\Big)(X(s\,; x, t), s) \\ &= \Big(\partial_t u + \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} u\Big)(X(s\,; x, t), s) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction v ne dépend pas de la variable s. En particulier, on a $v(t) = v(0)$, c'est-à-dire

$$u(X(t\,;x,t),t) = u(X(0\,;x,t),0), \quad i.\ e. \quad u(x,t) = u_0(X(0\,;x,t)).$$

Réciproquement, on montrera, dans la suite, que la fonction $(x,t) \longmapsto u_0(X(0\,;x,t))$ est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ du problème (2).

▷ EXEMPLES. On se place en dimension $n = 1$.

– On suppose que la fonction a est constante. L'équation s'écrit

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0.$$

Les équations caractéristiques admettent des solutions de la forme

$$X(s\,;x,t) = x + a(s-t), \quad s,t \in [0,T],\ x \in \mathbf{R}.$$

Avec le paragraphe précédente, on retrouve la solution $(x,t) \longmapsto u_0(x - at)$.

– On considère maintenant l'équation

$$\partial_t u + 2t\partial_x u = 0.$$

Les solutions des équations caractéristiques sont de la forme

$$X(s\,;x,t) = x + s^2 - t^2, \quad s,t \in [0,T],\ x \in \mathbf{R}.$$

– Avec l'équation

$$\partial_t u + x\partial_x u = 0,$$

on obtient

$$X(s\,;x,t) = xe^{s-t}, \quad s,t \in [0,T],\ x \in \mathbf{R}.$$

Rappels sur les ÉDO

THÉORÈME 2.2 *(Cauchy-Lipschitz).* On suppose que la fonction $a \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n \times [0,T], \mathbf{R})$ est globalement lipschitzienne. Alors pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,T]$, l'équation (3) admet une unique solution de classe $\mathscr{C}^1$.

Étudions la dépendance par rapport aux paramètres. En fait, la fonction

$$X\colon [0,T] \times \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}^n$$

est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, on a la propriété de groupe suivante.

PROPOSITION 2.3 *(propriété de groupe).* Pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$ et $x \in \mathbf{R}^n$, on a

$$X(t_3\,;X(t_2\,;x,t_1),t_2) = X(t_3\,;x,t_1).$$

Par ailleurs, pour tous $s,t \in [0,T]$, l'application $x \in \mathbf{R}^n \longmapsto X(s\,;x,t) \in \mathbf{R}^n$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Le fait qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^1$ a été énoncé précédemment et son inversibilité résulte de la propriété de groupe. Il reste à montre que son inverse est lui-aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

THÉORÈME 2.4. Sous les hypothèses du théorème, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$, l'application

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n, \\ \quad x \longmapsto X(s\,;x,t)\end{array}\right.$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Sa jacobienne $\mathscr{J} \coloneqq \partial_x X(s,x,t)$ est solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{J}}{\mathrm{d}s} = \partial_x a\,\mathscr{J}, \\ \mathscr{J}(t\,;x,t) = I_n. \end{cases}$$

De plus, le jacobien $J \coloneqq \det \mathscr{J}$ vérifie le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}s} = (\operatorname{div}_x a)J, \\ J(t) = x. \end{cases}$$

Preuve L'application $X(s\,;\cdot,t)$ est bien une bijection de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même : cela découle de l'unicité donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, son inverse est l'application $X(t\,;\cdot,s)$. D'après la remarque précédente, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et il en va de même pour son inverse.

Obtenons l'équation sur sa jacobienne $\mathscr{J}$. Mieux écrit, il faut montrer que

$$\frac{\mathrm{d}(\partial_x X)}{\mathrm{d}s}(s\,;x,t) = \partial_x a(X(s\,;x,t),s)\partial_x X(s,x,t).$$

Notons $X_j \colon [0,T] \times \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}$ les composantes de X. Pour tous indices $i,j \in [\![1,n]\!]$, le théorème de Schwarz donne

$$\begin{aligned} \partial_s(\partial_{x_j} X_i)(s\,;x,t) &= \partial_{x_j}(\partial_s X_i)(s\,;x,t) \\ &= \partial_{x_j}[a_i(X(s\,;x,t),s)] \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} a_i(X(s\,;x,t),s)\partial_{x_j} X_k(s\,;x,t), \qquad s \in [0,T]. \end{aligned}$$

ce qui se réécrit en l'équation

$$\frac{\mathrm{d}(\partial_x X)}{\mathrm{d}s} = \partial_x a \partial_x X.$$

Par ailleurs, au temps initial $s = t$, l'application $x \longmapsto X(t\,;x,t)$ est l'identité sur $\mathbf{R}^n$ d'après l'équation caractéristique, donc sa jacobienne vaut l'identité et son déterminant vaut 1.

Concernant le jacobien J, on prend le déterminant de l'équation précédente. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}(\det \partial_x X)}{\mathrm{d}s} \\ &= \sum_{i=1}^n \det\Big(\nabla X_1, \dots, \frac{\mathrm{d}(\nabla X_i)}{\mathrm{d}s}, \dots, \nabla X_n\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} a_i(X,s) \det(\nabla X_1, \dots, \nabla X_{i-1}, \nabla X_k, \nabla X_{i+1}, \dots, \nabla X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} a_i(X,s) \det(\nabla X_1, \dots, \nabla X_n) \\ &= (\operatorname{div} a)J \end{aligned}$$

où, pour le passage de la troisième à la quatrième ligne, le caractère alterné du déterminant est utilisé. Ceci conclut. ☐

Corollaire 2.5 *(résolution de l'équation).* Sous les hypothèses du théorème et si la fonction u_0 est de classe $\mathscr{C}^1$, l'équation (2) admet une unique solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^n \times [0,T]$ et elle s'écrit

$$u(x,t) = u_0(X(0\,;x,t)), \quad x \in \mathbf{R}^n,\ t \in [0,T].$$

Preuve L'unicité a déjà été vue. Vérifions alors que la fonction

$$u \colon \left| \begin{aligned} \mathbf{R}^n \times [0,T] &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ (x,t) &\longmapsto u_0(X(0\,;x,t)) \end{aligned} \right.$$

est bien une solution. Comme les application $X(0\,;\cdot,\cdot)$ et u_0 sont de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction u est aussi de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, elle vérifie bien $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. Enfin, vérifions l'équation. Pour tous $(x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,T]$, le propriété de groupe donne

$$u(X(t\,;x,0),t) = u_0(X(0\,;X(t\,;x,0),t)) = u_0(x)$$

et, en dérivant par rapport à la variable t, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(X(t\,;x,0),t)] = 0$$

ce qui se réécrit

$$\partial_t u(X(t\,;x,0),t) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u(x,t) \frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t}(t\,;x,0) = 0,$$

i. e.

$$\Big(\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i} u\Big)(X(t\,;x,0),t) = 0.$$

Finalement, la fonction u satisfait l'équation au point de la forme $(X(t\,;x,0),t)$. Mais lorsque x parcourt $\mathbf{R}^n$, ces points parcourt $\mathbf{R}^n$ d'après la propriété de $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Elle satisfait donc l'équation en tout point de $\mathbf{R}^n \times [0,T]$. $\square$

2.2 Solutions classiques des équations hyperboliques

Revenons à l'équation hyperbolique générale (1) qui possède un terme de réaction et un terme source. On va encore utiliser la méthode des caractéristiques. Cependant, une solution u ne sera plus constante le long des caractéristique à cause des termes a_0 et f.

Définition-proposition 2.6. On pose $a \coloneqq (a_1,\dots,a_n)\colon \mathbf{R}^n \times [0,T] \times \mathbf{R}^n$ où le terme a_0 n'apparaît pas. Soient $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \in [0,T]$. Le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = a(X,s), \quad s \in [0,T], \\ X(t) = x. \end{cases} \tag{4}$$

d'inconnue $X\colon [0,T] \to \mathbf{R}^n$ est appelé l'*équation caractéristique* de paramètre (x,t) associée au problème (1). Le théorème 2.2 assure qu'il admet une unique solution, notée $s \longmapsto X(s\,;x,t)$. L'ensemble

$$\{(X(s\,;x,t),s) \mid s \in [0,T]\}$$

est la *courbe caractéristique* associée à l'équation (1).

Théorème 2.7. On suppose que la fonction a est de classe $\mathscr{C}^1$ et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. De plus, on suppose que les fonctions u_0, f et a_0 sont de classe $\mathscr{C}^1$. Alors le problème de Cauchy (1) admet une unique solution $u \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n \times [0,T])$ donnée par

$$\begin{aligned} u(x,t) = u_0(X(0\,;x,t)) \exp\Big(-\int_0^t a_0(X(\sigma\,;x,t),\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\Big) + \\ \int_0^t f(X(\sigma\,;x,t),\sigma) \exp\Big(-\int_\sigma^t a_0(X(\tau\,;x,t),\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}\sigma, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,T]. \end{aligned} \tag{5}$$

Preuve On va procéder comme dans la section précédente.

• *Analyse.* Soit $u \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n \times [0,T])$ une solution du problème (1). Fixons un paramètre quelconque $(x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,T]$ et on introduit la fonction ne dépend que de la variable s définie par

$$v(s) \coloneqq u(X(s\,;x,t),s), \quad s \in [0,T].$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(s) &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}(s\,;x,t) \cdot \nabla_x u(X(s\,;x,t),s) + \partial_t u(X(s\,;x,t),s) \\ &= a(X(s\,;x,t),s) \cdot \nabla_x u(X(s\,;x,t),s) + \partial_t u(X(s\,;x,t),s) \\ &= (\partial_t + a \cdot \nabla_x u)(X(s\,;x,t),s) \\ &= (f - a_0 u)(X(s\,;x,t),s) \\ &= f(X(s\,;x,t),s) - a_0(X(s\,;x,t),s)v(s). \end{aligned}$$

Posons $b_0(s) \coloneqq a_0(X(s\,;x,t),s)$ et $g(s) \coloneqq f(X(s\,;x,t),s)$ pour $s \in [0,T]$. Avec ces notations, la fonction v vérifie l'équation différentielle linéaire

$$v' + b_0 v = g$$

dont la solution est donnée par la méthode de la variation de la constante : on obtient

$$v(s) = v(0)\exp\left(-\int_0^t b_0(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) + \int_0^s g(s)\exp\left(-\int_\sigma^s b_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma, \quad s \in [0,T]. \qquad (*)$$

Remarquons que $v(t) = u(x,t)$ et $v(0) = u_0(X(0\,;x,t))$ grâce aux équations (4) et (1). En prenant l'équation $(*)$ à l'instant $s = t$, on obtient bien la bonne expression d'une solution u qui est ainsi unique si elle existe.

• *Synthèse.* Montrons que cette expression définit une solution de classe $\mathscr{C}^1$ de l'équation (1). Le caractère $\mathscr{C}^1$ est évident par composition. En refaisant l'analyse à l'envers, comme dans la section précédente, on montre que c'est bien une solution. Enfin, elle satisfait bien la condition initiale $u(\cdot,0) = u_0(\cdot)$. Ceci termine la preuve. □

▷ Exemples. On considère l'équation

$$\partial_t u + a\partial_x u + a_0 u = 0$$

d'inconnue $u\colon \mathbf{R}\times[0,T] \to \mathbf{R}$ pour deux constantes $a > 0$ et $a_0 \in \mathbf{R}$. Alors les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent

$$X(s\,;x,t) = x + a(s-t).$$

Alors la solution u s'écrit

$$u(x,t) = u_0(x-at)e^{-a_0 t}.$$

L'effet du terme de réaction a_0 se traduit soit par une atténuation si $a_0 > 0$, soit par une amplification si $a_0 < 0$.

2.3 Forme conservative

On a vu que les solutions de l'équation (2) sont constantes le long des caractéristiques. En revanche, la masse totale $M(t) \coloneqq \int_{\mathbf{R}^n} u(x,t)\,\mathrm{d}x$ n'est pas conservée. Avec les mains, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathbf{R}^n} \partial_t u(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\partial_{x_i} u(x,t)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^n}\Big(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} a_i(x,t)\Big)u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} (\operatorname{div} a)(x,t)u(x,t)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

où l'on a intégré par parties en faisant les bonnes hypothèses. *A priori*, la masse totale n'est pas conservée dès que $\operatorname{div} a \neq 0$.

Définition 2.8. On dit qu'une équation hyperbolique linéaire est sous *forme conservative* si elle s'écrit

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(a_i u) = 0. \qquad (6)$$

Rappelons que le jacobien J du changement de variables $x \longmapsto X(s\,;x,t)$ vérifie le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}s} = (\operatorname{div} a)J, \\ J(t) = 1. \end{cases}$$

En intégrant la première équation, on obtient

$$J(s) = \exp\left(\int_t^s (\operatorname{div} a)(X(\sigma\,;x,t),\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right), \quad s \in [0,s].$$

THÉORÈME 2.9. Sous les mêmes hypothèses, l'équation (6) admet une unique solution. Si u_0 est de masse finie sur $\mathbf{R}^n$, alors M est constante.

RÉSUMÉ. Pour l'équation $\partial_t u + a \cdot \nabla_x u = 0$, la solution est constante le long des caractéristiques, mais sa masse $t \longmapsto M(t)$ n'est pas conservée. Inversement, pour l'équation $\partial_t u + \operatorname{div}(au) = 0$, la solution n'est pas constante le long des caractéristiques, mais sa masse est conservée.

Preuve Par le théorème 2.7, la solution s'écrit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(X(0\,;x,t)) \exp\biggl(-\int_0^t (\operatorname{div} a)(X(\sigma\,;x,t),\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\biggr) \\ &= u_0(X(0\,;x,t))J(0). \end{aligned}$$

puisqu'ici on a l'équation (1) avec $a_0 = \operatorname{div} a$ et $f = 0$. Ainsi pour tout $t \in [0,T]$, le changement de variables $y = X(0\,;x,t)$ de jacobien $J(0) > 0$ donne

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{\mathbf{R}^n} u_0(X(0\,;x,t))J(0)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} u_0(y)\,\mathrm{d}y = M(0). \end{aligned}$$

qui ne dépend pas du temps t ce qui conclut lorsque u_0 est de masse fini. □

COROLLAIRE 2.10. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$. Pour $t \in [0,T]$, on note $\Omega(t) \subset \mathbf{R}^n$ l'image de l'ouvert Ω par l'application $x \longmapsto X(0\,;x,t)$. La solution u de l'équation (6) satisfait

$$\int_{\Omega(t)} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} u_0(x)\,\mathrm{d}x, \quad t \in [0,T].$$

2.4 Solutions faibles

Revenons à l'équation générale (1). Dans le cas simple où $a_0 = 0$ et $f_0 = 0$, la solution s'écrit sous la forme $u(x,t) = u_0(X(0\,;x,t))$. Si la condition initiale u_0 est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la solution est « classique ». Cependant, si cette condition n'est pas satisfaite, alors cette expression à tout de même un sens. On va pouvoir définir une notion de solution généralisée, dite « faible ».

Pourquoi faire cela ? Cela permet de prendre une fonction u_0 moins régulière, comme constante par morceaux. Cela a aussi un autre intérêt. Quand on va regarder des problèmes hyperboliques non linéaires, comme l'équation de Burgers

$$\partial_t + u\partial_x u = 0,$$

il pourra arriver des phénomènes de perte de régularité au sens où, si la condition initiale u_0 est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la solution ne sera pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$.

DÉFINITION 2.11. Soient $N \in \mathbf{N}^*$ et O un ouvert de $\mathbf{R}^N$. On note $\mathscr{D}(O)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^N$ dont le support est compact et contenu dans O. Les éléments de cet ensemble sont appelés les *fonctions tests.*

On pourrait ensuite introduire la notion de distributions, un outil puissant de l'analyse, qui sont les « formes linéaires continues » sur l'espace $\mathscr{D}(O)$. Cependant, on va se contenter de la notion de dérivées faibles.

DÉFINITION 2.12. Soient $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(O)$ une fonction localement intégrable sur O et $i \in [\![1,N]\!]$. La *dérivée faible* de f par rapport à sa i-ième composante est la forme linéaire $\partial_{x_i} f$ sur $\mathscr{D}(O)$ définie par la relation

$$\langle \partial_{x_i} f, \varphi \rangle = -\int_O f(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{O}).$$

Cet objet-là est bien définie car les fonctions $\varphi \in \mathscr{D}(O)$ sont à support compact et la fonction f est localement intégrable, conduisant à ce que l'intégrale considérée existe bien. On étend cette notation par un multi-entier $\alpha \in \mathbf{N}^N$ et on obtient la forme linéaire $\partial^\alpha f$ définie par la relation

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_O f(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{O}).$$

Ici, on utilisera l'espace $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n \times [0,T[)$ et, comme $\mathbf{R}^n \times [0,T[$ n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, les fonctions tests ne seront pas nulles au temps $t=0$.

Toute la théorie repose sur l'intégration par parties. Soit $u \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n \times [0,T])$ une solution de l'équation (1). On prend l'équation, on la multiplie par une fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n \times [0,T[)$ et on obtient l'expression

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T \partial_t u(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T (a \cdot \nabla u)(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x + \\ \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T a_0(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T f(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x.$$

Tout d'abord, une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T \partial_t u(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = - \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u \partial_t(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^n} [u(x,t)\varphi(x,t)]_{t=0}^{t=T} \, \mathrm{d}x$$

avec

$$\int_{\mathbf{R}^n} [u(x,t)\varphi(x,t)]_{t=0}^{t=T} \, \mathrm{d}x = - \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x) \varphi(x,0) \, \mathrm{d}x.$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T (a \cdot \nabla u)(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T a_i(x,t) \partial_{x_i} u(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u \partial_{x_i}(a_i \varphi) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &= - \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u(x,t) \operatorname{div}(a\varphi)(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Finalement, en réinjectant dans l'équation, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u(x,t) [\partial_t \varphi(x,t) + \operatorname{div}(a\varphi)(x,t) - a_0(x,t)\varphi(x,t)] \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x + \\ \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x) \varphi(x,0) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T f(x,t) \varphi(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = 0. \quad (7)$$

Définition 2.13. On suppose que la fonction a est de classe $\mathscr{C}^1$ et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace et que

$$u_0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n), \quad a_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n \times [0,T]) \quad \text{et} \quad f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \times [0,T]).$$

Une *solution faible* de l'équation (1) est une fonction $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \times [0,T])$ vérifiant la relation (7) pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n \times [0,T])$.

Le calcul précédent montre le prochain lemme.

Lemme 2.14. Sous les hypothèses

$$u \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n), \quad f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n \times [0,T]) \quad \text{et} \quad a_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^n \times [0,T]),$$

la solution classique de l'équation (1) en est une solution faible.

L'objectif va être de trouver des solutions faibles lorsque les hypothèses de régularité ne seront pas suffisante pour trouver une solution classique. On va également montrer qu'on n'a pas introduit trop de solutions, cela va conduire à un résultat d'unicité.

THÉORÈME 2.15. Sous les hypothèses de la définition 2.13, l'équation (1) admet une unique solution faible $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n \times [0,T])$. Cette solution est donnée par la même formule (5) qu'avant.

Remarquons qu'on n'a pas changé les hypothèses sur le champ de vecteurs a. En particulier, les caractéristiques sont toujours définies de la même façon.

Preuve Pour gagner du temps, on se place dans un cas particulier qui se généralise bien : on suppose que l'équation (1) est sous forme conservative, *i. e.* avec $f = 0$ et $a_0 = \operatorname{div} a$.

- *Existence.* On considère la fonction $u\colon \mathbf{R}^n \times [0,T] \to \mathbf{R}$ définie par la relation (5), *i. e.*

$$u(x,t) = u_0(X(0\,;x,t)) \exp\left(- \int_0^t \operatorname{div} a(X(\sigma\,;x,t),\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right), \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,T].$$

Calculons l'intégrale

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u(\partial_t \varphi + \operatorname{div}(a\varphi) - a_0\varphi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u_0(X(0\,;x,t)) \exp\left(- \int_0^t \operatorname{div} a(X(\sigma\,;x,t),\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right) (\partial_t \varphi + \operatorname{div}(a\varphi) - a_0\varphi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pour cela, revenons sur le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $x \longmapsto X(s\,;x,t)$. Son jacobienn vérifie l'équation

$$J(s\,;x,t) = \exp\left(\int_t^s \operatorname{div} a(X(\sigma\,;x,t),\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right), \quad s,t \in [0,T],\ x \in \mathbf{R}^n.$$

L'intégrale I peut alors se réécrire

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u_0(X(0\,;x,t))(\partial_t \varphi + \operatorname{div}(a\varphi) - a_0\varphi)(x,t) \times J(0\,;x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u_0(y)(\partial_t \varphi + \operatorname{div}(a\varphi) - a_0\varphi)(X(t\,;y,0),t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variable $y = X(0\,;x,t)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(a\varphi) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(a_i\varphi) \\ &= (\operatorname{div} a)\varphi + \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i}\varphi \end{aligned}$$

de telle sorte que l'on obtient

$$I = \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u_0(y)(\partial_t \varphi + a \cdot \nabla\varphi)(X(t\,;y,0),t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y.$$

Comme $\mathrm{d}X/\mathrm{d}s = a(X,s)$, on

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(X(t\,;y,0),t)] = \partial_t\varphi(X(t\,;y,0),t) + \sum_{i=1}^n a(X(t\,;y,0),t)\partial_{x_i}\varphi(x,t).$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x) \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(X(t\,;y,0),t)]\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)\varphi(X(T\,;y,0),T)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)\varphi(X(0\,;y,0),0)\,\mathrm{d}y \\ &= - \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)\varphi(X(0\,;y,0),0)\,\mathrm{d}y = - \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait prouver puisque $f = 0$.

• *Unicité.* On va passer par le problème dual. Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles. Alors la fonction $u \coloneqq u_1 - u_2$ vérifie

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T u(\partial_t \varphi + \operatorname{div}(a\varphi) - a_0\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrons que cette dernière est nulle presque partout. Ce résultat nous est donné par le lemme fondamental des distributions :

toute fonction $v \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^n \times [0,T])$ *vérifiant*

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n \times]0,T[), \qquad \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^T v\psi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 0$$

est nulle presque partout.

Pour appliquer ce lemme et obtenir l'unicité recherchée, il suffit de montrer que, lorsque φ parcourt les fonctions tests, la fonction $\partial_t\varphi + \operatorname{div}(a\varphi) - a_0\varphi$ les parcourt aussi. Soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n \times [0,T])$. On veut montrer qu'il existe une fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n \times [0,T[)$ telle que

$$\begin{cases} \psi = \partial_t\varphi + \operatorname{div}(a\varphi) - a_0\varphi & \text{presque partout,} \\ \varphi(x,T) = 0, & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Mais cette question a déjà été résolue grâce à la méthode des caractéristiques : il suffit de poser la fonction

$$\varphi(x,t) \coloneqq \int_T^s \psi(X(\sigma\,; x,t),\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,T[.$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut voir que cela suffira pour le lemme. Il reste à montrer que la fonction φ est à support compact dans $\mathbf{R}^n \times [0,T[$ et c'est évident puisqu'on a imposé $\varphi(x,T) = 0$. D'où l'unicité. $\square$

Chapitre 3
Équations elliptiques hyperboliques

3.1 Introduction et présentation du problème . . . 14
3.1.1 Quelques modèles fondamentaux 14
3.1.2 Présentation de la méthode de résolution . 15
3.1.3 Vers la formulation variationnelle 16
3.2 Problèmes aux limites en dimension une 17
3.2.1 Le cadre fonctionnelle : espaces de Sobolev 17
3.2.2 Résolution de l'équation elliptique en dimension une 23
3.2.3 Autres problèmes aux limites 25

Pour étudier les équations hyperbolique, on s'est placé dans le produit $\mathbf{R}^n \times [0, +\infty[$. Maintenant, dans le cas elliptique, on va être dans une domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ suffisamment régulier.

3.1 Introduction et présentation du problème

3.1.1 Quelques modèles fondamentaux

(i) Équation de Laplace

L'équation de Laplace est l'exemple canonique que l'on va compléter ici par des conditions aux limites (ou de bord). Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domaine ouvert, borné et « régulier ». Soit $f \in \Omega \colon \mathbf{R}$ une fonction donnée. L'équation de Laplace est

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega \tag{1}$$

d'inconnue $u \colon \Omega \to \mathbf{R}$. Cette équation n'admet pas une unique solution : on peut, par exemple, considérer le cas $f = 0$ et regarder les solutions polynomiales de degré inférieur à un. Pour palier à ce problème, on va spécifier une ou plusieurs équations supplémentaires, posées sur la frontière $\partial\Omega$: les conditions aux limites. Il en existe plusieurs :

– la condition de Dirichlet consiste à imposer la valeur de l'inconnue u sur $\partial\Omega$:

- la condition de Dirichlet homogène impose $u = 0$ sur $\partial\Omega$;
- la condition de Dirichlet inhomogène impose $u = u_0$ sur $\partial\Omega$ ou la fonction u_0 est connue.

On verra que ces conditions, sous réserve que les données f et u_0 soient dans de bons espaces, mènent à des problèmes bien posés (existence, unicité, ...). Cette condition est « scalaire ».
– la condition de Neumann porte sur les dérivées, mais on ne peut pas imposer la valeur des dérivées premières sur $\partial\Omega$ comme, par exemple, imposer toutes les dérivées partielles $\partial_{x_i} u$. Ce serait une condition « vectorielle ». On va plutôt imposer des conditions sur certaines combinaisons linéaires et une combinaison linéaire naturelle est imposée par la condition sur le flux de la solution u à travers $\partial\Omega$. Cette dernière s'énonce ainsi. Pour $x \in \partial\Omega$, on note $n(x) \in \mathbf{R}^n$ le vecteur normal à $\partial\Omega$ au point x. La dérivée normale de la fonction u sur $\partial\Omega$ est la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \Delta u \cdot n = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u n_i$$

et c'est cette dernière qu'on va imposer. Ainsi

- la condition de Neumann homogène impose $\partial u / \partial n = 0$ sur $\partial\Omega$;
- la condition de Neumann inhomogène impose $\partial u / \partial n = g$ sur $\partial\Omega$ où la fonction g est connue.

– la condition de Dirichlet-Neumann est un mélange des deux précédentes. On sépare la frontière en deux sous-ensembles Γ_0 et Γ_1 de sorte que $\partial\Omega = \Gamma_{\mathrm{D}} \sqcup \Gamma_{\mathrm{N}}$. On impose une condition de Dirichlet sur Γ_{D} et une condition de Neumann sur Γ_{N}.

Du point de vue de la modélisation, on rencontre l'équation de Laplace dans des problèmes physiques. Cette équation peut modéliser un phénomène thermique. Dans ce cas, la température est la solution u et la donnée f désigne un terme de source de chaleur. De plus, on impose ici une condition de Dirichlet-Neumann : la condition sur Γ_D modélise la présence d'un thermostat à température fixée et la condition sur Γ_{N} décrit les échanges de chaleurs (la version homogène signifie que le flux de chaleur à travers Γ_N est nul, *i. e.* il n'y a pas d'échange de chaleur.)

Cette équation permet également de décrire la position d'équilibre d'une membrane élastique (comme la peau d'un tambour), la vitesse d'un fluide ou le potentiel électrostatique.

(ii) Modèle général elliptique d'ordre 2

On remplace maintenant, dans l'équation (1), le laplacien par un certain opérateur aux dérivées partielles $\mathscr{L}$ d'ordre 2 de la forme

$$\mathscr{L}\, u = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)$$

où les fonctions $a_{i,j}$ sont données sur Ω. On pose $A(x) \coloneqq (a_{i,j}(x))_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ pour $x \in \Omega$. Alors l'opérateur s'écrit plus simplement sous la forme

$$\mathscr{L}\, u = -\operatorname{div}(A\nabla u).$$

Définition 3.1. L'opérateur $\mathscr{L}$ est *elliptique* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (\xi_1,\dots,\xi_n)\in \mathbf{R}^n,\ x\in\Omega.$$

Cela signifie que la matrice A est définie positive et même uniformément coercive. On retrouve l'équation de Laplace en prenant $A = I_n$. Avec la définition précédente, cette équation est bien elliptique. Mais plus généralement, on va étudier l'équation

$$\mathscr{L}\, u = f \quad \text{sur } \Omega \tag{2}$$

combinée avec une condition aux limites.

(iii) Systèmes elliptiques

On considère le système de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{sur } \Omega,\\ \operatorname{div} u = 0 & \text{sur } \Omega,\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

d'inconnues $u\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ et $p\colon \Omega \to \mathbf{R}$. Remarquons qu'en prenant la divergence de la première équation, on obtient formellement

$$-\Delta p = -\operatorname{div} f \quad \text{sur } \Omega.$$

Un autre système elliptique est le système d'élasticité linéaire qui décrit la position d'équilibre d'un solide élastique homogène et isotrope sous l'hypothèse de petites déformations. Ce système s'écrit

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{i,j}(u)) = f_i \quad \text{sur } \Omega \tag{4}$$

où la matrice $\Sigma \coloneqq (\sigma_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ désigne le tenseur des contraintes élastiques. Cette dernière est donnée par la relation

$$\sigma_{i,j}(u) = \lambda\delta_{i,j} + 2\mu\varepsilon_{i,j}(u) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{i,j} \coloneqq \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{u_j}{x_i}\Big)$$

pour des constantes $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On peut montrer que ce système est elliptique.

3.1.2 Présentation de la méthode de résolution

Plaçons-nous en dimension une. Soit $f :]0,1[\to \mathbf{R}$ une fonction. On considère le problème avec des conditions de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur } [0,1],\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

À cause des conditions aux limités imposées, ce problème n'est pas de Cauchy et le théorème de Cauchy-Lipschitz ne peut s'appliquer : le problème n'admet pas toujours de solutions. On peut néanmoins appliquer une méthodologie dite « méthode de tir » : on va paramétriser le système en le problème

$$\begin{cases} -u_\alpha'' = f & \text{sur }]0,1[, \\ u_\alpha(0) = 0, \\ u_\alpha'(0) = \alpha \end{cases} \tag{6}$$

puis ajuster le paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$ de manière à avoir $u(1) = 0$. Le système (6) est bien posé. Cette stratégie fonctionne grâce à des bonnes propriétés de monotonie : la fonction $\alpha \longmapsto u_\alpha(1)$ est strictement croissante et le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de conclure à l'existence d'une unique solution $u \in \mathscr{C}^2([0,1])$ au problème (5) dès que la fonction f est continue sur $[0,1]$.

Cette méthode de tir nous donne même une méthode numérique : on utilise la méthode d'Euler pour résoudre le problème (6) et on applique un procédé dichotomique pour ajuster le paramètre α.

On peut intégrer deux fois l'équation (5) et utiliser habilement les conditions aux limites pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 3.2. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Le problème (5) admet une unique solution $u \in \mathscr{C}^2([0,1])$ donnée par la formule

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y$$

où la fonction $G\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ est définie par la relation

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x, \\ x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

3.1.3 Vers la formulation variationnelle

Les méthodes vues ci-dessus ne sont pas facilement transposables aux dimensions supérieures basées sur des résolutions d'équation différentielles ou sur le méthode utilisant des fonctions de Green. En revanche, la méthode qui se généralise bien aux dimension $n \geqslant 2$ est la formulation variationnelle. Cette dernière va passer par des formulations faibles.

Revenons au problème (5) et montrons directement que la solution, si elle existe, est unique par ce qu'on appelle la « méthode d'énergie ». Soient u_1 et u_2 deux solutions au problème. Alors la fonction $u \coloneqq u_1 - u_2$ satisfait le problème

$$\begin{cases} -u'' = 0 & \text{sur } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Multiplions cette dernière équation par une fonction test $v\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, disons de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $v(0) = v(1) = 0$. On obtient

$$-\int_0^1 u''v = 0.$$

Une intégration par parties donne alors

$$\int_0^1 u'v' = 0.$$

En prenant $v = u$, on conclut que $u' = 0$ puis $u = u(0) = 0$. Ceci nous remontre l'unicité. Si on refait le même calcul avec le problème original (5), on obtient

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv, \qquad v \in \mathscr{C}^1([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0.$$

Définition 3.3. Une *formulation variationnelle* est la donnée d'un espace de Hilbert H, d'une forme bilinéaire continue a sur H et d'une forme linéaire continue ℓ sur H. La méthode consiste à cherche un vecteur $u \in H$ tels que

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v).$$

Ici, on aurait grandement envie de prendre

$$H := \{u \in \mathscr{C}^2([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

et de considérer les applications définies par les formules

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v' \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_0^1 fv.$$

Cependant, l'espace $\mathscr{C}^2([0,1])$ n'est pas de Hilbert, la norme naturelle pour laquelle cet espace est complet est la norme

$$\|u\|_{\mathscr{C}^2} = \|u\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|u'\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|u''\|_{\mathrm{L}^\infty}$$

qui n'est pas issue d'un produit scalaire.

Pour traiter le problème elliptique et palier à ce problème, on va donc dégrader la régularité et se placer dans des espaces de Hilbert comme, par exemple, l'espace $\mathrm{L}^2(]0,1[)$. Mais il apparu un autre problème avec cet espace : la forme bilinéaire naturelle est définie par la formule

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'$$

et elle n'est pas continue par rapport à la norme L^2 car cette dernière ne contrôle par les dérivées. Il faut donc trouver un bon espace de Hilbert dont la norme contrôle les dérivées : c'est là qu'intervient l'*espace de Sobolev*. Il sera donc nécessaire de comprendre cet espace. Cet espace est l'espace des fonctions L^2 dont les dérivées faibles sont des fonctions L^2.

3.2 Problèmes aux limites en dimension une

Soient $p \in \mathscr{C}^1([a,b])$ et $q, f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ trois fonctions vérifiant telles que

$$p(x) \geqslant \alpha > 0 \quad \text{et} \quad q(x) \geqslant 0, \quad x \in [a,b].$$

On cherche une solution $u \in \mathscr{C}^2([a,b])$ au problème

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur } [a,b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Notre stratégie générale va être la suivante : on va définir une notion de solutions faibles et écrire une formulation variationnelle associée, montrer l'existence et l'unicité de la solution faible grâce au théorème de Lax-Milgram, puis montrer que la solution faible est de classe $\mathscr{C}^2$ et que c'est une solution classique du problème (8).

3.2.1 Le cadre fonctionnelle : espaces de Sobolev

(i) Rappels sur les espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$. On va utiliser de nombreuses propres des espaces de Lebesgue $\mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty]$ qui sont des espaces de Banach.

THÉORÈME 3.4 *(de représentation de Riesz).* Soient $p \in]1, +\infty[$ et ϕ une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Soit $p' \in]1, +\infty[$ le conjugué de p. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega), \quad \langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf.$$

De plus, on a $\|u\|_p = \|\phi\|$.

Le cas que l'on utilisera le plus souvent sera le cas particulier de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et la fonction u' sera aussi une fonction L^2. On retrouve le théorème de Riesz dans des espaces de Hilbert.

THÉORÈME 3.5 *(de densité).* L'espace $\mathscr{D}(\Omega) := \mathscr{C}_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$.

(ii) L'espace de Sobolev

On va utiliser la notion de dérivée faible. Rappelons que, pour une fonction $u \in L^1_{loc}(]a, b[)$, sa dérivée faible est la forme linéaire $u' \colon \mathscr{D}(]a, b[) \to \mathbf{R}$ définie par la relation

$$\langle u', \varphi \rangle := -\int_a^b u\varphi'.$$

Remarquons que, si $u \in L^2(]a, b[)$, alors $u \in L^1(]a, b[)$ puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne $\|u\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|u\|_2$ et, en particulier, on a $u \in L^1_{loc}(]a, b[)$.

DÉFINITION 3.6. On écrira $u' \in L^2(]a, b[)$ s'il existe une fonction $g \in L^2(]a, b[)$ telle que

$$\langle u', \varphi \rangle = \int_a^b g\varphi, \quad \varphi \in \mathscr{D}(]a, b[).$$

L'*espace de Sobolev* de dimension une est l'ensemble

$$H^1(a, b) := \{u \in L^2(]a, b[) \mid u' \in L^2(]a, b[)\}.$$

PROPOSITION 3.7. On a

$$u' \in L^2(]a, b[) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C > 0,\ \forall \varphi \in \mathscr{D}(]a, b[), \quad \left|\int_a^b u'\varphi\right| \leqslant C\|\varphi\|_2.$$

Preuve Le sens direct découle de la définition précédente. Réciproquement, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(]a, b[), \quad \left|\int_a^b u'\varphi\right| \leqslant C\|\varphi\|_2.$$

Commençons par prolonger la forme linéaire continue

$$T \colon \left| \begin{aligned} \mathscr{D}(]a, b[) &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ \varphi &\longmapsto -\int_a^b g\varphi \end{aligned} \right.$$

en une forme linéaire continue $\tilde{T} \colon L^2(]a, b[) \to \mathbf{R}$. Il n'y a qu'une unique façon d'après le théorème de prolongement des applications linéaires uniformément continue. Ensuite, on utilise le théorème de représentation de Riesz qui nous assure la conclusion. □

DÉFINITION-PROPOSITION 3.8. Pour deux fonctions $u, v \in H^1(a, b)$, on pose

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_a^b uv + \int_a^b u'v'.$$

L'application $\langle\ ,\ \rangle_{H^1}$ est un produit scalaire sur $H^1(a, b)$.

THÉORÈME 3.9. 1. L'espace $H^1(a, b)$ muni du produit scalaire est un espace de Hilbert séparable.
2. Pour toute fonction $u \in H^1(a, b)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ telle que

$$\varphi_n|_{]a,b[} \longrightarrow u \quad \text{dans } H^1(a, b).$$

3. Il existe une injection continue $H^1(a, b) \longrightarrow \mathscr{C}^0([a, b])$ où l'on munit l'espace $\mathscr{C}^0([a, b])$ de la norme infinie, c'est-à-dire toute fonction $u \in H^1(a, b)$ possède un représentant continu $\overline{u}$ dans sa classe L^2.

Preuve 1. Montrons qu'il est complet. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $H^1(a, b)$ pour la norme associée au produit scalaire. Il est facile de voir que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(]a, b[)$. Ce dernier espace étant complet, ces suites convergent dans $L^2(]a, b[)$

respectivement vers deux éléments $f, g \in \mathrm{L}^2(]a,b[)$. Montrons que $u' = g$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$. C'est clair puisque, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\int_a^b u_n \varphi' = -\int_a^b u_n' \varphi \longrightarrow \int_a^b u\varphi' = -\int_a^b g\varphi.$$

Ainsi on a montré que la fonction u est un élément de $\mathrm{H}^1(a,b)$. On peut alors conclure que

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{\mathrm{H}^1}^2 &= \|u - u_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|u' - u_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\ &= \|u - u_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|g - u_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

D'où la complétude.

Montrons maintenant qu'il est séparable. Pour cela, on utilise un théorème d'analyse fonctionnelle qui dit que le produit cartésien de deux espaces séparables reste séparable. De plus, on sait déjà que l'espace $\mathrm{L}^2(]a,b[)$ est séparable. Ensuite, on identifie l'espace $\mathrm{H}^1(a,b)$ à l'espace $\mathrm{L}^2(]a,b[)^2$ par l'isométrie

$$T\colon \left| \begin{aligned} \mathrm{H}^1(a,b) &\longrightarrow \mathrm{L}^2(]a,b[) \times \mathrm{L}^2(]a,b[), \\ u &\longmapsto (u,u'). \end{aligned} \right.$$

Avec les précédentes remarques, l'espace $\mathrm{H}^1(a,b)$ est donc séparable.

2. On cherche à montrer la densité de $\mathscr{D}([a,b])$ dans $\mathrm{H}^1(a,b)$. Ce résultat sera établit dans la suite.
3. Soit $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$. Pour $x \in \,]a,b[$, on pose

$$f(x) \coloneqq \int_a^x u'.$$

Montrons qu'à une constante près, on a $f = u$ presque partout. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$. Alors le théorème de Fubini nous assure

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \int_a^x u'(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \int_t^b u'(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^b u'(t) \left(\int_t^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \langle u', \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve $f' = u'$ au sens faible ce qui montre ce qu'on voulait grâce au lemme suivant : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u - f = \lambda$. Comme $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ puisqu'il est 1/2-höldérienne par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a ainsi défini une injection $i\colon \mathrm{H}^1(a,b) \to \mathscr{C}^0([a,b])$ comme souhaitée.

Il reste à montrer qu'elle est continue. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|f\|_\infty \leqslant (b-a)^{1/2} \|u\|_{\mathrm{H}^1}. \tag{$*$}$$

Comme $i(u) = f + \lambda$, il reste à majorer le réel λ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a encore

$$\begin{aligned} (b-a)\,|\lambda| &= \left| \lambda \int_a^b 1\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \sqrt{b-a}\|u\|_{\mathrm{L}^2} + (b-a)\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

On peut donc trouver une constante $C > 0$ indépendante de la fonction u telle que $|\lambda| \leqslant C\|u\|_{\mathrm{H}^1}$. Avec la relation $(*)$, cela montre la continuité de l'injection i. □

LEMME 3.10. Soit $v \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]a,b[)$ une fonction de dérivée faible nulle. Alors elle est constante.

Preuve Soit $\theta \in \mathscr{D}(]a,b[)$ une fonction test quelconque. La fonction $\psi\colon x \in]a,b[\longmapsto \int_a^x \theta$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Comme θ est à support compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\theta = 0$ sur $[a, a+\varepsilon]$. Alors $\psi = 0$ sur $[a, a+\varepsilon]$. Quitte à choisir le réel ε plus petit, on peut supposer que $\theta = 0$ sur $[b-\varepsilon, b]$. Sur cet intervalle $[b-\varepsilon, b]$, la fonction ψ est constante puisque

$$\psi(x) = \int_a^x \theta = \int_a^b \theta, \quad x \in [b-\varepsilon, b].$$

Soit $\chi \in \mathscr{D}(]a,b[)$ une fonction test de masse $\lambda \geqslant 0$. On va corriger le fait que la fonction ψ n'est pas à support compact en posant

$$\tilde{\psi}(x) = \int_a^x \left(\theta(t) - \chi(t)\int_a^b \theta\right) \mathrm{d}t, \quad x \in]a,b[.$$

Cette fois-ci, la fonction $\tilde{\psi}\colon]a,b[\to \mathbf{R}$ appartient à la classe $\mathscr{D}(]a,b[)$ et vérifie

$$\tilde{\psi}' = \theta - \chi\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha := \int_a^b \theta.$$

Par notre hypothèse, on peut écrire

$$0 = \int_a^b v\tilde{\psi}' - \alpha\lambda \quad \text{avec} \quad \lambda := \int_a^b v\chi.$$

On a donc montré que

$$\int_a^b v\theta = \int_a^b \lambda\theta$$

et ceci pour toute fonction $\theta \in \mathscr{D}(]a,b[)$. On en déduit que $v = \lambda$ presque partout. □

◇ REMARQUE. On peut étendre la définition de l'espace $\mathrm{H}^1(a,b)$ lorsque $a = -\infty$ et $b = +\infty$. C'est encore un espace de Hilbert.

LEMME 3.11 *(de prolongement).* Il existe un opérateur $P\colon \mathrm{H}^1(a,b) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{R})$ tel que
- pour tout $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$, la fonction Pu est à support compact ;
- pour tout $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$, on a $Pu|_{]a,b[} = u$ et $(Pu)'|_{]a,b[} = u'$;
- il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Pu\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R})} \leqslant C\|u\|_{\mathrm{L}^2(]a,b[)} \quad \text{et} \quad \|Pu\|_{\mathrm{H}^2(\mathbf{R})} \leqslant C\|u\|_{\mathrm{H}^1(a,b)}, \quad u \in \mathrm{H}^1(a,b).$$

Preuve Prolonger une fonction de $\mathrm{L}^2(]a,b[)$ sur $\mathbf{R}$ se fait sans effort : il suffit de la prolonger par la fonction nulle. C'est plus compliqué pour une fonction de $\mathrm{H}^1(a,b)$: il faut faire attention à ce qu'il advient de la dérivée. Pour cela, on va exploiter la symétrie.

• *Première étape.* On suppose $a = 0$ et $b = +\infty$. Soit $u \in \mathrm{H}^1(0,+\infty)$. Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on définit

$$Pu(x) := u(|x|).$$

On obtient une fonction $Pu \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ qui vérifie

$$\|Pu\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R})} = 2\|u\|_{\mathrm{L}^2([0,+\infty[)}.$$

On définit également la fonction v définie presque partout par la relation

$$v(x) := \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > 0, \\ -u'(-x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On souhaite montrer $(Pu)' = v$. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$u(x) - u(0) = \int_0^x u'.$$

Si $x > 0$, on a

$$Pu(x) - Pu(0) = \int_0^x v$$

et, si $x < 0$, on a

$$\begin{aligned} Pu(x) - Pu(0) &= u(-x) - u(0) \\ &= \int_0^{-x} u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{x} u'(-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x v. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient toujours

$$Pu(x) = Pu(0) + \int_0^x v.$$

On en déduit $(Pu)' = v$ et, de plus, on trouve

$$\|(Pu)'\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R})} = 2\|u'\|_{\mathrm{L}^2([0,+\infty[)}.$$

• *Seconde étape.* Revenons au cas général, c'est-à-dire à un intervalle borné $]a, b[$. Quitte à faire des translations et homothéties, on suppose $a = 0$ et $b = 1$. Soit $\eta \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ une fonction telle que

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad \eta|_{[-\infty,1/4[} = 1 \qquad \text{et} \qquad \eta|_{[3/4,+\infty[} = 0.$$

Soit $u \in \mathrm{H}^1(0, 1)$. On la prolonge en une fonction $\tilde{u}$ sur $]1, +\infty[$ par zéro. Considérons alors la fonction $\eta\tilde{u} \in \mathrm{H}^1(0, +\infty)$ qui satisfait

$$(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'.$$

Avec la première étape, on peut la prolonger en une fonction $P(\eta\tilde{u}) \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R})$. De même, de l'autre côté, on construite une fonction $\hat{u}$ qui prolonge notre fonction u à $]-\infty, 1]$ et on prolonge cette dernière en une fonction $\hat{P}((1 - \eta)\hat{u}) \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R})$. Il suffit alors de poser la fonction

$$Pu \coloneqq P(\eta\tilde{u}) + \hat{P}((1 - \eta)\hat{u}) \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R})$$

qui satisfait bien les bonnes conditions d'après ce qui précède. □

Preuve du théorème de densité On utilise une fonction régularisante. Soit $\rho \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ une fonction positive, paire, de masse 1 et de support inclus dans $]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$\rho_n \colon x \in \mathbf{R} \longmapsto n\rho(nx)$$

dont le support est inclus dans l'intervalle $]-1/n, 1/n[$. Soit $u \in \mathrm{H}^1(a, b)$. On considère son prolongement $Pu \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R})$ que l'on régularise en les fonction

$$u_n \coloneqq \rho_n * Pu \in \mathscr{D}(\mathbf{R}).$$

On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathrm{L}^2(^{\mathbf{R}})$ vers la fonction Pu. Que se passe-t-il pour sa dérivée ? Avec le théorème de Fubini, on peut montrer que $\langle u_n', \varphi\rangle = \langle (Pu)', \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. De plus, on trouve de même que $u_n' = \rho_n * (Pu)'$. En particulier, la suite $(u_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $(Pu)'$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers Pu dans $\mathrm{H}^1(\mathbf{R})$. En restreignant, on obtient

$$u_n|_{]a,b[} \to Pu|_{]a,b[} \quad \text{et} \quad (u_n|_{]a,b[})' \to (Pu)'|_{]a,b[}$$

dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ ce qui termine notre preuve. En effet, on a bien la seconde convergence puisque, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}([a, b])$ prolongé par zéro, on a

$$\begin{aligned} \langle (u_n|_{]a,b[})', ^p \rangle &= -\int_a^b u_n|_{]a,b[}\varphi' \\ &= -\int_a^b u_n\varphi' \\ &= -\int_{\mathbf{R}} u_n\varphi' \\ &= \int_a^b u_n'\varphi' \qquad \text{car } \operatorname{supp}\varphi \in]a, b[. \end{aligned}$$

de sorte qu'on obtient $(u_n|_{]a,b[})' = u_n'|_{]a,b[}$. □

COROLLAIRE 3.12 *(formule de Green en dimension une).* Soient $u, v \in \mathrm{H}^1(a,b)$. Alors

$$\int_a^b u'v = -\int_a^b uv' + u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

où les quantités $u(a)$, $u(b)$, $v(a)$ et $v(b)$ sont les valeurs des uniques représentants continus de u et v.

Preuve On procède également par régularisation et on utilise la densité. □

COROLLAIRE 3.13. Soient $G \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ et $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$. Alors $G(u) \in \mathrm{H}^1(a,b)$ et $G(u)' = G'(u)u'$.

Preuve Comme $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$, la fonction u est continue sur $[a,b]$ par le théorème, donc elle appartient à $\mathrm{L}^\infty(]a,b[)$. On pose alors $M := \|u\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Comme la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$, elle est continue sur le segment $[-M, M]$. Il existe donc une constant $C > 0$ telle que

$$\forall s \in [-M, M], \quad |G(s) - G(0)| \leqslant C\,|s|$$

ce qui, en utilisant l'inégalité triangulaire inversée, donne

$$|G(u| \leqslant |G(0)| + C\,|u|$$

aboutissant à la conclusion $G(u) \in \mathrm{L}^2(]a,b[)$. De même, comme $u' \in \mathrm{L}^2(]a,b[)$ et $G'(u) \in \mathrm{L}^\infty(]a,b[)$, on obtient $G'(u)u' \in \mathrm{L}^2(]a,b[)$. Il reste maintenant à montrer l'égalité $G(u)' = G'(u)u'$ et on procède par régularisation : cette formule est bien connue pour des fonctions continues. □

(iii) L'espace $\mathbf{H}_0^1(a,b)$

THÉORÈME 3.14. Soit $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$. Alors les deux points suivants sont équivalents :

(i) il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in N}$ de $\mathscr{D}(]a,b[)$ qui converge vers la fonction u dans $\mathrm{H}^1(a,b)$;

(ii) on a $u(a) = u(b) = 0$.

On note $\mathrm{H}_0^1(a,b) \subset \mathrm{H}^1(a,b)$ l'ensemble des fonctions u vérifiant ces deux points.

Preuve On suppose le point (i). Alors les fonctions φ_n s'annulent aux points a et b. Or comme on a une injection $\mathrm{H}^1(a,b) \longrightarrow \mathscr{C}^0([a,b])$, les deux applications $u \longmapsto u(a)$ et $u \longmapsto u(b)$ sont continues de $\mathrm{H}^1(a,b)$ dans $\mathbf{R}$. Ceci permet de conclure que $u(a) = u(b) = 0$.

Réciproquement, on suppose le point (ii). On va utiliser le corollaire 3.13. Soit $G \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ une fonction telle que

- pour tout $|t| \leqslant 1$, on a $G(t) = 0$;
- pour tout $|t| \geqslant 1$, on a $G(t) = t$;
- pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|G(t)| \leqslant |t|$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n := n^{-1}G(nu) \in \mathrm{H}^1(a,b)$ d'après le corollaire. En distinguant les cas, on montre que

$$\operatorname{supp} u_n \subset \{x \in]a,b[\mid u(x) \geqslant 1/n\}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Comme u est continue sur $[a,b]$ et vérifie $u(a) = u(b) = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un voisinage de a et un voisinage de b tels que, sur ceux-ci, on ait $|u| \leqslant 1/n$ et cela implique que la fonction u_n est nulle sur ces voisinages. Ainsi cette dernière possède un support compact inclus dans $]a,b[$. Par convergence dominé, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge alors vers la fonction u dans $\mathrm{H}^1(a,b)$.

Soit $\rho \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction positive, paire et de masse 1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $\rho_n := n\rho(n\cdot)$. On voudrait trouver une fonction $\rho_i * u_n$ qui soit à support compact. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\varphi(n) \in \mathbf{N}^*$ le plus petit entier supérieur ou égal à n tel que u_n soit nulle sur $[a, a + 2/\varphi(n)]$ et $[b - 2/\varphi(n), b]$. Alors la fonction $\rho_{\varphi(n)} * u_n$ sera nulle sur ces segments, donc elle appartient à $\mathscr{D}(]a,b[)$. Ensuite, on peut montrer les deux points suivants :

- on a $(\rho_{\varphi(n)} * u_n)' = \rho_{\varphi(n)} * u_n'$,
- la suite $((\rho_{\varphi(n)} * u_n)|_{]a,b[})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la fonction u dans $\mathrm{H}^1(a,b)$

qui nous assurent la conclusion. □

COROLLAIRE 3.15 *(inégalité de Poincaré).* Soit $u \in \mathrm{H}_0^1(a,b)$. Alors
$$\|u\|_{\mathrm{L}_2} \leqslant (b-a)\|u'\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Cette inégalité est clairement fausse sur l'espace $\mathrm{H}^1(a,b)$: il suffit de considérer la fonction constante égale à un sur le segment $[a,b]$ qui appartient bien à $\mathrm{H}^1(a,b)$.

Preuve Encore une fais, on raisonne par densité. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{D}(]a,b[)$ qui converge vers la fonction u dans $\mathrm{H}^1(a,b)$. Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [a,b]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure
$$\begin{aligned}|\varphi_n(x)| &\leqslant \left|\int_a^x \varphi_n'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sqrt{\int_a^x 1\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b \varphi_n'(t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{b-a}\|\varphi_n'\|_{\mathrm{L}^2}.\end{aligned}$$
En intégrant, on obtient
$$\int_a^b \varphi_n(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\|\varphi_n'\|_{\mathrm{L}^2}^2$$
et on fait tendre l'entier n vers l'infini. □

◇ REMARQUE. En fait, dans cette preuve, on n'avait pas besoin de régulariser car on sait déjà que toute fonction $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$ s'écrit sous la forme
$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in]a,b[.$$
L'avantage de cette preuve est qu'elle reste valable en dimension supérieure.

COROLLAIRE 3.16. L'ensemble $\mathrm{H}_0^1(a,b)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{H}^1(a,b)$ sur lequel la norme $u \longmapsto \|u\|_{\mathrm{H}_0^1} := \|u'\|_{\mathrm{L}}^2$ est équivalente à la norme H^1.

Preuve En utilisant le second point du théorème 3.14, on voit clairement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel fermé. Avec le corollaire précédent, l'application $\|\ \|_{\mathrm{H}_0^1}$ est séparante ce qui en fait une norme sur $\mathrm{H}_0^1(a,b)$. Maintenant, montrons qu'elle est équivalente à la norme H^1. Grâce au corollaire précédent, on trouve bien
$$\|\ \|_{\mathrm{H}_0^1} \leqslant \|\ \|_{\mathrm{H}^1} \quad \text{et} \quad \|\ \|_{\mathrm{H}^1} \leqslant \sqrt{1+(b-a)^2}\|\ \|_{\mathrm{H}_0^1}.$$ □

◇ REMARQUE. L'espace $\mathrm{H}_0^1(a,b)$ peut être muni de deux produit scalaires définies par les relations
$$\langle u,v\rangle_{\mathrm{H}^1} := \langle u,v\rangle_{\mathrm{L}^2} + \langle u',v'\rangle_{\mathrm{L}^2} \quad \text{et} \quad \langle u,v\rangle_{\mathrm{H}_0^1} := \langle u',v'\rangle_{\mathrm{L}^2}.$$
Ils en font chacun un espace de Hilbert.

(iv) Le théorème de Lax-Milgram

THÉORÈME 3.17 *(Lax-Milgram).* Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive sur H et ℓ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique élément $u \in H$ tel que
$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v).$$

Preuve On pourra regarder le cours d'analyse fonctionnelle. □

3.2.2 Résolution de l'équation elliptique en dimension une

On étudie le problème (8) (cf. page 17). Établissons la formulation variationnelle du problème. Soit $u \in \mathscr{C}^2([a,b])$ une solution. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$ une fonction test. En multipliant l'équation par la fonction φ puis en intégrant, on obtient
$$-\int_a^b (pu')'\varphi + \int_a^b qu\varphi = \int_a^b f\varphi.$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$-\int_a^b (pu')'\varphi = \int_a^b pu'\varphi' - [pu'\varphi]_a^b$$

où le terme entre crochets est nul. Ceci permet d'écrire

$$\int_a^b pu'\varphi' + \int_a^b qu\varphi = \int_a^b f\varphi.$$

Notons $a(u,\varphi)$ et $\ell(\varphi)$ respectivement les membres de gauche et de droite de cette dernière égalité. On souhaite alors utiliser le théorème de Lax-Milgram. L'espace naturel sera $H \coloneqq \mathrm{H}_0^1(a,b)$. La formulation variationnelle (FV) est alors la suivante :

on cherche une fonction $u \in H$ telle que

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v).$$

Deux éléments cruciaux vont permettre de résoudre l'équation :

– on a une solution u de classe $\mathscr{C}^2$ si et seulement si on a une solution $u \in H$ du problème (FV) ;
– le problème (FV) admet une unique solution

LEMME 3.18. Une fonction $u \in \mathscr{C}^2([a,b])$ vérifie l'équation (8) si et seulement si elle vérifie le problème (FV).

Preuve Soit $u \in \mathscr{C}^2([a,b])$ une solution classique. Comme la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on a $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$. De plus, comme $u(a) = u(b) = 0$ d'après l'équation, on a $u \in H$. Grâce à nos hypothèse $p \in \mathscr{C}^1([a,b])$ et $q \in \mathscr{C}^0([a,b])$, l'application a est bien définie sur $H \times H$. Elle est aussi clairement linéaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer qu'elle est continue. Par exemple, l'application ℓ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{H}^1(a,b)$. Enfin, on a montré

$$a(u,\varphi) = \ell(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(]a,b[).$$

Or on sait que l'espace $\mathscr{D}(]a,b[)$ est dense dans H. Comme les applications $a(u,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont continues, on peut donc écrire

$$a(u,v) = \ell(v), \quad v \in H.$$

La fonction u vérifie bien le problème (FV).

Réciproquement, soit $u \in H$ une solution du problème (FV). La fonction u est bien continue et vérifie $u(a) = u(b) = 0$. Montrons maintenant que l'équation (8) est satisfaite au sens des distributions, c'est-à-dire

$$\langle -(pu')' + qu, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(]a,b[).$$

Il suffit de montrer que la dérivée faible de $pu' \in \mathrm{L}^2(]a,b[) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]a,b[)$ est $f - qu$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(]a,b[)$. Comme $\varphi \in H$, on a $a(u,\varphi) = \ell(\varphi)$, c'est-à-dire

$$-\int_a^b pu'\varphi' = \int_a^b (qu - f)\varphi$$

ce qui montre l'égalité $(pu')' = qu - f$ au sens des distributions.

À la vue de nos hypothèse, on a $qu - f \in \mathrm{L}^2(]a,b[)$, donc $pu' \in \mathrm{H}^1(a,b)$, donc $pu' \in \mathscr{C}([a,b])$. Comme $p \in \mathscr{C}([a,b])$ et $p \geqslant \alpha > 0$, la fonction $1/p$ est continue sur $[a,b]$, donc la fonction u' est continue sur $[a,b]$. Ceci montre que la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

Maintenant, comme $(pu')' = qu - f \in \mathscr{C}([a,b])$, on a $pu' \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Comme $1/p \in \mathscr{C}^1([a,a])$, on obtient $u' \in \mathscr{C}^1([a,b])$. D'où $u \in \mathscr{C}^2([a,b])$. Finalement, tout ceci montre que la fonction u satisfait l'équation (8) au sens classique. □

LEMME 3.19. Le problème (FV) admet une unique solution.

Preuve On applique le théorème de Lax-Milgram à l'espace de Hilbert $H = \mathrm{H}_0^1(a,b)$ et aux applications continues a et ℓ qui sont respectivement bilinéaire et linéaire. Il reste à vérifier que l'application a est coercive. Soit $u \in H$. Les hypothèses donnent

$$a(u,u) = \int_a^b p(u')^2 + qu^2$$

$$\geqslant \alpha \int_a^b (u')^2 = \alpha \|u'\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré assure l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant C\|u'\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geqslant \frac{\alpha}{2C}\|u\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\ &\geqslant \min\Big(\frac{\alpha}{2C}, \frac{\alpha}{2}\Big)\, \|u\|_{\mathrm{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire a est coercive. On peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram ce qui termine la preuve. ☐

COROLLAIRE 3.20. L'équation (8) admet une unique solution classique.

3.2.3 Autres problèmes aux limites

(i) Condition de Dirichlet inhomogène

On fait les mêmes hypothèses sur les fonctions p, q et f. On étudie le problème aux limites

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur } [a,b], \\ \quad u(a) = \alpha, \\ \quad u(b) = \beta \end{cases} \tag{9}$$

pour deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. On considère la fonction

$$\overline{u}\colon \left| \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbf{R} \\ \quad x \longmapsto \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha. \end{array} \right.$$

Soient $u, w\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ deux fonctions vérifiant $w = u - \overline{u}$. Il est clair que la fonction u est solution du problème (9) si et seulement si la fonction w vérifie le problème

$$\begin{cases} -(pw')' + qw = f + (p\overline{u}')' - q\overline{u} & \text{sur } [a,b], \\ w(a) = w(b) = 0. \end{cases}$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire précédent.

(ii) Condition de Neumann homogène

On étudie le problème aux limites

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur } [a,b], \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

On va travailler sur l'espace $H \coloneqq \mathrm{H}^1(a,b)$. Quelle est la formulation variationnelle ? La méthode précédente ne va pas fonctionner puisque l'espace $\mathscr{D}(]a,b[)$ n'est pas dense dans H. On va préférer appliquer la formule de Green. Soient $u \in \mathscr{C}^2([a,b])$ une solution du problème (10) et $v \in H$. Alors

$$-\int_a^b (pu')'v + \int_a^b quv = \int_a^b fv.$$

Une intégration par parties donne

$$-\int_a^b (pu')'v' = \int_a^b pu'v' + [pu'v]_a^b$$

où le terme entre crochet est nul puisque $u'(a) = u'(b) = 0$. On obtient alors l'équation

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \text{avec} \quad a(u,v) \coloneqq \int_a^b pu'v' + \int_a^b quv \quad \text{et} \quad \ell(v) \coloneqq \int_a^b fv$$

et on est ramené une formulation variationnelle (FV_2).