ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

(EVNCD-S2)

Karine Beauchard

1A maths 2019, ENS de Rennes

Chapitre 1

Rappels topologiques dans les espaces métriques

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1.1. Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant n_0, \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Soient $f : E \to F$ uniformément continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (E, d_E). Alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (F, d_F).

◇ Remarque. La continuité de f ne suffit pas. Par exemple, il suffit de prendre $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1/x \in \mathbb{R}^*$ et de considérer la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En effet, la suite $(f(1/n) = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y, z \in E, \quad d_E(y, z) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_F(f(y), f(z)) < \varepsilon.$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \geqslant n_0, \quad d(x_p, x_q) < \delta.$$

Alors on obtient que

$$\forall p, q \geqslant n_0, \quad d(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon.$$ □

1.2 Prolongement des fonctions uniformément continues

Théorème 1.3. Soient (E, d_E) un espace métrique, $D \subset E$ dense dans (E, d_E), (F, d_F) un espace métrique complet et $f : D \to F$ uniformément continue. Alors f admet un unique prolongement par continuité $\tilde{f} : E \to F$ qui coïncide avec f sur D. De plus, l'application $\tilde{f}$ est uniformément continue.

Preuve Soient $x \in E \setminus D$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de D telle que $d_E(x_n, x) \to 0$. Cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans D, donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F. Comme (F, d_F) est complet, cette dernière converge. Pour définir $\tilde{f}$, montrons que la limite de la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de D telle que $d_E(y_n, x) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer que

$$d_F(\lim_{n\to+\infty} f(x_n), \lim_{n\to+\infty} f(y_n)) \leqslant \varepsilon.$$

Par continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y, z \in E, \quad d_E(y, z) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_F(f(y), f(z)) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

De plus, par convergence des suites, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x) < \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad d_F(y_n, x) < \frac{\delta}{2}.$$

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, l'inégalité triangulaire assure $d_E(x_n, y_n) < \delta$, on a $d_F(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. On passe ensuite à la limite $n \to +\infty$ pour obtenir l'inégalité. Cela légitime la définition $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$. Si $x \in D$, on pose $\tilde{f}(x) := f(x)$. On a alors définit l'application $\tilde{f} : E \to F$ qui prolonge f.

Montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ comme dans la proposition $(*)$. Soient $y, z \in E$ tels que $d_E(y, z) < \delta/3$. Par densité de D, il existe $y', z' \in D$ tels que $d_E(y, y') < \delta/3$ et $d_E(z, z') < \delta/3$. Alors $d_F(\tilde{f}(y), f(y')) < \varepsilon$ et $d_F(\tilde{f}(z), f(z')) < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, on a alors $d_E(y', z') < \delta$, donc $d_E(f(y'), f(z')) < \varepsilon$. On a ainsi

$$d_F(\tilde{f}(y), \tilde{f}(z)) \leqslant d_F(\tilde{f}(y), f(y')) + d_F(f(y'), f(z')) + d_F(f(z'), \tilde{f}(z)) \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui montre l'uniforme continuité de $\tilde{f}$. □

Application. Soient $\alpha \in]0,1[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est dite *α-höldérienne* s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \Omega, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^{\alpha}.$$

On note $\mathscr{C}^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions α-höldérienne. Alors le théorème précédent avec $D = \Omega$ et $E = \overline{\Omega}$ donne $\mathscr{C}^{0,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}) = \mathscr{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R})$.

1.3 Théorème d'Ascoli

Soient (E, d_E) un espace métrique compact et (F, d_F) un espace métrique. Pour $f, g \in \mathscr{C}^0(E,F)$, on définit

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in E} d_F(f(x), g(x)).$$

L'application d_∞ est une distance sur $\mathscr{C}^0(E,F)$.

Question. Quelles sont les parties compactes de $\mathscr{C}^0(E,F)$?

Définition-proposition 1.4. Soient (E, d_E) un espace métrique et $B \subset E$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\overline{B}$ est compacte dans (E, d_E) ;

(ii) de toute suite de B, on peut extraire une sous-suite convergente dans (E, d_E).

On dit alors que B est *relativement compacte*.

Preuve Comme $B \subset \overline{B}$, le sens direct est clair. Réciproquement, on suppose (ii). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\overline{B}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in B$ tel que $d(x_n, y_n) < 1/n$. Alors il existe une extraction ψ telle que $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une certain $y_\infty \in E$. Alors

$$d_E(x_{\psi(n)}, y_\infty) \leqslant d_E(x_{\psi(n)}, y_{\psi(n)}) + d_E(y_n, y_\infty) \longrightarrow 0$$

ce qui montre la compacité de $\overline{B}$. □

◇ Remarque. On suppose que $F = \mathbb{R}^n$. Alors les parties relativement compactes de $\mathbb{R}^n$ sont celles bornées.

Théorème 1.5 *(Ascoli)*. Soient (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet et $A \subset \mathscr{C}^0(E,F)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est relativement compacte dans $(\mathscr{C}^0(E,F), d_\infty)$;

(ii) A est équicontinue, *i. e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in A,\ \forall x, y \in E, \quad d_E(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

et la partie $A_x := \{f(x) \mid f \in A\}$ est relativement compacte dans (F, d_F) pour tout $x \in E$.

Preuve On suppose (i). Soit $x \in E$. Montrons que la partie A_x est relativement compacte. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A_x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in A$ tel que $y_n = f_n(x)$. Alors il existe une extraction ψ telle que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathscr{C}^0(E,F), d_\infty)$. En particulier, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrons que A est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, on peut extraire du recouvrement $\overline{A} \subset \bigcup_{f\in A} \mathrm{B}_\infty(f,\varepsilon)$ un sous-recouvrement fini, *i. e.* il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_N \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} \overline{\mathrm{B}}_\infty(f_j, \varepsilon). \tag{$*$}$$

Par le théorème de Heine [§1], il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall j \in [\![1, N]\!],\ \forall x, y \in E, \quad d_E(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_F(f_j(x), f_j(y)) < \varepsilon.$$

Soient $f \in A$ et $x, y \in E$ tels que $d_E(x,y) < \delta$. Par le recouvrement $(*)$, il existe $j \in [\![1, N]\!]$ tel que $d_\infty(f, f_j) < \varepsilon$. Alors l'inégalité triangulaire donne

$$d_F(f(x), f(y)) \leqslant d_F(f(x), f_j(x)) + d_F(f_j(x), f_j(y)) + d_F(f_j(y), f(y)) < 3\varepsilon$$

ce qui montre l'équicontinuité de A.

Réciproquement, on suppose (ii). Montrons d'abord que (E, d_E) est séparable, *i. e.* qu'il existe une partie $D \subset E$ dénombrable et dense dans (E, d_E). Par la propriété de Borel-Lebesgue, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on

§1. Il suffit d'appliquer ce théorème à chaque fonction f_j et de prendre le minimum des réels δ_j adaptées à chaque f_j.

peut extraire du recouvrement $E \subset \bigcup_{x \in E} \mathrm{B}(x, 1/n)$ un sous-recouvrement fini, *i. e.* il existe $K_n \in \mathbb{N}$ et $x_{n,1}, \dots, x_{n,K_n} \in E$ tels que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{K_n} \mathrm{B}(x_{n,j}, 1/n).$$

Alors la partie $D \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_{n,1}, \dots, x_{n,K_n}\}$ est clairement dénombrable et dense.

Montrons que la partie A est relativement compacte. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A. Notons $D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. La suite $(f_n(d_0))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de de $\overline{A_{d_0}}$ qui est compacte, donc il existe une extraction φ_0 telle que $(f_{\varphi(n)}(d_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F). De même, il existe une extraction φ_1 telle que $(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F). Par récurrence, on construit alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une extraction φ_k telle que $u_k \coloneqq (f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(d_k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F). Alors l'application

$$\psi \colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \\ n \longmapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(n) \end{array} \right.$$

définit une extraction et la suite $(f_{\psi(n)}(d_k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$ car c'est une sous-suite de u_k.

Pour tout $d \in D$, on a montré qu'il existe une extraction ψ telle que la suite $(f_{\psi(n)}(d))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F). Notons $f(d)$ sa limite. Cela définit l'application $f \colon D \to F$. On veut appliquer le théorème de prolongement. Pour cela, montrons que $f \colon D \to F$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité de A, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in E, \quad d_E(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y)) < \varepsilon.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient l'uniforme continuité. Par le théorème de prolongement, on dispose d'une application $\tilde{f} \colon E \to F$ uniformément continue prolongeant f.

Montrons que $d_\infty(f_{\psi(n)}, \tilde{f}) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_{\psi(n)}, \tilde{f}) < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Par équicontinuité de A et uniforme continuité de $\tilde{f}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad d_E(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y))) < \varepsilon, \\ \hfill d_F(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < \varepsilon. \end{cases}$$

Par la propriété de Borel-Lebesgue et la densité de D, on peut extraire du recouvrement $E \subset \bigcup_{d \in D} \mathrm{B}(d, \delta)$ une sous-recouvrement fini, *i. e.* il existe $N \in \mathbb{N}$ et $d'_1, \dots, d'_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{B}(d'_j, \delta).$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall j \in [\![1, N]\!],\ \forall n \geqslant n_0, \quad d_F(f_{\psi(n)}(d'_j), \tilde{f}(d'_j)) < \varepsilon.$$

Soit $x \in E$. Il existe $j \in [\![1, N]\!]$ tel que $d_E(x, d'_j) < \delta$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$d_F(f_{\psi(n)}(x), \tilde{f}(x)) \leqslant d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(d'_j)) + d_F(f_{\psi(n)}(d'_j), \tilde{f}(d'_j)) + d_F(\tilde{f}(d'_j), \tilde{f}(x)) \leqslant 3\varepsilon.$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathscr{C}^0(E, F)$ ce qui montre la relative compacité de A. $\square$

Application. Soit $\alpha \in \,]0, 1[$. Pour $M, C > 0$, le théorème d'Ascoli assure que la partie

$$A_{M,C} \coloneqq \{f \in \mathscr{C}^{0,\alpha}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leqslant M\}$$

est relativement compacte dans $(\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Alors toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A_{M,C}$ admet une suite-suite qui converge uniformément vers une fonction de $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Contre-exemple. On prend $E = F = \mathbb{R}$. L'ensemble E n'est pas compact. Soit $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant τ_n la translation par n, on pose $f_n \coloneqq \tau_n f$. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornéee de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et équicontinue car la fonction f est uniformément continue. Cependant, elle n'admet aucune sous-suite convergeant uniformément. En effet, si ψ est une extraction telle que $(f_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors cette suite converge simplement vers 0 et elle ne converge pas uniformément vers 0 puisque $f \neq 0$.

Chapitre 2
Séries de Fourier

Conventions. Toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ considérées dans ce chapitre seront 2π-périodique, il sera implicite qu'une fonction $R \to \mathbb{C}$ le sera. On définit les normes 1 et 2 d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)| \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

de sorte que $\|e_k\|_1 = \|e_k\|_2 = 1$ où

$$e_k : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \\ t \longmapsto e^{ikt}, \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour $f, g \in \mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$, on définit

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} \,\mathrm{d}t.$$

L'application $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$.

2.1 Coefficients de Fourier

2.1.1 Définition et règles de calculs

Définition 2.1. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} \,\mathrm{d}t = \langle f, e_n\rangle \in \mathbb{C}$$

le n-ième coefficients de Fourier de f.

▷ Exemples. – Soit $k \in\in \mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(e_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} \,\mathrm{d}t = \delta_{k,n}.$$

– Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On pose $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto P(e^{it})$. Une telle fonction f est appelé un polynôme trigonométrique. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) = a_n$. Donc $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $\mathbb{C}^{(\mathbb{Z})}$.
– Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique fonction 2π-périodique telle que $f = \sigma_\varepsilon := \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-int} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ \dfrac{\sin(n\varepsilon)}{\pi n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.2. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors
1. pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$;
2. pour tout $k, n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(fe_k) = c_{n-k}(f)$;
3. pour $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la relation

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}t$$

définit une fonction $f * g \in \mathrm{L}^1(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ et on a $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;
4. si $f \in \mathscr{C}^0 \cap \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Preuve Les deux premiers points sont triviaux : l'un par un changement de variables affines et l'autre en écrivant $c_n(fe_k)$.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme les fonctions sont l'intégrale sont positives, le théorème de Fubini-Tonelli donne
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \|f\|_1\,\|g\|_1 < +\infty. \tag{$*$}$$
Donc pour presque tout $x \in]0,2\pi[$, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$
donc la quantité $f * g(x)$ est bien définie et on a $f * g \in \mathrm{L}^1(]0,2\pi[,\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, grâce à la relation $(*)$, le même théorème donne
$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-in(x-t+t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-in(x-t)}\,\mathrm{d}x\right) f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n(g)f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = c_n(g)c_n(f). \end{aligned}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, une intégration par parties donne
$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}[f(t)e^{-int}]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)ine^{-int}\,\mathrm{d}t = inc_n(f). \end{aligned}$$ □

▷ Exemple. Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$. On considère la fonction $\Delta_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\Delta_\varepsilon(x) = (1 - |x|/\varepsilon)^+$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $\Delta_{2\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon}\sigma_\varepsilon * \sigma_\varepsilon$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$c_n(\Delta_{2\varepsilon}) = \frac{\pi}{\varepsilon}c_n(\sigma_\varepsilon)^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\varepsilon}\left(\dfrac{\varepsilon}{\pi}\right)^2 = \dfrac{\varepsilon}{\pi} & \text{si } n = 0, \\ \frac{\pi}{\varepsilon}\left(\dfrac{\sin(n\varepsilon)}{\pi n}\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.1.2 Décroissance et régularité

Proposition 2.3. 1. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors $c_n(f) = o_{|n|\to+\infty}(1)$. (lemme de Riemann-Lebesgue)
2. Soit $f \in \mathscr{C}^0 \cap \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors $c_n(f) = o_{|n|\to+\infty}(1/n)$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors $c_n(f) = o_{|n|\to+\infty}(1/n^k)$.
4. Soit $f \in \mathrm{L}^2(]0,2\pi[,\mathbb{C})$. Alors $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ et
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$
5. Soit $f \in \mathscr{C}^0 \cap \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

Preuve 1. • *Premier cas.* On suppose que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|c_n(f)| = \left|\frac{c_n(f')}{in}\right| \leqslant \frac{\|f'\|_1}{n} \longrightarrow 0.$$

• *Cas général.* Soit $\varepsilon > 0$ Par densité des fonctions continues à support compact, il existe $g \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{c}}(]0,2\pi[,\mathbb{C})$ telle que $\|f-g\|_1 < \varepsilon/2$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\|g'\|_1/n_0 < \varepsilon/2$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > n_0$, on a
$$|c_n(f)| \leqslant |c_n(f-g)| + |c_n(g)| \leqslant \|f-g\|_1 + \frac{\|g'\|_1}{n_0} \leqslant \varepsilon.$$

2. On a directement
$$c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in} = o_{|n|\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. On itère la relation de la propriété 2.
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors l'égalité
$$f = \left(f - \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e_n\right) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e_n$$

est une décomposition orthogonale dans $\mathrm{L}^2(]0,2\pi[,\mathbb{C})$. En effet, pour tout $k \in [\![-N,N]\!]$, on a

$$\left\langle f - \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e_n, e_k \right\rangle = \langle f, e_k\rangle - \langle c_n(f)e_k, e_k\rangle = 0.$$

Le théorème de Pythagore assure alors

$$\|f\|_2^2 = \left\| f - \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e_n \right\|_2^2 + \left\| \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e_n \right\|_2^2$$

avec

$$\left\| \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e_n \right\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{+N} |c_n(f)|^2,$$

donc

$$\sum_{n=-N}^{+N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

On a ainsi trouvé un majorant uniforme pour toutes les sommes partielles ce qui implique la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et la majoration annoncée.

5. En utilisant le fait que $ab \leqslant a^2 + b^2$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|c_n(f)| = \left| \frac{c_n(f')}{in} \right| \leqslant \frac{1}{n^2} + |c_n(f')|_2$$

ce qui assure que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. □

◇ Remarques. 1. On note $c_0(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ l'ensemble des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. L'application

$$\mathscr{F} : \left| \begin{array}{rcl} (\mathrm{L}^1(]0,2\pi[,\mathbb{C}), \|\ \|_1) & \longrightarrow & (c_0(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \|\ \|_\infty), \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

est linéaire et continue. En effet, sa norme subordonnée est majorée par 1 et elle est même atteinte par les fonctions e_k avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Le point 4 de la proposition précédente donne $\mathscr{F}(\mathrm{L}^2(]0,2\pi[,\mathbb{C})) \subset \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

2.1.3 Noyau de Fejér de de Dirichlet

Définition 2.4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Le N-ième noyau de Dirichlet est la fonction $D_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$D_N(t) \coloneqq \sum_{n=-N}^{+N} e^{int} = \frac{\sin[(N+1/2)t]}{\sin(t/2)}$$

et le N-ième noyau de Fejér est la fonction $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$K_N(t) \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin^2[(N+1/2)t]}{N\sin^2(t/2)}.$$

Proposition 2.5. 1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(t)|\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. La suite $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
3. On a $\|D_N\|_1 \to +\infty$.

Définition 2.6. Pour $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la série de Fourier associée à f est la série de fonctions $\sum c_n(f)e^{int}$. Ses sommes partielles vérifient

$$\sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e^{int} = f * D_N(t), \quad N \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}.$$

Leurs moyennes de Cesàro sont

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f * D_n(t) = f * K_n(t), \quad N \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}.$$

Preuve Il suffit d'échanger l'intégrale et la somme pour montrer les deux égalités. □

Preuve de 3 de la propriété 2.5 Pour $N \in \mathbb{N}$, la parité de D_N et le changement de variables $u = (N+1/2)t$ donnent

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)t]|}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)t]|}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,\mathrm{d}u \\
&\geqslant \frac{2}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi} |\sin u|\,\mathrm{d}u\right)\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k+1} \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$
□

COROLLAIRE 2.7. Soit $f \in \mathscr{C}^0 \cap \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors sa série de FOURIER converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème de Frejér

THÉORÈME 2.8 *(FREJÉR)*. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors

$$\|f * K_N - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de HEINE, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in\ ]-\delta,\delta[,\quad |f(x) - f(x-t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2\,\|f\|_\infty}{N_0 \sin^2(\delta/2)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tous $N \geqslant N_0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f * K_N(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-t)]K_N(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|\,K_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} \frac{\varepsilon}{2}K_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} 2\,\|f\|_\infty\,\frac{1}{N\sin^2(\delta/2)}\,\mathrm{d}t < \varepsilon.
\end{aligned}$$
□

COROLLAIRE 2.9. 1. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Si sa série de FOURIER converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors sa limite est nécessairement f.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^0 \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors sa série de FOURIER converge uniformément vers f

◇ REMARQUE. Il existe des fonctions continues dont la série de FOURIER ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ (cf. chapitre 4).

2.3 Théorème de Dirichlet

THÉORÈME 2.10 *(DIRICHLET)*. Soient $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x \in [0,2\pi]$ tel que f admette une limite à gauche, notée $f(x-0)$, et à droite, notée $f(x+0)$, en x et que les fonctions

$$t \longmapsto \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \quad \text{et} \quad t \longmapsto \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$$

soient bornées au voisinage de 0^+. Alors

$$f * D_N(x) \longrightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Preuve Comme D_N est paire, on a

$$\begin{aligned}
f * D_N(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [(f(x-t)-f(x-0)) + (f(x+t)-f(x+0))]D_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-t)-f(x-0)}{\sin(t/2)}\sin[(N+1/2)t]\,\mathrm{d}t + \\
&\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin(t/2)}\sin[(N+1/2)t]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La première intégrable tend vers 0 par le lemme de Riemann-Lebesgue car la fonction sous l'intégrale appartient à $\mathrm{L}^1(]0,\pi[,\mathbb{C})$ (elle est continue sur $]0,\pi]$ et bornée au voisinage de 0^+). De même pour la seconde intégrale. D'où la limite. □

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert généralisent à la dimension infinie la notion d'espace euclidien. On verra que la présence d'une produit scalaire, qui est une hypothèse géométrique, n'est pas suffisante et qu'il faut rajouter une hypothèse de complétude pour étendre les résultats. Dans tout le chapitre, le corps de base sera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.1 Espaces préhilbertiens

Définition 3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (respectivement un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Un produit scalaire sur E est une forme $(x, y) \in E \times E \longmapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ vérifiant

(PS1) $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire (respectivement sesquilinéaire) : pour tous $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\langle x, \lambda y + y'\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, y_2\rangle, \qquad \text{(linéarité à gauche)}$$
$$\langle \lambda x + x', y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \langle x, y_2\rangle\ ; \qquad \text{((anti)linéarité à droite)}$$

(PS2) $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique (respectivement hermitienne) : pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(PS3) $\langle\ ,\ \rangle$ est définie : pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$;

(PS4) $\langle\ ,\ \rangle$ est positive : pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x\rangle \geqslant 0$.

Le couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est alors appelé un espace préhilbertien et l'application

$$x \in E \longmapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

est une norme sur E. Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

Les résultats des chapitres précédents sur les espaces vectoriels normés et les espaces métriques s'appliquent donc et, en particulier, aux espaces préhilbertiens.

▷ Exemples. 1. L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien est un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien.

2. L'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien est un $\mathbb{C}$-espace préhilbertien où le produit hermitien est définie par

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n} := \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n,\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

et, muni du produit scalaire définie par $(x, y) \longmapsto \operatorname{Re}\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^n}$, c'est un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien.

3. L'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ munit du produit scalaire $(x, y) \longmapsto \sum_{j=0}^{+\infty} x_j y_j$ est un espace préhilbertien.

4. L'espace $\mathrm{L}^2(]0, 1[, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \int_{[0,1]} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un espace préhilbertien.

Proposition 3.2. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in \mathbb{C}$. Alors

1. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires ; (inégalité de Cauchy-Schwarz)
2. on a
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\ ; \qquad \text{(identité du parallélogramme)}$$
3. si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors les formules de polarisation énoncent
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)\ ;\end{aligned}$$

si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{8}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut à la continuité sur $(E, \|\ \|)$ de la forme bilinéaire (respectivement bilinéaire) $\langle\ ,\ \rangle$. L'interprétation géométrique de l'identité du parallélogramme est la suivante : sur le parallélogramme de sommets $(0, x, x+y, y)$, la somme des carrés des diagonales est égale la somme des carrés des côtés.

Preuve Montrons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'inégalité est évidente si x et y sont colinéaires et c'est alors une égalité. Soient $x, y \in E$ non colinéaires. On suppose d'abord que $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$0 < \langle x+ty, x+ty\rangle = \|x\|^2 + 2t\,\langle x, y\rangle + t^2\,\|y\|^2\,,$$
donc ce polynôme de degré 2 appartenant à $\mathbb{R}[t]$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$. On en déduit que son discriminant est strictement négatif, *i. e.*
$$\langle x, y\rangle^2 < \|x\|^2\,\|y\|^2\,.$$
On suppose que $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|\,e^{-i\theta}$, donc
$$|\langle x, y\rangle| = e^{i\theta}\langle x, y\rangle = \langle x, e^{i\theta}y\rangle < \|x\|\,\|e^{i\theta}y\| = \|x\|\,\|y\|\,.$$
Cela termine la preuve. □

Définition 3.3. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. On dit qu'une famille $(x_j)_{j\in J}$ de E est orthogonale si
$$\forall j, k \in J, \quad j \neq k \quad\Longrightarrow\quad \langle x_j, x_k\rangle = 0$$
ou orthonormée si
$$\forall j, k \in J, \quad \langle x_j, x_k\rangle = \delta_{j,k}$$

▷ Exemples. – La base canonique $(e_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ de $\mathbb{C}^N$ est une famille orthonormée de $\mathbb{C}^N$.
– La base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est une famille orthonormée de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.
– La famille $(t \longmapsto e^{2i\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathrm{L}^1(]0,1[, \mathbb{C})$ est orthonormée.
– La famille $\{t \longmapsto \sqrt{2}\cos 2\pi nt,\ t \longmapsto \sqrt{2}\sin 2\pi kt \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathrm{L}^2(]0,1[, \mathbb{R})$ est orthonormée.
– La famille $(t \longmapsto e^{2i\pi nt}\mathbb{1}_{[k,k+1]})_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est orthonormée.

Proposition 3.4 *(théorème de Pythagore)*. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie orthogonale de E. Alors
$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2\,.$$

Preuve Il suffit de développer le carré et d'observer que les termes croisés disparaissent par orthogonalité. □

Définition 3.5. Soit $A \subset E$. L'orthogonale de A est l'ensemble
$$A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x\rangle = 0\}.$$

Proposition 3.6. Soient $A, B \subset E$. Alors
1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\ \|)$;
2. si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$;
3. $A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

Preuve 1. Soit $a \in A$. On a $a^\perp := \{a\}^\perp = \operatorname{Ker}[\langle a, \cdot\rangle]$. Or la forme linéaire $x \longmapsto \langle a, x\rangle$ est continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\ \|)$. Donc $A^\perp = \bigcap_{a\in A} A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\ \|)$.
2. Si $A \subset B$, alors
$$B^\perp = \bigcap_{a\in B} a^\perp \subset \bigcap_{a\in A} a^\perp = A^\perp.$$
3. L'inclusion $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$ vient du point 2 et de fait que $A \subset \overline{A}$. Réciproquement, montrons que $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$. Soient $x \in A^\perp$ et $a \in \overline{A}$. On peut écrire $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^\mathbb{N}$. Alors $\langle a, x\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle a_n, x\rangle = 0$. Ceci est vrai pour tout $a \in \overline{A}$, donc $x \in \overline{A}^\perp$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

L'inclusion $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$ vient du point 2 et $A \subset \operatorname{Vect} A$. Réciproquement, montrons que $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$. Soient $x \in A^\perp$ et $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i \in \operatorname{Vect} A$. Alors $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i\,\langle a_i, x\rangle$ et ceci pour tout $y \in \operatorname{Vect} A$, donc $x \in (\operatorname{Vect} A)^\perp$. D'où l'inclusion et la seconde égalité. □

3.2 Espace de Hilbert et théorème de projection

3.2.1 Espace de Hilbert

Définition 3.7. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ complet pour la norme $\|\ \|$ associée à son produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

▷ Exemples. Muni de leurs produits scalaires canoniques, les espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $\mathrm{L}^2(]0,1[, \mathbb{R})$ sont des espaces de Hilbert. Dans un tel espace, tout sous-espace vectoriel fermé est un espace de Hilbert.

Contre-exemples. Dans un espace de Hilbert, un sous-espace vectoriel qui n'est pas fermé n'est pas un espace de Hilbert. Par exemple, l'espace $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire de $\mathrm{L}^2(]0,1[, \mathbb{R})$ n'est pas un espace de Hilbert.

3.2.2 Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Notre but est de généraliser le résultat élémentaire suivant à la dimension infinie.

Proposition 3.8. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base orthonormée de F.

1. Pour tout $x \in E$, la quantité $\mathrm{d}(x, F) \coloneqq \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ est atteinte au point $P_F(x) \coloneqq \sum_{k=1}^n \langle x, b_k\rangle b_k$ et
$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k\rangle|^2.$$
2. La projection orthogonale $P_F \colon E \to F$ est linéaire continue de norme 1.
3. On a $E = F \oplus F^\perp$.

Preuve 1. On vérifie facilement que $x - P_F(x)$ est orthogonal à F, donc le théorème de Pythagore donne
$$\forall y \in F, \quad \|x - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geqslant \|x - P_F(x)\|^2.$$
Ainsi en développant le carré, on a
$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k\rangle b_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k\rangle|^2.$$
2. L'application P_F est clairement linéaire. De plus, pour tout $x \in E$, comme $\mathrm{d}(x, F)^2 \geqslant 0$, ce qui précède donne
$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$
Ceci montre que P_F est continue et $\|P_F\| \leqslant 1$. Or $P_F(y) = y$ pour tout $y \in F$, donc $\|P_F\| = 1$.
3. Grâce au caractère défini du produit scalaire, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$. De plus, tout $x \in E$ s'écrit sous la forme
$$x = P_F(x) + [x - P_F(x)] \quad \text{avec} \quad P_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - P_F(x) \in F^\perp.$$
D'où $E = F \oplus F^\perp$. □

▷ Exemples. 1. On peut utiliser ce résultat pour montrer l'existence et unicité du polynôme de degré n de meilleure approximation d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2(]0,1[, \mathbb{R})$ pour la norme 2, *i. e.* un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui minimise $\|f - P\|_2$. Notons qu'en l'absence du cadre hilbertien, ce polynôme reste défini, mais il n'est pas forcément unique.

Par exemples, on se place dans $E \coloneqq \mathrm{L}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\ \|_\infty$. La fonction $\mathbb{1}_{[1/2,1]}$ est à distance $1/2$ des fonctions affines (à cause de sa discontinuité en $1/2$) et cette distance est atteinte en beaucoup de fonctions affines (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre).

2. On peut également obtenir l'existence d'une régression linéaire. Soient $N \geqslant 2$ et $x, y \in \mathbb{R}^N$. Montrons qu'il existe un unique couple $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise $\sum_{n=1}^N |\overline{\alpha} x_n + \overline{\beta} - y_n|^2$. On note $Z \coloneqq (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^N$. Alors l'ensemble $F \coloneqq \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{X, Z\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe un unique couple $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_F(Y) = \overline{\alpha} X + \overline{\beta}$. Alors
$$\|Y - P_F(Y)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N o|y_j - (\overline{\alpha} x_j + \overline{\beta})|^2\right)^{1/2} = \mathrm{d}(Y, F)$$
qui vaut bien l'infimum recherché.

3.2.3 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 3.9 *(de projection sur un convexe fermé).* Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non vide.

1. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x) \in C$ tel que $\mathrm{d}(x, C) = P_C(x)$.
2. Ce dernier est caractérisé par
$$P_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall z \in C,\ \operatorname{Re}\langle z - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leqslant 0.$$
3. L'application $P_C \colon H \to C$ est 1-lipschitzienne.
4. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel fermé non vide de H, alors $P_F(x)$ est caractérisé par
$$P_F(x) \in F \quad \text{et} \quad [x - P_F(x)] \perp F$$

pour tout $x \in F$. De plus, l'application $P_F \colon H \to F$ est linéaire, continue et de norme 1.

▷ Exemples. 1. On munit $H \coloneqq \mathrm{L}^2(]0,1[,\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. L'ensemble $F \coloneqq \mathbb{1}_{[0,1/2]}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. D'après ce dernier théorème, pour toute $f \in H$, il existe $P_F(f) \in F$ tel que
$$\mathrm{d}_2(f, F) = \|x - P_F(f)\|_2 .$$
D'après sa caractérisation, on en déduit que
$$P_F(f) = f - \langle f, \sqrt{2}\mathbb{1}_{[0,1/2]}\rangle\sqrt{2}\mathbb{1}_{[0,1/2]}.$$
2. On considère
$$F \coloneqq \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{2n} = 0\}.$$
Montrons que F est un fermé de $(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|\ \|_2)$. L'application
$$L \colon \left| \begin{array}{l} \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}), \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$
est linéaire et continue car $\|L(x)\|_2 \leqslant \|x\|_2$ pour toute $x \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Par conséquent, le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Ker} L$ est fermé comme une image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue. Déterminons la projection $P_F(x)$ pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. On définit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $y_n = 0$ si n est pair et $y_n = x_n$ sinon. Alors $y \in F$. Montrons que $P_F(x) = y$ par la caractérisation du projeté. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Alors
$$\langle x - y, z\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - y_n) z_n = 0$$
par définition de la suite y_n. D'où $P_F(x) = y$. De plus, on a
$$\mathrm{d}(x, F) = \|x - P_F(x)\|_2 = \Big(\sum_{n\in 2\mathbb{N}} |x_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Contre-exemple. Notons que, pour généraliser la proposition 3.8 à la dimension infinie, on a utilisé un hypothèse de complétude sur l'espace préhilbertien E et le caractère fermé du sous-espace vectoriel F. Les deux contres-exemples suivant montrent que ces deux hypothèses sont nécessaires.

– On munit $H_1 \coloneqq \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]} fg$. C'est un espace préhilbertien qui n'est pas complet. Avec les notations de l'exemple précédent, l'ensemble $F_1 \coloneqq F \cap H_1$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(H_1, \|\ \|_2)$. En effet, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F_1 convergeant simplement vers un élément $f \in H_1$, alors $f \in F_1$. Cependant, la distance $\mathrm{d}_2(f, F_1)$ n'est atteinte pour aucune fonction $f \in H_1 \setminus F_1$. En effet, pour $f \in H_1 \setminus F_1$, en approximant $P_F(f)$ pour la norme $\|\ \|_2$ par des fonctions continues, on voit que $\mathrm{d}_2(f, F_1) = \mathrm{d}_2(f, F)$. Or cette distance n'est atteinte que par la fonction $P_F(f)$ qui n'est pas continue. Ainsi $\|f - g\|_2 > \mathrm{d}_2(f, F)$ pour toute $g \in F_1$.
– On note $H \coloneqq \mathrm{L}^2(]0,1[,\mathbb{R})$. Alors $F \coloneqq \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel non fermé. Pour $f \in H \setminus F$, on a $\mathrm{d}(f, F) = 0$ par densité. Cependant, il n'existe pas $g \in F$ telle que $\|f - g\|_2 = 0$. Idem avec $F \coloneqq \mathbb{R}[X]$.

Preuve L'outil clef de cette preuve est l'égalité du parallélogramme. La preuve de caractérisation/lipschitzianité de courte mais subtiles. Soit $x \in H \setminus C$. On note $d \coloneqq \mathrm{d}(x, C) \in]0, +\infty[$.

1. Montrons l'existence. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $\|x - y_n\| \to d$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, l'inégalité du parallélogramme donne
$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \end{aligned}$$

$$\leqslant 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4d^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d^2 \leqslant \|x-y_n\|^2 \leqslant d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

On en déduit alors que

$$\forall m, n \geqslant n_0, \quad \|y_m - y_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de CAUCHY dans $(H, \|\ \|)$. Comme $(H, \|\ \|)$ est complet, elle converge vers un vecteur $x_C \in H$. Comme C est fermé, on a $x_C \in C$ et $\|x - x_C\| = d$.

Montrons l'unicité. Soient $x_C^1, x_C^2 \in C$ vérifiant $\|x - x_C^1\| = \|x - x_C^2\| = d$. Alors

$$\begin{aligned}\|x_C^1 - x_C^2\|^2 &= \|(x - x_C^1) - (x - x_C^2)\|^2 \\ &\leqslant 2(\|x - x_C^1\|^2 + \|x - x_C^2\|^2) - 4\left\|x - \frac{x_C^1 + x_C^2}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0.\end{aligned}$$

Donc $x_C^1 = x_C^2$.

Ces deux étapes légitiment la définition de $P_F(x)$ comme l'unique point de C vérifiant $\|x - P_C(x)\| = \mathrm{d}(x, C)$.

2. $\Rightarrow$ Soient $z \in C$ et $t \in [0,1]$. Le vecteur $(1-t)P_C(x) + tz$ appartient à C par convexité, donc

$$0 \leqslant \|x - [(1-t)P_C(x) + tz]\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2.$$

En écrivant $x - [(1-t)P_C(x) + tz] = [x - P_C(x)] - t[z - P_C(x)]$ et en développant le premier carré, on a

$$0 \leqslant -2t \operatorname{Re}\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle + t^2 \|z - P_C(x)\|^2.$$

On suppose que $t \neq 0$. En divisant cette dernière relation par t, on a

$$0 \leqslant -2 \operatorname{Re}\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle + t \|z - P_C(x)\|^2.$$

En laissant tendre t vers 0, on obtient que $\operatorname{Re}\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leqslant 0$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, suppose que $\tilde{x}_C \in C$ vérifie

$$\forall z \in C, \quad \operatorname{Re}\langle x - \tilde{x}_C, z - \tilde{x}_C\rangle \leqslant 0 \leqslant 0.$$

Alors pour tout $z \in C$, on a

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - \tilde{x}_C) - (z - \tilde{x}_C)\|^2 \\ &= \|x - \tilde{x}_C\|^2 + \|z - \tilde{x}_C\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x - \tilde{x}_C, z - \tilde{x}_C\rangle \\ &\geqslant \|x - \tilde{x}_C\|^2,\end{aligned}$$

donc $\|x - \tilde{x}_C\| = \mathrm{d}(x, C)$.

3. Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|(P_C(x) - P_C(y)) + ([x - P_C(x)] - [y - P_C(y)])\|^2 \\ &= \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 + \|[x - P_C(x)] - [y - P_C(y)]\|^2 \\ &\qquad - 2\operatorname{Re}\langle P_C(y) - P_C(x), x - P_C(x)\rangle - 2\operatorname{Re}\langle P_C(y) - P_C(x), y - P_C(y)\rangle \\ &\geqslant \|P_C(x) - P_C(y)\|^2\end{aligned}$$

d'après la caractérisation précédente. On en déduit que $P_C \colon H \to C$ est 1-lipschitzienne.

4. La structure de sous-espace vectoriel implique $\{z - P_F(x) \in F \mid z \in F\} = F$. Ainsi le vecteur $P_F(x)$ est l'unique point de F vérifiant $\operatorname{Re}\langle x - P_F(x), z\rangle \leqslant 0$ pour tout $z \in F$. En remplaçant z par $-z$, on en déduit que $\operatorname{Re}\langle x - P_F(x), z\rangle = 0$ pour tout $z \in F$. □

◇ REMARQUE. Seule la complétude de $(C, \|\ \|)$ est utilise dans la preuve, celle de H n'est donc pas vraiment nécessaire. L'énoncé reste donc vrai lorsque H est un préhilbertien et C une partie convexe et complète de H.

QUESTION PRATIQUE. Soient F un sous-espace vectoriel fermé de H et $x \in H$. Comment déterminer $P_F(x)$ et $\mathrm{d}(x, F)$? Si F est de dimension finie, on cherche une base orthonormée $(b_1, \dots, b_n)$ et F et on sait que

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, b_j\rangle b_j \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \langle x, b_j\rangle^2.$$

Si F est de dimension infinie, on peut procéder de même avec une base hilbertienne de F, concept que nous développerons plus tard.

3.3 Conséquence du théorème de projection

3.3.1 Théorème du supplémentaire orthogonal

Théorème 3.10 *(du supplémentaire orthogonal).* Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Preuve En faisant comme dans la preuve du point 3 de la proposition 3.8 et en utilisant le théorème de projection, on montre que $H = F \oplus F^\perp$. De plus, il est clair que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Réciproquement, montrons que $(F^\perp)^\perp \subset F$. Soit $x \in (F^\perp)^\perp$. Alors x et $x - P_F(x)$ sont orthogonaux, donc

$$\|x - P_F(x)\|^2 = \langle x, x - P_F(x)\rangle - \langle P_F(x), x - P_F(x)\rangle = 0,$$

donc $x = P_F(x) \in F$. D'où l'égalité. □

Corollaire 3.11 *(critère de densité).* Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Preuve Le sous-espace vectoriel F est dense dans H si et seulement si $\overline{F} = H$ si et seulement si $\overline{F} = E$ si et seulement si $\overline{F}^\perp = \{0\}$, *i. e.* $F^\perp = \{0\}$. □

3.3.2 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 3.12 *(Riesz).* Soient H un espace de Hilbert et $\phi \in H'$. Alors il existe un unique $f \in H$ tel que, pour tout $h \in H$, on ait $\phi(h) = \langle f, h\rangle$.

Preuve Comme ϕ est continue, son noyau $\operatorname{Ker}\phi$ est un hyperplan fermé, donc il existe $e \in H$ tel que

$$\|e\| = 1 \quad \text{et} \quad H = \operatorname{Ker}\phi \oplus \mathbb{K}e.$$

Alors pour tout $h \in H$, il existe $h_0 \in \operatorname{Ker}\varphi$ tel que $h = h_0 + \langle e, h\rangle e$, donc $\phi(h) = \langle e, h\rangle \phi(e) = \langle \overline{\phi(e)}e, h\rangle$. Il suffit alors de poser $f := \overline{\phi(e)}e$. □

3.4 Base hilbertienne

3.4.1 Définition et existence

Définition 3.13. Soit E un espace préhilbertien. Une *base hilbertienne* de E est une famille $(f_j)_{j\in J}$ orthonormée totale de E, *i. e.* l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \{f_j \mid j \in J\}$ est dense dans E.

▷ Exemple. On se place dans $E := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n := (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E. En effet, montrons qu'elle est dense. Soient $x := (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k\geqslant N} |x_k|^2 < \varepsilon^2.$$

Alors $y := \sum_{k=0}^{N} x_k e_k \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\|x - y\|_2 < \varepsilon$.

Théorème 3.14. Soit E un espace préhilbertien. Alors E est séparable si et seulement si E admet une base hilbertienne dénombrable.

Preuve On suppose que E admet une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, la partie $\operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et dense.

Réciproquement, on suppose que E est séparable et de dimension infinie. Il existe une famille libre, dénombrable et totale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $D := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dénombrable et dense. On peut supposer que $a_0 \neq 0$. On construit par récurrence une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $n_0 = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_{k+1} = \min\{n > n_k \mid a_n \notin \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \{a_{n_0}, \dots, a_{n_k}\}\}.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \{a_{n_0}, \dots, a_{n_k}\} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} \{a_0, \dots, a_{n_k}\}$. On en déduit que la famille $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est totale et libre. On applique ensuite l'algorithme de Gram-Schmidt à cette famille. □

▷ Exemple. L'espace $\mathrm{L}^2(]0,1[, \mathbb{R})$ est séparable car le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les indicatrices d'intervalles de $[0,1]$ dont les extrémités sont rationnelles est dense.

3.4.2 Caractérisation par l'égalité de Bessel

Théorème 3.15. Soit E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E ;

(ii) pour tout $x \in E$, on a $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$; (inégalité de Bessel)

(iii) pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle\langle y, e_n\rangle$.

Preuve Les propositions (ii) et (iii) sont équivalentes par l'identité de polarisation. Pour montrer l'équivalence entre les propositions (i) et (ii), il suffit de remarquer que, si $N \in \mathbb{N}$ et $F_N \coloneqq \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{e_n \mid 0 \leqslant n \leqslant N\}$, alors

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{d}(x, E)^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \geqslant 0. \qquad \square$$

Théorème 3.16. Soit E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée. Alors

1. pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ et la série est commutativement convergente, *i. e.* pour toute bijection $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_{\sigma(n)}\rangle e_{\sigma(n)}$;
2. l'application

$$J : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \\ x \longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est une isométrie ;

3. J est surjective si et seulement si E est complet.

Preuve 1. Soit $x \in E$. Le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel fermé donne

$$\Big\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \Big\| = \|x - P_{F_n}(x)\| = \mathrm{d}(x, F_N) \longrightarrow 0.$$

2. L'isométrie de J vient de l'égalité de Bessel.

3. Si J est surjective, alors E est isométrique à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, donc E est complet. Réciproquement, on suppose que E est complet. Soit $u \coloneqq (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Montrons que la série $\sum u_n e_n$ est de Cauchy dans E. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$, on a

$$\Big\| \sum_{n=p}^{q} u_n e_n \Big\|^2 = \sum_{n=p}^{q} |u_n|^2 \xrightarrow[(p,q)\to\infty]{} 0$$

car $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. La série $\sum u_n e_n$ est donc de Cauchy, donc elle convergge et le vecteur $x \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n e_n$ est bien définie. Montrons que $J(x) = u$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par continuité du produit scalaire, on a

$$\langle x, e_k\rangle = \Big\langle \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n e_n, e_k \Big\rangle = \lim_{n\to+\infty} \Big\langle \sum_{n=0}^{N} u_n e_n, e_k \Big\rangle = u_k. \qquad \square$$

3.4.3 Application aux séries de Fourier

Théorème 3.17. 1. La famille $(e_n \colon t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{int} \in \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$.

2. Pour toute $f \in \mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$, on a $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ (série convergente dans $\mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$).

3. Pour toute $f \in \mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ telle que $(D_N * f)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement, alors sa limite vaut f presque partout.

Preuve Il suffit de montrer le point 1. Soient $f \in \mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in \mathscr{C}_c^\infty(]0, 2\pi[, \mathbb{R})$ tel que $\|f - h\|_2 < \varepsilon/2$. On identifie h avec sa 2π-périodisée qui est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Fejèr, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|h - K_N * h\|_\infty < \varepsilon/2$. Alors l'inégalité triangulaire assure

$$\|f - K_N * h\|_2 < \|f - h\|_2 + \|h - K_N * h\|_2 < \varepsilon. \qquad \square$$

Chapitre 4
Théorie de Baire

4.1 Le théorème de Baire

Théorème 4.1 *(Baire)*. Soit (E, d) un espace métrique complet.

1. Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses de E. Alors $\Omega \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est dense.
2. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide de E. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Preuve Les deux points sont équivalentes en passant au complémentaire. Montrons le premier point. Soit ω un ouvert de E. Montrons que $\omega \cap \Omega \neq \emptyset$. On construit, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^*$ telles que

- $\mathrm{B}(x_0, r_0) \subset \omega$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathrm{B_f}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \omega \cap \mathrm{B}(x_n, r_n)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $r_{n+1} \leqslant r_n/2$.

Pour $n = 0$, comme ω est un ouvert non vide, il existe $x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, r) \subset \omega$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose avoir construit de telles suites $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Comme O_{n+1}, il rencontre $\mathrm{B}(x_n, r_n)$, *i. e.* la partie $O_{n+1} \cap \mathrm{B}(x_n, r_n)$ est un ouvert non vide. Soit $x_{n+1} \in O_{n+1} \cap \mathrm{B}(x_n, r_n)$. Alors il existe $r_{n+1} > 0$ tel que $\mathrm{B_f}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathrm{B}(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap \mathrm{B}(x_n, r_n)$. Quitte à réduire r_{n+1}, on peut choisir $r_{n+1} < r_n/2$.

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n < p$, on a

$$d(x_n, x_p) < r_n < \frac{r_0}{2^n} \longrightarrow 0.$$

Comme E est complet, il existe $y \in E$ tel que $d(x_n, y) \to 0$. Montrons que $y \in \omega \cap \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_p)_{p\geqslant n}$ est à valeurs dans $\mathrm{B}(x_n, r_n)$, donc $y \in \mathrm{B_f}(x_n, r_n) \subset O_{n+1}$. Ainsi $y \in \Omega$. En particulier, on a $y \in \mathrm{B_f}(x_1, r_1) \subset \mathrm{B}(x_1, r_1) \subset \Omega$. □

Contre-exemple sans complétude. On se place dans $(c_{\mathrm{c}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ qui n'est pas complet. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$O_n \coloneqq \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_{\mathrm{c}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid x_n \neq 0\}$$

qui est un ouvert dense. Cependant, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \emptyset$.

4.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 4.2 *(Banach-Steinhaus)*. Soient E un espace vectoriel normé complet, F un espace vectoriel normé et $(T_j)_{j\in J}$ une famille de $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$. On suppose que

$$\forall x \in E, \quad \sup_{j\in J} \|T_j(x)\|_F < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{j\in J} \|T_j\|_{\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E,F)} < +\infty.$$

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $j \in J$, on pose

$$X_{n,j} \coloneqq \big\{x \in E \bigm| \|T_j(x)\|_F \leqslant n\big\}$$

qui est un fermé de E comme l'image réciproque de $[-n, n]$ ou $\overline{\mathrm{D}}_{\mathbb{C}}(0, n)$ par l'application continue T_j. Le théorème de Baire assure alors que la partie $F_n \coloneqq \bigcap_{j\in J} X_{n,j} = \{x \in E \mid \forall j \in J, \|T_j(x)\| \leqslant n\}$ est un fermé de E. Par hypothèse, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$ qui n'est pas d'intérieur vide. Par le théorème de Baire, comme E est complet, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Alors il existe $x_0 \in F_{n_0}$ et $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_E(x_0, r) \subset F_{n_0}$, *i. e.*

$$\forall z \in \mathrm{B}_E(0, 1),\ \forall j \in J, \quad \|T_j(x_0 + rz)\| \leqslant n_0.$$

Alors pour tout $z \in \mathrm{B}_E(0, 1)$ et tout $j \in J$, on a

$$\|T_j(z)\|_F = \left\|\frac{T_j(x_0 + rz) - T_j(x_0)}{r}\right\|_F \leqslant \frac{2n_0}{r},$$

donc

$$\|T_j\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leqslant \frac{2n_0}{r} < +\infty. \qquad \square$$

COROLLAIRE 4.3. Soient E un espace vectoriel normé complet, F un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de $\mathscr{L}_c(E,F)$ qui converge simplement vers $T\colon E \to F$. Alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} < +\infty \quad \text{et} \quad T \in \mathscr{L}_c(E,F).$$

De plus, on a

$$\|T\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}.$$

APPLICATION AUX SÉRIES DE FOURIER. Il existe une fonction 2π-périodique $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dont la série de FOURIER diverge en 0, *i. e.* la suite $(D_N * f(0))_{N\in\mathbb{N}}$ diverge dans $\mathbb{C}$.

Preuve Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose

$$\Lambda_n : \left| \begin{array}{l} (\mathscr{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \|_\infty) \longrightarrow \mathbb{C}, \\ \qquad f \longmapsto D_N * f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)D_N(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Pour toute $f \in \mathscr{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $\|\Lambda_N(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|D_N\|_1$, donc l'application Λ_N est continue et sa normé est majorée par $\|D_N\|_1$. En approximant D_N convenablement, on peut montrer que

$$\|\Lambda_N\|_{\mathscr{L}_c(\mathscr{C}^0_{\text{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathbb{C})} = \|D_N\|_1 \longrightarrow +\infty.$$

D'après le théorème de BANACH-STEINHAUS, la suite $(\Lambda_N)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement ce qui montre le résultat souhaité. $\square$

4.3 Théorèmes de l'application ouverte, isomorphisme de Banach

THÉORÈME 4.4 *(de l'application ouverte).* Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces de BANACH et $T \in \mathscr{L}_c(E,F)$ une application linéaire surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $\mathrm{B}_F(0,c) \subset T(\mathrm{B}_E(0,1))$.

Preuve Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que $\mathrm{B}_F(0,2c) \subset \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'espace $F_n \coloneqq n\overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$ est un fermé de F. Comme T est surjective, on a $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Comme F est complet, le théorème de BAIRE assure qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Nécessairement, l'ensemble $\overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$ est d'intérieur non vide, *i. e.* il existe $y_0 \in F$ et $c > 0$ tel que $\mathrm{B}_F(y_0,4c) \subset \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$. En particulier, on a $y_0 \in \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$ où ce dernier ensemble est symétrique par linéarité de T, donc $-y_0 \in \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$. Finalement, un passage à la limite donne

$$\mathrm{B}_F(0,4c) = -y_0 + \mathrm{B}_F(y_0,4c) \subset \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))} + \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))} = 2\overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))},$$

donc $\mathrm{B}_F(0,2c) \subset \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$.

Montrons que $\mathrm{B}_F(0,c) \subset T(\mathrm{B}_E(0,1))$. Soit $y \in \mathrm{B}_F(0,c)$. On cherche $x \in \mathrm{B}_E(0,1)$ tel que $y = T(x)$. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\|x_n\|_E < 2^{-n} \quad \text{et} \quad \|y - T(x_1 + \cdots + x_n)\|_F \leqslant c2^{-n}. \tag{$*$}$$

Pour $n = 1$, on a $2y \in \mathrm{B}_F(0,2c) \subset \overline{T(\mathrm{B}_E(0,1))}$, donc il existe $\tilde{x}_1 \in \mathrm{B}_E(0,1)$ tel que $\|2y - T(\tilde{x}_1)\|_F \leqslant c$. Alors le vecteur $x_1 \coloneqq \tilde{x}_1/2$ satisfait les relations voulues. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose avoir construit $x_1, \ldots, x_n$. Par hypothèse, on a $2^{n+1}[y - T(x_1 + \cdots + x_n)] \in \mathrm{B}_F(0,2c)$. D'après le paragraphe précédent, il existe $\tilde{x}_{n+1} \in \mathrm{B}_E(0,1)$ tel que

$$\|2^{n+1}[y - T(x_1 + \cdots + x_n)] - T(\tilde{x}_1)\| \leqslant c.$$

Alors le vecteurs $x_{n+1} \coloneqq \tilde{x}_{n+1}/2^{n+1}$ satisfait également les relations. D'où l'existence d'une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

La série $\sum x_n$ converge absolument. Comme E est complet, la somme $x \coloneqq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est bien définie et, en passant à la limite dans la relation $(*)$ et en utilisant la continuité de T, on a $T(x) = y$. De plus, on a

$$\|x\|_E \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_E < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - 1/2} = 1,$$

donc $x \in \mathrm{B}_E(0,1)$. $\square$

THÉORÈME 4.5 *(d'isomorphisme de BANACH).* Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces de BANACH et $T \in \mathscr{L}_c(E, F)$ une application linéaire bijective. Alors T^{-1} est continue.

Preuve Le théorème de l'application ouverte affirme qu'il existe $c > 0$ tel que $\mathrm{B}_F(0, c) \subset T(\mathrm{B}_E(0, 1))$. Comme l'application T^{-1} est linéaire, il suffit d'exhiber un réel de continuité pour T^{-1}. Soit $y \in F \setminus \{0\}$. Alors $cy/2 \|y\|_F$ appartient à $\mathrm{B}_F(0, c)$, donc il existe $\tilde{x} \in \mathrm{B}_E(0, 1)$ tel que

$$\frac{cy}{2 \|y\|_F} = T(\tilde{x}), \quad \text{donc} \quad T^{-1}(y) = \frac{2 \|y\|_F}{c} \tilde{x}.$$

En passant à la norme, on a

$$\|T^{-1}(y)\| = \frac{2 \|y\|_F}{c} \|\tilde{x}\|_E < \frac{2}{c} \|y\|_F$$

ce qui montre la continuité de T^{-1}. □

APPLICATION AUX SÉRIES DE FOURIER. L'application linéaire continue et injective

$$\mathscr{F} : \left| \begin{array}{rcl} (\mathrm{L}^1(]0, 2\pi[, \mathbb{C}), \| \ \|_1) & \longrightarrow & (c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \| \ \|_\infty), \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

n'est pas surjective.

◇ REMARQUE. Il existe au moins une suite de $\mathbb{C}$ tendant vers 0 qui n'est pas la suite des coefficients de FOURIER d'une fonction L^1. Par exemple, on peut montrer que $(1/\ln(1+|n|))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une telle suite, mais c'est calculatoire.

Preuve Par l'absurde, supposons que l'application $\mathscr{F}$ est surjective. Alors c'est une bijection linéaire et continue entre deux espaces complet. D'après le théorème d'isomorphisme de BANACH, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathrm{L}^1(]0, 2\pi[, \mathbb{C}), \quad \|f\|_1 \leqslant M \|(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}\|_\infty .$$

En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le noyau de DIRICHLET vérifie $\|D_N\|_1 \leqslant M$. Or $\|D_N\|_1 \longrightarrow +\infty$ ce qui est impossible. □

Chapitre 5
Topologie faible dans les espaces de Hilbert

5.1 Suites faiblement convergentes

Définition 5.1. Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge faiblement vers un élément $f \in H$ si

$$\forall g \in H, \quad \langle f_n, g\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle.$$

On note alors $f_n \longrightarrow f$.

Proposition 5.2 *(unicité)*. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H et $f, f' \in H$. On suppose que $f_n \rightharpoonup f$ et $f_n \rightharpoonup f'$. Alors $f = f'$.

Preuve Pour tout $g \in H$, on a

$$\langle f - f', g\rangle = \langle f, g\rangle - \langle f', g\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, g\rangle - \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, g\rangle = 0.$$

Avec $g := f - f'$, on obtient que $\|f - f'\|^2 = 2$, donc $f = f'$. □

▷ Exemples. – La suite $(e_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{int} \in \mathbb{N})_{n\in\mathbb{Z}}$ de $H := \mathrm{L}^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ converge-t-elle faiblement ? Pour tout $g \in H$, comme $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, on a $\langle g, e_n\rangle = c_n(g) \longrightarrow 0$. Donc $e_n \rightharpoonup 0$.

– Dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, la base canonique converge faiblement vers 0.

– Plus généralement, toute base hilbertienne de H converge faiblement vers 0. Cependant, ces exemples ne convergent pas pour la norme associée au produit scalaire car ces suites ne sont pas de Cauchy.

Proposition 5.3. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H et $f \in H$. Alors

1. si $f_n \to f$, alors $f_n \rightharpoonup f$;
2. si $f_n \rightharpoonup f$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|f\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$;
3. $f_n \to f$ si et seulement si $f_n \rightharpoonup f$ et $\|f_n\| \to \|f\|$;
4. si $f_n \to f$ et $g_n \rightharpoonup g$, alors $\langle f_n, g_n\rangle \to \langle f, g\rangle$;
5. si $f_n \rightharpoonup f$, alors $f \in C := \mathrm{Adh}_{\|\ \|}(\mathrm{Conv}\,\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

Preuve 1. Le premier point découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$T_n : \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{K}, \\ g \longmapsto \langle f_n, g\rangle \end{array} \right.$$

est un forme linéaire continue telle que $\|T_n\|_{\mathscr{L}_c(H,\mathbb{K})} = \|f_n\|$. De plus, pour tout $g \in H$, la suite $(T_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$. Comme H est complet, le théorème de Banach-Steinhaus assure que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(H,K)} < +\infty.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $\|f_{\psi(n)}\| \to \ell := \liminf_{p\to+\infty} \|f_p\|$. Alors

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f, f_{\psi(n)}\rangle \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|f\|\,\|f_{\psi(n)}\| \leqslant \|f\|\,\ell.$$

3. Le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose que $f_n \rightharpoonup f$ et $\|f_n\| \to \|f\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\langle f, f_n\rangle \longrightarrow \|f\|^2 + \|f\|^2 - 2\langle f, f\rangle = 0.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| &= |\langle f_n - f, g\rangle + \langle f, g_n - g\rangle| \\ &\leqslant \|f_n - f\|\,\|g_n\| + |\langle f, g_n - g\rangle| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par le point 2.

5. La partie C est un converge fermé de $(H, \| \|)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème de projection donne

$$\operatorname{Re}\langle f - P_C(f), f_n - P_C(f)\rangle < 0.$$

En laissant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $f = P_C(f) \in C$. □

◇ Remarque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{L}^2(]0,1[)$ et $f \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$. Quel lien y-a-t-il entre

$$\text{(i)}\colon f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(]0,1[)} f \quad \text{et} \quad \text{(ii)}\colon f_n \xrightarrow{\mathscr{D}'(]0,1[)} f\ ?$$

Comme $\mathscr{C}_c^\infty(]0,1[) \subset \mathrm{L}^2(]0,1[)$, on a l'implication (i) ⇒ (ii). Cependant, la réciproque est fausse. En effet, on considère la suite $(n\mathbb{1}_{[1/n,2/n]})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Elle converge au sens des distribution vers 0 puisque un compact de $]0,1[$ contient un nombre fini de réels $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Cependant, on a $\|f_n\|_2 = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$, donc elle ne converge pas faiblement dans $\mathrm{L}^2(]0,1[)$.

5.2 Compacité faible

Théorème 5.4. Soient H un espace de Hilbert séparable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. Alors cette suite admet une sous-suite qui converge simplement vers un élément de H.

Preuve Soit $\{h_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ une partie dense dans H. Par une extraction diagonale, il existe une extraction ψ telle que la suite $(\langle h_k, f_{\psi(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrons que, pour tout $g \in H$, la suite $(\langle g, f_{\psi(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela, montrons qu'elle est de Cauchy. Soient $g \in H$ et $\varepsilon > 0$. Par la densité, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - h_K\| < \varepsilon/4M$ avec $M \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|$. D'après le cas précédent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \geqslant n_0, \quad |\langle h_K, f_{\psi(p)} - f_{\psi(q)}\rangle| < \varepsilon/2.$$

Soient $p, q \geqslant n_0$. L'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \left|\langle g, f_{\psi(p)} - f_{\psi(q)}\rangle\right| &\leqslant |\langle g - h_K, f_{\psi(p)} - f_{\psi(q)}\rangle| + |\langle h_K, f_{\psi(p)} - f_{\psi(q)}\rangle| \\ &\leqslant \|g - h_K\| \, \|f_{\psi(p)} - f_{\psi(q)}\| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\langle g, f_{\psi(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ce qui permet de définir $L(g) \coloneqq \lim_{n\to+\infty}\langle g, f_{\psi(n)}\rangle$.

Par l'inégalite de Cauchy-Schwarz, l'application $L\colon H \to \mathbb{K}$ est continue. Le théorème de représentation de Riesz affirme qu'il existe $f \in H$ tel que

$$\forall g \in H, \quad L(g) = \langle g, f\rangle.$$

Finalement, cela montre que la suite $(\langle g, f_{\psi(n)}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f. □

◇ Remarque. Le théorème est encore vrai sans l'hypothèse de séparabilité. En effet, le sous-espace vectoriel fermé $\tilde{H} \coloneqq \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ est séparable. Le théorème du supplémentaire orthogonal assure que $H = \tilde{H} \oplus \tilde{H}^\perp$. Soit ψ une extraction telle que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $\tilde{H}$. Pour tout $g = \tilde{g} + g_\perp$, on a

$$\langle g, f_{\psi(n)}\rangle = \langle \tilde{g}, f_{\psi(n)}\rangle \longrightarrow \langle \tilde{g}, f\rangle = \langle g, f\rangle.$$

5.3 Application en optimisation

Proposition 5.5. Soient H un espace de Hilbert séparable, $J \in \mathscr{C}^1(H, \mathbb{R})$ une application convexe coercive et C un convexe fermé non vide de H. Alors il existe $x_* \in C$ tel que $J(x_*) = \min_C J$.

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $J(x_n) \longrightarrow m \coloneqq \inf_C J$. Alors il existe $A > 0$ tel que $J(x_n) \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la coercivité, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall x \in H, \quad \|x\| \geqslant R \quad \Longrightarrow \quad J(x) > A.$$

Alors $\|x_n\| \leqslant R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème précédent, il existe une extraction ψ et $x_* \in H$ tel que $x_{\psi(n)} \rightharpoonup x_*$ De plus, on a $x_* \in \overline{\mathrm{Conv}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subset C$. Comme J est de classe $\mathscr{C}^1$ et convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$m \longleftarrow J(x_{\psi(n)}) \geqslant J(x_*) + \langle \nabla J(x_*), x_{\psi(n)} - x^*\rangle \longrightarrow J(x_*),$$

donc $J(x_*) \leqslant m$. Nécessairement, on a $J(x_*) = m$. □

Chapitre 6

Extrema liés & sous-variétés

6.1 Théorème des extrema liés

Théorème 6.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f_1, \dots, f_k \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $x^0 \in U$ tels que $(\mathrm{d}f_1(x^0), \dots, \mathrm{d}f_k(x^0))$ soit libre. On pose

$$N \coloneqq \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}.$$

Soit $g \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ tel que $g|_N$ admette un extremum local en x^0. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$dg(x^0) = \lambda_1\, df_1(x^0) + \dots + \lambda_k\, df_k(x^0).$$

◇ Remarque. Les réels λ_1, …, λ_k sont appelés les *multiplicateurs de* Lagrange de g.

Preuve On considère l'application de classe $\mathscr{C}^1$

$$F \colon \left| \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^k, \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)). \end{array} \right.$$

Sa différentielle en x^0 vérifie

$$dF(x^0) \colon \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \\ h \longmapsto (df_1(x^0) \cdot h, \dots, df_k(x^0) \cdot h) \end{array} \right.$$

et elle est surjective par hypothèse. Le théorème du rang donne que le sous-espace vectoriel

$$E_1 \coloneqq \operatorname{Ker} dF(x^0) = \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} df_j(x^0)$$

est de dimension $n - k$. Soit E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$. On décompose $x^0 = x_1^0 + x_2^0$ dans cette somme directe. L'application

$$\tilde{F} \colon \left| \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}^k, \\ (x_1, x_2) \longmapsto F(x_1 + x_2). \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa différentielle

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \colon \left| \begin{array}{l} E_2 \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ h_2 \longmapsto dF(x^0) \cdot h_2 \end{array} \right.$$

est injective et, comme $\dim E_2 = k$, est bijective. Le théorème des fonctions implicites assure qu'il existe un voisinage V de x_1^0 dans E_1, un voisinage W de x_2^0 dans E_0 et $\varphi \in \mathscr{C}^1(V, W)$ tels que

$$[(x_1, x_2) \in V \times W \quad \text{et} \quad 0 = \tilde{F}(x_1, x_2) = F(x_1 + x_2)] \iff [x_1 \in V \text{ et } x_2 = \varphi(x_1)].$$

De plus, on a

$$d\varphi(x_1^0) = -\Big[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)\Big]^{-1} \circ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0).$$

En particulier, pour tout $h_1 \in E_1$, on a $d\varphi(x_1^0) \cdot h_1 = 0$ car

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot h_1 = dF(x^0) \cdot h_1 = 0.$$

Par hypothèse, l'application

$$\left| \begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_1 \longmapsto g(x_1 + \varphi(x_1)) \end{array} \right.$$

est extremale en x. De plus, pour tout $h_1 \in E_1$, on a

$$0 = dg(x_1^0 + \varphi(x_1^0)) \cdot (h_1 + d\varphi(x_1^0) \cdot h_1) = dg(x^0) \cdot h_1 = 0.$$

On en déduit que

$$\bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{Ker} df_j(x^0) \subset \operatorname{Ker} dg(x^0).$$

Considérons le lemme suivant qui permettra de conclure.

LEMME 6.2. Soient L_1, …, L_k et T des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que la famille $(L_1, \dots, L_k)$ soit libre et

$$\bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{Ker} L_j \subset \operatorname{Ker} T.$$

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $T = \lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_k L_k$.

Par le théorème de représentation de RIESZ, il existe $v_1, \dots, v_k, w \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$L_j(x) = \langle v_j, x\rangle \quad \text{et} \quad T(x) = \langle w, x\rangle$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $i \in [\![1, k]\!]$. Alors la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$. Montrons que $w \in \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$. C'est évident si $k \geqslant n$. Supposons que $k \leqslant n-1$. On considère l'application

$$u\colon \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \\ \quad x \longmapsto (T(x), L_1(x), \dots, L_k(x)) = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}w, {}^{\mathrm{t}}v_1, \dots, {}^{\mathrm{t}}v_k)x \end{array}\right.$$

satisfait

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} T \cap \bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{Ker} L_j = \bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{Ker} L_j$$

qui est de dimension $n-k$, donc le rang de u est $\operatorname{rg} u = n - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant n-(n-k) = k$. Ainsi les $k+1$ lignes de la matrice de u dans la base canonique sont liées. Comme les k dernières sont libres, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que ${}^{\mathrm{t}}w = \lambda_1 {}^{\mathrm{t}}v_1 + \dots + \lambda_k {}^{\mathrm{t}}v_k$ ce qui montre le lemme. $\square$

EXERCICE 6.1. On considère l'application

$$g\colon \left|\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2. \end{array}\right.$$

1. Trouver ses points critiques.
2. Admet-elle des minima ? des maxima ? rien ?
3. On pose $N \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4\}$. Montrer qu'il existe $(x_*, y_*) \in N$ tel que $g(x_*, y_*) = \min_N g$. Calculer explicitement (x_*, y_*) et $\min_N g$.

▷ 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \nabla g(x,y) = 4\begin{pmatrix} x^3 - x + y \\ y^3 + x - y \end{pmatrix} = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} y = x - x^3, \\ x = y - y^2 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} y = x - x^3, \\ 0 = x^3(1 + (1-x^2)^3) \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} y = x - x^3, \\ x \in \{0, \pm\sqrt{2}\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors la fonction g admet trois points critiques sur $\mathbb{R}^2$, à savoir $(0, 0)$ et $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la hessienne de g est

$$\operatorname{Hess}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la hessienne au point $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$$\operatorname{Hess}_g(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

est positive car sa trace vaut $10 > 0$ et son déterminant vaut $24 > 0$. On en déduit que ce point $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum local. Par symétrie, le point $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est aussi un minimum local. Enfin, la hessienne A au point $(0, 0)$ admet 0 comme valeur propre, donc on ne peut pas conclure sur la nature du point $(0, 0)$ en utilisant uniquement la hessienne. On remarque que $\operatorname{Sp} A = \{0, -2\}$. On note $v_0 \in \mathbb{R}^2$ et $v_{-2} \in \mathbb{R}^2$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres 0 et -2. Un développement de TAYLOR donne

$$g(tv_{-1}) = g(0) + dg(0) \cdot tv_{-1} + \frac{1}{2}\, d^2 g(0) \cdot (tv_{-1}, tv_{-1}) + o(\|tv_{-1}\|^2)$$

$$= g(0) + \frac{t^2}{2}\langle \mathrm{Hess}_g(0,0)v_{-1}, v_{-1}\rangle + o(t^2)$$
$$= g(0) - \frac{t^2}{2}\|v_{-1}\|^2 + o(t^2) < g(0)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ assez proche de 0, donc $(0,0)$ n'est pas un minimum local de g. Pour tout $t > 0$, on a $g(t,t) = 2t^2 > 0$, donc $(0,0)$ n'est pas un maximum local de g.

3. L'ensemble N est compact et l'application g est continue, donc elle atteint son infimum. On applique le théorème des extrema liés avec $n = 2$, $k = 1$ et $f(x,y) \coloneqq x^4 + y^2 - 1$. Pour tout $(x,y) \in N$, on a

$$\nabla f(x,y) = (4x^3, 4y^3) \neq 0.$$

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla g(x_*, y_*) = \lambda \nabla f(x_*, y_*)$. Le point (x_*, y_*) est solution du système

$$\begin{cases} x^3 - x + y = \lambda x^3, \\ y^3 + x - y = \lambda y^3, \\ \quad x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

On note $\mu \coloneqq \lambda - 1$. Le système se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} y = \mu x^3 + x, \\ x = \mu y^3 + y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

– On suppose que $\mu \neq 0$. Alors $x = -y$ et $2x^4 = 1$, donc

$$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \quad \text{et} \quad g(x,y) = 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

– On suppose que $\mu = 0$. Alors $x = y$ et $2x^4 = 1$, donc

$$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \quad \text{et} \quad g(x,y) = 1.$$

En conclusion, on a $(x_*, y_*) = (\pm 1/\sqrt[4]{2}, \mp 1/\sqrt[4]{2})$ et $g(x_*, y_*) = 1$.

6.2 Sous-variétés

6.2.1 Définitions équivalentes

Définition 6.3. Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Une partie N de $\mathbb{R}^n$ est une *sous-variété* de dimension k et de classe $\mathscr{C}^p$ s'il existe $x_0 \in N$ et un voisinage W de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant une des quatre définitions équivalentes :

(i) il existe un difféomorphisme local $\varphi \in \mathscr{C}^p(W, \mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que (carte locale)

$$\varphi(N \cap W) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \cap \varphi(W) ;$$

(ii) il existe $u \in \mathscr{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que (graphe)

$$N \cap W = \{A(z, u(z)) \mid z \in \mathbb{R}^k\} \cap W ;$$

(iii) il existe $F \in \mathscr{C}^p(W, \mathbb{R}^{n-k})$ telle que la différentielle $dF(x_0)$ soit surjective et $N \cap W = F^{-1}(\{0\})$; (équation)

(iv) il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et $j \in \mathscr{C}^p(U, \mathbb{R}^n)$ tels que $j(0) = x_0$, la différentielle $dj(0)$ soit injective et j soit une bijection bicontinue de U sur $N \cap W$. (nappe paramétrée)

▷ Exemples. – Montrons que la parabole $P \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ est une sous-variété de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^\infty$ en vérifiant chacune des définitions.

(i) L'application $\varphi \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x, y - x^2) \in \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifie $\varphi(P) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Comme pour tout $(x,y) \in P$, la matrice

$$\mathrm{J}_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, le théorème d'inversion local affirme que cette application est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme au voisinage de (x_0, y_0). Donc c'est bien une carte locale.

(ii) La parabole P est le graphe de la fonction $u \colon x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(iii) L'application $F \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y - x^2 \in \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifie $P = F^{-1}(\{0\})$. De plus, pour tout $(x_0, y_0) \in P$, la différentielle

$$dF(x_0, y_0) \colon (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto h_1 - 2x_0 h_2 \in \mathbb{R}$$

est bien surjective : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $dF(x_0, y_0) \cdot (0, \alpha) = \alpha$.

(iv) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. L'application $j\colon z \in \mathbb{R} \longmapsto (x_0 + z, (x_0 + z)^2) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifie $j(0) = x_0$. De plus, on a $j'(0) = (1, 2x_0) \neq 0$, donc la différentielle $dj(0)\colon h \in \mathbb{R} \longmapsto hj'(0) \in \mathbb{R}$ est injective. Enfin, l'application j est bien une bijection et elle est bicontinue car $j^{-1}(x_1, y_1) = x_1 - x_0$.

– Montrons que la sphère $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une sous-variété par le point (i). On fixe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$. On pose

$$\varphi\colon \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, x^2 + y^2 + z^2 - 1). \end{array}\right.$$

Si $z_0 > 0$, alors l'application φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^3$, sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$, en (x_0, y_0, z_0) d'après le théorème d'inversion locale. De même si $z_0 < 0$. En considérant un autre $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ, on procède de même si $y_0 \neq 0$ et $x_0 \neq 0$.

Preuve des équivalences • *De la carte locale à une équation.* Soit $x_0 \in N$. Soient W un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^n$ un $\mathscr{C}^p$-difféomorphisme locale tels que $\varphi(N \cap W) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \varphi(W)$. Pour $j \in [\![1, n-k]\!]$, on note $v_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la projection sur la $k+i$-ième coordonnées. Alors l'application

$$F\colon \left|\begin{array}{rcl} W & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-k}, \\ x & \longmapsto & (v_1(\varphi(x)), \dots, v_{n-k}(\varphi(x)) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^p$ et vérifie bien $N \cap W = F^{-1}(\{0\})$. Montrons que $dF(x_0)$ est surjective. Le théorème des fonctions composées donne

$$dF(x_0)\colon \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-k}, \\ h & \longmapsto & (v_1(d\varphi(x_0) \cdot h), \dots, v_{n-k}(d\varphi(x_0) \cdot h)). \end{array}\right.$$

Soit $\tilde{v} \in \mathbb{R}^{n-k}$. Comme φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de x_0, la différentielle $d\varphi(x_0)$ est une bijection, donc il existe $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $d\varphi(x_0) \cdot h = (0, \tilde{v})$, donc $dF(x_0) \cdot h = \tilde{v}$. Cela montre la surjectivité de $dF(x_0)$.

• *De l'équation à un graphe.* Soit $x_0 \in N$. Soient W un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $F\colon W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathscr{C}^p$ tels que $dF(x_0)$ soit surjective et $N \cap W = F^{-1}(\{0\})$. L'ensemble $E_1 := \operatorname{Ker}[dF(x_0)]$ est un sous-espace vectoriel de dimension k. Soit E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ les projections de x sur E_1 et E_2. L'ensemble

$$\tilde{W} := \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid x_1 + x_2 \in W\}$$

est un ouvert de $E_1 \times E_2$ comme une image réciproque de W par l'application continue $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$. L'application

$$\tilde{F}\colon \left|\begin{array}{rcl} \tilde{W} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-k}, \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & F(x_1 + x_2) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^p$ et la dérivée partielle $\partial_{x_2}\tilde{F}(x_0)$ est une bijection de E_2 dans $\mathbb{R}^{n-k}$. Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un voisinage ouvert V_1 de x_{01} dans E_1, d'un voisinage ouvert V_2 de x_{02} dans E_2 et d'une application $u \in \mathscr{C}^1(V_1, V_2)$ tels que $V_1 \times V_2 \subset \tilde{W}$ et

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \qquad [(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ et } \tilde{F}(x_1, x_2) = 0] \iff [x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1)].$$

• *Du graphe à une carte locale.* Soit $x_0 \in N$. Soient W un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathscr{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que $N \cap W = \{(z, u(z)) \mid z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$. On peut bien se ramener au cas $A = I_n$ quitte à changer de coordonnées. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x_1 \in \mathbb{R}^k$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ les projections de x sur $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{n-k}$. Alors l'application

$$\varphi\colon \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ x & \longmapsto & (x_1, x_2 - u(x_1)) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^p$ et vérifie $\varphi(N \cap W) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \varphi(W)$. De plus, pour tous $h, v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$v = d\varphi(x_0) \cdot h = (h_1, h_2 - du(x_{01}) \cdot h_1) \iff \begin{cases} h_1 = v_1, \\ h_2 = v_2 + du(x_{01}) \cdot v_1. \end{cases}$$

Donc la différentielle $d\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Le théorème d'inversion locale permet alors de conclure que l'application φ est un $\mathscr{C}^p$-difféomorphisme locale de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de 0.

• *Du graphe à une nappe paramétrée.* Soit $x_0 \in N$. Soient W un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathscr{C}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que $N \cap W = \{(z, u(z)) \mid z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$. Alors il existe $z_0 \in \mathbb{R}^k$ tel que $x_0 = (z_0, u(z_0))$. L'ensemble

$$U := \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^k \mid (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})) \in W\}$$

est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$. Alors l'application

$$j\colon \left|\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & N \cap W, \\ \tilde{z} & \longmapsto & (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^p$ et vérifie $j(0) = (z_0, u(z_0)) = x_0$. De plus, pour tout $h \in \mathbb{R}^k$, on a $dj(0) \cdot h = (h, du(z_0) \cdot h)$, donc la différentielle $dj(0)$ est injective. Enfin, l'application j est bien injective sur U, elle est surjective de U dans $N \cap W$ et sa réciproque

$$j^{-1}\colon \left|\begin{array}{l} W \cap N \longrightarrow U \\ (z, u(z)) \longmapsto z - z_0 \end{array}\right.$$

est continue. On en déduit que l'application j est une bijection bicontinue de U dans $N \cap W$.

• *De la nappe paramétrée à un graphe.* Soit $x_0 \in N$. Soient W un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et $j \in \mathscr{C}^p(U, \mathbb{R}^n)$ tels que $j(0) = x_0$, la différentielle $dj(0)$ soit injective et j soit une bijection bicontinue de U sur $N \cap W$. L'ensemble $E_1 := \mathrm{Im}[dj(0)]$ est un sous-espace vectoriel de dimension k. Soit E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$. On note $p_1\colon \mathbb{R}^n \to E_1$ et $p_2\colon \mathbb{R}^n \to E_2$ les projections sur E_1 et E_2. L'application

$$f\colon \left|\begin{array}{l} U \longrightarrow E_1 \\ z \longmapsto p_1(j(z)) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^p$ et, pour tout $h \in \mathbb{R}^k$, on a

$$df(0) \cdot h = p_1(dj(0) \cdot h)$$

ce qui fait de la différentielle $df(0)$ une bijection de $\mathbb{R}^k$ dans E_1. Le théorème des fonctions implicites assure alors qu'il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et un voisinage ouvert V_1 de $p_1(x_0)$ dans E_1 tels que f soit un $\mathscr{C}^p$-difféomorphisme de V_0 dans V_1. L'ensemble $\tilde{W} := j(V_0)$ est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ contenu dans W. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} x \in N \cap \tilde{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists z \in V_0, \quad x = j(z) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists z \in V_0, \quad p_1(x) = p_1(j(z)) \text{ et } p_2(x) = p_2(j(z)) \\ &\Longleftrightarrow \quad p_1(x) \in V_1,\ z = f^{-1}(p_1(x)) \text{ et } p_2(x) = p_2(j(z)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \in V_1, \quad x = x_1 + p_2(j \circ f^{-1}(x_1)). \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble N est localement le graphe de l'application $x_1 \longmapsto j \circ f^{-1}(x_1)$ de classe $\mathscr{C}^p$. $\square$

6.2.2 Espace tangent

Définition 6.4. Soient N une sous-variété de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$. On appelle *espace tangent* à N en x_0 l'ensemble $\mathrm{T}_{x_0}N$ des vecteurs $\gamma'(0)$ pour des fonctions $\gamma \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ définies sur un intervalle ouvert contenant 0 et vérifiant $\gamma(I) \subset N$ et $\gamma(0) = x_0$. Une telle fonction γ est appelée un *chemin* de I.

◇ Remarque. Il est clair que, si N est un ouvert d'une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{T}_{x_0}N$ coïncident avec ce sous-espace vectoriel pour tout $x_0 \in N$.

Il n'est pas clair qu'avec cette définition, l'espace tangent est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mais on peut le caractériser en terme de carte, graphe, équation et nappe et cette reformulation rend mieux compte de sa structure d'espace vectoriel.

Proposition 6.5. En reprenant les notations de la définition 6.3, on a

carte locale $\mathrm{T}_{x_0}N = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) = d\varphi^{-1}[\varphi(x_0)](\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$;

graphe $\mathrm{T}_{x_0}N = \{A(h, du(z_0) \cdot h) \mid h \in \mathbb{R}^k\}$ où le vecteur $z_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifie $x_0 = A(z_0, u(z_0))$;

équation $\mathrm{T}_{x_0}N = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$;

nappe paramétrée $\mathrm{T}_{x_0}N = \mathrm{Im}[dj(0)]$

Preuve • *Caractérisation par les cartes locales.* Procédons par double inclusion. Soit $v \in \mathrm{T}_{x_0}N$. Alors il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma'(0) = v$, $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(I) \subset N$. Alors $\beta := \varphi \circ \gamma$ est un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Or le théorème des fonctions composée donne $\beta'(0) = d\varphi(x_0) \cdot v$ ce qui permet d'écrire que $v = d\varphi(x_0)^{-1} \cdot \beta'(0) \in d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$.

Réciproquement, soit $v \in d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$. Il existe $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ tel que $v = d\varphi(x_0)^{-1} \cdot w$. Comme $\varphi(W)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W)$ pour tout $t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$. Alors

$$\gamma\colon \left|\begin{array}{l} \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \qquad t \longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tw) \end{array}\right.$$

est un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans N tel que $\gamma(0) = x_0$, donc $\mathrm{T}_{x_0}N \ni \gamma'(0) = .\, d\varphi^{-1}(x_0) \cdot w = v$.

• *Caractérisation par les nappes paramétrées.* Soit $v \in \mathrm{T}_{x_0}N$. Alors il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma'(0) = v$, $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(I) \subset N$. Quitte à réduire I, on peut supposer que $\gamma(I) \subset N \cap W$.

Alors $\beta\colon t \in I \longmapsto j^{-1} \circ \gamma(t)$ est un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et il vérifie $\beta(0) = 0$, donc $\beta'(0) \in \mathrm{T}_0 U = \mathbb{R}^k$ car U est un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Or $\beta'(0) = dj^{-1}(0) \cdot \gamma'(0) = dj(0)^{-1} \cdot v$, donc $v = dj(0) \cdot \beta'(0) \in \mathrm{Im}[dj(0)]$.

Réciproquement, soit $v \in \mathrm{Im}[dj(0)]$. Il existe $w \in U \subset \mathbb{R}^k$ tel que $v = dj(0) \cdot w$. Comme U est un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $tw \in U$ pour tout $t \in \,]-\delta, \delta[$. Alors l'application $\gamma\colon t \in \,]-\delta, \delta[\longmapsto j(tw) \in \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$, à valeurs dans $N \cap W$ et vérifie $\gamma(0) = j(0) = x_0$. Alors $\mathrm{T}_{x_0} N \ni \gamma'(0) = dj(0) \cdot w = v$.

• *Caractériser par les graphes.* Quitte à changer de coordonnées, on se ramène au cas $A = I_n$. Dans la preuve de l'équivalence entre les différentes définitions, on a construit à partir de u une nappe paramétrée

$$j\colon \left| \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \qquad \tilde{z} \longmapsto (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})). \end{array} \right.$$

On sait alors que $\mathrm{T}_{x_0} N = \mathrm{Im}[dj(0)]$. Or $dj(0) \cdot h = (h, du(z_0) \cdot h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, donc

$$\mathrm{T}_{x_0} N = \{(h, du(z_0) \cdot h) \mid h \in \mathbb{R}^k\}.$$

• *Caractérisation par les équations.* Dans la preuve de l'équation des définitions, on a construit une application u dont N est localement le graphe, *i. e.*

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \qquad [(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ et } F(x_1 + x_2) = 0] \quad \Longleftrightarrow \quad [x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1)].$$

On sait alors que $\mathrm{T}_{x_0} N = \{h + du(x_{01}) \cdot h \mid h \in E_1\}$. Par ailleurs, le théorème des fonctions implicites donne

$$\begin{aligned} du(x_{01}) &= -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2}(x_0)^{-1} \circ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1}(x_0) \\ &= -[dF(x_0) \circ p_2]^{-1} \circ [dF(x_0) \circ p_1] \end{aligned}$$

où p_1 est la projection sur $E_1 = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$ parallèlement à E_2 et p_2 est la projection sur E_2 parallèlement à E_1. Par conséquent, on a $dF(x_0) \cdot p_1 = 0$, donc $du(x_{01}) = 0$. On en déduit que $\mathrm{T}_{x_0} N = E_1 = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$. ☐