Dernière édition : 19 octobre 2020 Notes prises par Téofil ADAMSKI

FONCTIONS HOLOMORPHES & FONCTIONS SPÉCIALES

(FHFS)

Guy CASALE

M1 maths fonda Université de Rennes 1

Chapitre 1

Rappels et compléments

VOCABULAIRE. On appelle *domaine* d'une espace vectoriel normé E tout ouvert connexe de E.

NOTATION.

- Pour $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, on note $\mathrm{D}(z_0, r) \subset \mathbf{C}$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r et $\mathrm{D}^*(z_0, r) := \mathrm{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.
- En particulier, on note $\mathbb{D} := \mathrm{D}(0,1)$ et $\mathbf{S}^1 := \partial\mathbb{D}$. De plus, on note $\mathbb{H} := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.
- Pour un domaine U de $\mathbf{C}$, on note $\mathscr{O}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes $U \to \mathbf{C}$.

1.1 Caractérisation de l'holomorphie

DÉFINITION 1.1. Soit U un domaine de $\mathbf{R}^2$. Une fonction $f : U \to \mathbf{R}^2$ est dite *conforme* si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et préserve les angles.

NOTATION. Pour toutes parties $U \subset \mathbf{C}$ et $\Omega \subset U$, on notera $\Omega \Subset U$ si $\overline{\Omega} \subset U$.

PROPOSITION 1.2. Soient U un domaine de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction f est $\mathbf{C}$-dérivable sur U ;

(ii) pour tout disque ouvert $D \subset U$, il existe une fonction holomorphie $F : D \to \mathbf{C}$ telle que $F' = f$;

(iii) en notant $u := \operatorname{Re} f$ et $v := \operatorname{Im} f$, on a $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$; (équation de CAUCHY-RIEMANN)

(iv) on a $\overline{\partial} f = 0$ où $\overline{\partial} f := \frac{1}{2}(\partial_x u + i\partial_y v)$;

(v) soit la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et il existe un ensemble discret $S \subset E$ telle que la fonction $f|_{U \setminus S}$ soit conforme, soit elle est constante ;

(vi) la fonction f est continue et, pour tout disque $D \Subset U$ et pour tout lacet $\gamma : [0,1] \to D$, on a

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \; ; \qquad \text{(lemme de GOURSAT)}$$

(vii) la fonction f est continue et, pour tous disque $D \Subset U$, on a

$$\forall z \in U, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \; ; \qquad \text{(formule intégrale de CAUCHY)}$$

(viii) la fonction f est dérivable en série entière au voisinage de tout point de U.

▷ EXEMPLE. La fonction $z \in \mathbf{C} \longmapsto z^2$ est conforme.

1.2 Compléments

THÉORÈME 1.3 *(*GREEN-RIEMANN*)*. Soit U un domaine de $\mathbf{C}$. Soient $\omega_1, \omega_2 : U \to \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\Omega \Subset U$ un ouvert à bord lisse. Alors

$$\int_{\partial\Omega} \omega_1\,\mathrm{d}x + \omega_2\,\mathrm{d}y = \int_\Omega (\partial_x \omega_2 - \partial_y \omega_1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et

$$\forall f \in \mathscr{O}(\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i \int_\Omega \overline{\partial} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

PROPOSITION 1.4 *(formule de* CAUCHY *généralisée)*. Soit U un domaine de $\mathbf{C}$. Soient $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $\Omega \Subset U$ un ouvert à bord lisse. Alors pour tout $z \in U$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

où on a noté $\zeta = \xi + i\eta$.

Preuve Soient $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \Omega$. On pose $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\mathrm{D}}(z_0, \varepsilon)$. On applique le théorème de GREEN-RIEMANN à la fonction holomorphe $\zeta \longmapsto f(\zeta) - f(z_0)$ et on obtient

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta = 2i \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\overline{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}\eta.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta &= \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} - \int_{\partial\Omega} \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta - \int_{\partial\mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} - 2i\pi f(z_0) - \int_{\partial\mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

car $\mathrm{Ind}_{\partial\Omega}(z_0) = 1$. On peut montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée que

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta \quad \text{et} \quad \int_{\partial\mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Ceci montre le théorème □

THÉORÈME 1.5 *(d'holomorphie des intégrales).* Soient U un domaine de $\mathbf{C}$, X un intervalle de $\mathbf{R}$ et $F\colon U \times X \to \mathbf{C}$ telle que

- pour tout $z \in U$, la fonction $t \longmapsto F(z, t)$ soit intégrale sur X ;
- pour tout $t \in X$, la fonction $z \longmapsto F(z, t)$ est holomorphe ;
- pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable $\varphi\colon K \to \mathbf{R}$ telle que $|F(z, t)| \leqslant \varphi(t)$ pour tous $z \in U$ et $t \in K$.

Alors la fonction $z \in U \longmapsto f(z) := \int_X F(z, t) \,\mathrm{d}t$ est holomorphe et, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $z \in U$, on a

$$\int_X \partial^n_{z^n} F(z, t) \,\mathrm{d}t = f^{(n)}(z).$$

Chapitre 2
SINGULARITÉS ISOLÉES ET DÉVELOPPEMENT DE LAURENT

2.1 SINGULARITÉS ISOLÉES

DÉFINITION 2.1. Soient $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Pour une fonction $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}^*(z_0, r))$, on dit que le complexe z_0 est une singularité de f et on la qualifie

- d'*effaçable* si la fonction f est bornée au voisinage de z_0 ;
- de *pôle* si $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to z_0$;
- d'*essentielle* sinon.

▷ EXEMPLES. – Pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[Z]$ et tout rayon $R > 0$, la fonction $z \longmapsto P(1/z)$ a un pôle en 0 (on dit que l'application $z \longmapsto P(z)$ a un pôle en ∞).
– La fonction $z \longmapsto e^{1/z}$ a une singularité essentielle en 0.

DÉFINITION 2.2. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un domaine de $\mathbf{C}$. Une fonction *méromorphe* sur U est la donnée d'un ensemble discret $S \subset U$ et d'une fonction holomorphe $f : U \setminus S \to \mathbf{C}$ tels que tout complexe de S soit un pôle ou une singularité effaçable de f. Deux données définissant la fonction méromorphe si les deux fonctions holomorphes coïncident sur un disque.

◇ REMARQUE. Parfois, une fonction méromorphe f sur U est notée $f : U \dashrightarrow \mathbf{C}$. L'ensemble des fonctions méromorphe sur U est noté $\mathscr{M}(U)$.

Dans la suite, on notera U un domaine de $\mathbf{C}$, $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$.

PROPOSITION 2.3. L'ensemble $\mathscr{M}(U)$ est un corps et il s'agit même du corps des fractions de $\mathscr{O}(U)$.

Preuve Cette proposition sera démontrée plus tard. □

THÉORÈME 2.4 *(de la singularité apparente)*. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}^*(z_0, r))$. Si le singularité z_0 est un effaçable, alors la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathrm{D}(z_0, r)$.

Preuve Sans perte de généralités, on suppose $z_0 = 0$. Pour $z \in \mathrm{D}^*(0, r)$, on pose $g(z) := zf(z)$. La fonction g est alors holomorphe sur $\mathrm{D}^*(0, r)$ et elle se prolonge par continuité sur $\mathrm{D}(0, r)$ en posant $g(0) = 0$. On en déduit que la fonction $h : z \longmapsto zg(z)$ est holomorphe sur $\mathrm{D}(0, r)$ et vérifie $h(0) = h'(0) = 0$. Elle peut donc s'écrire sous la forme $h(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathrm{D}(0, r)$ ce qui permet d'écrire $f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^{n-2}$ pour tout $z \in \mathrm{D}(0, r)$. □

PROPOSITION 2.5. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}^*(z_0, r))$. Alors la fonction f a un pôle en z_0 si et seulement s'il existe $m, \varepsilon > 0$ tels que la fonction $z \longmapsto (z - z_0)^m f(z)$ est holomorphe sur $\mathrm{D}(z_0, \varepsilon)$ et ne s'annule pas en z_0.

Preuve $\Leftarrow$ On suppose que la fonction f a un pôle en z_0. Alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ assez petit tel que la fonction $z \longmapsto 1/f(z)$ est bien définie sur $\mathrm{D}^*(z_0, \varepsilon)$. Cette dernière est alors holomorphe sur $\mathrm{D}^*(z_0, \varepsilon)$ et bornée au voisinage de z_0. D'après le théorème précédent, on peut l'écrire sous la forme $1/f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour tout $z \in \mathrm{D}(z_0, r)$. On pose alors $m := \min\{n \geqslant 0 \mid a_n \neq 0\}$. Pour tout $z \in \mathrm{D}(z_0, r)$, on a alors

$$(z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots}$$

où le membre de droite est bien holomorphe par rapport à z sur un petit disque de $\mathrm{D}(z_0, r)$.
$\Leftarrow$ Il suffit de regarder la limite. □

THÉORÈME 2.6 *(de caractérisation topologique des singularités essentielles)*. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}^*(z_0, r))$. Alors la singularité z_0 est essentielle si et seulement si, pour tout voisinage $V \subset \mathrm{D}(z_0, r)$ de z_0, l'image $f(V \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbf{C}$.

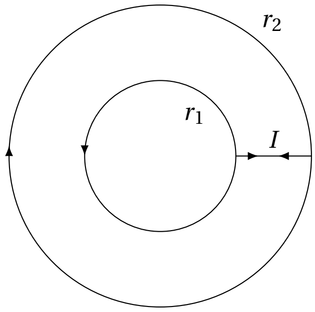

FIGURE 2.1 – Le trou de serrure formé par le chemin γ

Preuve Montrons uniquement le sens direct par contraposée. On suppose qu'il existe un voisinage $V \subset \mathrm{D}(z_0, r)$ de z_0 tel que l'image $f(V \setminus \{z_0\})$ ne soit pas dense dans $\mathbf{C}$. Alors il existe un disque $\mathrm{D}(b, \varepsilon) \subset \mathbf{C} \setminus f(V \setminus \{z_0\})$. Ainsi la fonction

$$g : \left| \begin{array}{rcl} V \setminus \{z_0\} & \longrightarrow & \mathbf{C}, \\ z & \longmapsto & 1/(f(z) - b) \end{array} \right.$$

est holomorphe et bornée sur $V \setminus \{z_0\}$ par $1/\varepsilon$. Le théorème de la singularité apparente assure alors que la fonction g est holomorphe sur V. Puisque $f(z) = b + 1/g(z)$ pour tout $z \in V \setminus \{z_0\}$, la singularité z_0 est soit effaçable (si $g(z_0) \neq 0$) soit un pôle (sinon). $\square$

2.2 DÉVELOPPEMENT DE LAURENT

DÉFINITION 2.7. Une série de LAURENT est une série de la forme

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

avec $z, z_0 \in \mathbf{C}$ et $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}} \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$.

NOTATION. Pour $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r, R > 0$, on note $\mathrm{C}(z_0, r, R) := \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$.

PROPOSITION 2.8. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une suite de $\mathbf{C}$. S'il existe $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ tels que la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z_i - z_0)^n$ converge absolument pour $i \in \{1, 2\}$ et $|z_1 - z_0| < |z_2 - z_0|$, alors la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$ converge normalement sur $\overline{\mathrm{C}}(z_0, |z_1|, |z_2|)$.

Preuve La convergence absolue de la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z_2 - z_0)^n$ implique celle de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n (z_2 - z_0)^n$, donc son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant |z_2 - z_0|$. De même, le rayon de convergence $\tilde{r}$ de la série $\sum_{n < 0} a_n (z_1 - z_0)^n$ vérifie $\tilde{r} \geqslant |1/(z_1 - z_0)|$. La série $\sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n$ converge donc pour $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z - z_0| \geqslant 1/\tilde{r}$. Ainsi le domaine de convergence d'une série de LAURENT est une couronne, celle donnée, sur laquelle la série converge uniformément sur tout compact. $\square$

THÉORÈME 2.9. Soient $R > 0$ et $f \in \mathscr{O}(\mathrm{C}(z_0, r, R))$. Alors la fonction f est développable en série de LAURENT, *i. e.* on peut l'écrire sous la forme $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$ au sens de la convergence uniforme sur tout compact.

LEMME 2.10. Soient $f \in \mathscr{O}(\mathrm{C}(z_0, r, R))$ et $r_1, r_2 > 0$ tels que $r < r_1 < r_2 < R$. Alors

$$\int_{\partial \mathrm{D}(z_0, r_1)} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\partial \mathrm{D}(z_0, r_2)} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Preuve Notons γ le chemin dessiné (voir figure 2.2). Le théorème des résidus assure

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

En décomposant γ en une succession de quatre chemins, on obtient

$$\int_I f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\partial \mathrm{D}(z_0, r_2)} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{-I} f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{-\partial \mathrm{D}(z_0, r_1)} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

où les notations $-I$ et $-\partial \mathrm{D}(z_0, r_1)$ désignent les chemins I et $\partial \mathrm{D}(z_0, r_1)$ renversés. Les deux intégrales sur I et $-I$ s'annulent ce qui assure le lemme. $\square$

Preuve du théorème Soit $A \Subset \mathrm{C}(z_0, r, R)$ une couronne. Pour tout $z \in A$, le théorème des résidus donne
$$\frac{f(z)}{2i\pi} = \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial \mathrm{D}(z_0, r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta - \int_{\partial \mathrm{D}(z_0, r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta.$$
Le membre de droite se développe en série de LAURENT ce qui assure le résultat (il suffit de développement le quotient $1/(\zeta - z)$). ☐

COROLLAIRE 2.11. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathrm{C}(z_0, r, R))$. Alors il existe un unique couple $(f_0, f_\infty) \in \mathscr{O}(\mathrm{D}(z_0, R)) \times \mathscr{O}(\mathbf{C} \setminus \overline{\mathrm{D}}(z_0, r))$ tel que
$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} f_\infty(z) = 0 \quad \text{et} \quad f = f_0 - f_\infty.$$

Preuve En adoptant les notations du théorème, on pose $f_0 := \sum_{n \geqslant 0} a_n (\cdot - z_0)^n$ et $f_\infty := \sum_{n<0} a_n (\cdot - z_0)^n$ et on obtient la limite de $f_\infty(z)$ quand $z \to \infty$ en intervertissant la somme et la limite. L'unicité vient des théorèmes de LIOUVILLE et des zéros isolés. ☐

THÉORÈME 2.12. Soient $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}^*(z_0, r))$ et $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$ son développement en série de LAURENT. Alors

1. la singularité z_0 est effaçable si et seulement si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.
2. la singularité z_0 est un pôle d'ordre $m \geqslant 1$ si et seulement si $a_n = 0$ pour tout $n < -m$ et $a_{-m} \neq 0$.
3. la singularité z_0 est essentielle si et seulement si l'ensemble $\{n < 0 \mid a_n \neq 0\}$ est infini.

▷ EXEMPLE. La fonction $z \longmapsto \exp(1/z)$ s'écrit sous la forme
$$\exp(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^k}{(-k)!}, \quad z \in \mathbf{C}^*.$$
Cette fonction possède donc une singularité essentielle en 0.

Chapitre 3
SUITES, SÉRIES ET PRODUITS

3.1 SUITES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

THÉORÈME 3.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f : U \to \mathbf{C}$. Alors cette dernière est holomorphe.

Preuve D'après le lemme de GOURSAT, il suffit de vérifier que, pour tout disque $D \Subset U$, on a

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Le bord du disque étant compact, la suite $(f_n|_{\partial D})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f|_{\partial D}$, donc

$$\int_{\partial D} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0 \longrightarrow \int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z$$

ce qui conclut. □

LEMME 3.2. Soient K et L deux compacts de U tels que $K \subset \mathring{L}$. Alors pour tout $k \geqslant 0$, il existe $c > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \quad \|f^{(k)}\|_K \leqslant c\|f\|_L.$$

Preuve Comme $K \subset \mathring{L}$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon := \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{d}(z, K) \leqslant \varepsilon\} \subset \mathring{L}$. Soient $k \geqslant 0$ et $z_0 \in K$. Appliquons la formule de CAUCHY sur le disque $\mathrm{D}(z_0, \varepsilon)$: on obtient

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial\mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

L'inégalité triangulaire assure alors

$$|f^{(k)}(z_0)| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \frac{\|f\|_L}{\varepsilon^{k+1}} \int_{\partial\mathrm{D}(z_0,\varepsilon)} |\mathrm{d}z| = \frac{k!}{2\varepsilon^k}\|f\|_L.$$

Il suffit alors de poser $c := k!/2\varepsilon^k$. □

THÉORÈME 3.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors pour tout $k \geqslant 0$, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f.

Preuve Il suffit d'appliquer le lemme. Soient $K \subset U$ un compact et $\varepsilon > 0$ tels que $L := K_\varepsilon \subset U$. En vertu de l'inégalité du lemme, comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur K_ε, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur K pour tout $k \geqslant 0$. □

COROLLAIRE 3.4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$. On suppose que les fonctions f_n ne s'annulent pas sur U. Alors soit $f = 0$ soit f ne s'annule pas sur U.

COROLLAIRE 3.5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$. On suppose que les fonctions f_n sont injectives. Alors f est soit constante soit injective.

3.2 TOPOLOGIE DE $\mathcal{O}(U)$

PROPOSITION 3.6. La topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace $\mathscr{C}(U, \mathbf{C})$ est métrisable. On notera d une distance sur cette espace.

Preuve On choisit une exhaustion compact de U, *i. e.* une suite de compacts $(K_n)_{n\geqslant 1}$ de U telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\bigcup_{n\geqslant 1} K_n = U$. Une telle suite existe bien, il suffit de prendre

$$K_n := \{z \in U \mid |z| \leqslant n, \mathrm{d}(z, \mathbf{C} \setminus U) \geqslant 1/n\}, \quad n \geqslant 1.$$

Maintenant, pour $f, g \in \mathscr{C}(U, \mathbf{C})$, on pose

$$d(f,g) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\min(\|fg\|_{K_n}, 1)}{2^n}.$$

Alors l'application d est une distance sur $\mathscr{C}(U, \mathbf{C})$.

Montrons que la topologie donnée par cette distance est celle de la convergence uniforme. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathscr{C}(U,\mathbf{C})$ et $f \in \mathscr{C}(U,\mathbf{C})$ telles que $d(f_n, f) \longrightarrow 0$. Montrons que cette suite converge uniformément sur tout compact vers f. Soient $\varepsilon \in \,]0,1[$ et $p \geqslant 1$. Si $d(f_n, f) < \varepsilon/2^p$, alors $\|f_n - f\|_{K_p} \leqslant \varepsilon$. Donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur K_p et donc sur tout compact de K_p. Ceci étant vrai pour tout $p \geqslant 1$, elle converge uniformément sur tout compact de $\bigcup_{p\geqslant 1} K_p = U$.

Réciproquement, soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathscr{C}(U,\mathbf{C})$ qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathscr{C}(U,\mathbf{C})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 1$ tel que $\|f - f_n\|_{K_p} \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Alors pour tout $P \geqslant 1$ tel que $1/2^P \leqslant \varepsilon$ et tous $p_0 \leqslant P$ et $n \geqslant N$, on a $\|f_n - f\|_{K_{p_0}} \leqslant \varepsilon$ et, dans ce cas, on a

$$d(f_n, f) \leqslant \sum_{p\leqslant P} \frac{\varepsilon}{2^p} + \sum_{p>P} \frac{\min(\|f_n - f\|_{K_p}, 1)}{2^p} \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela conclut. □

THÉORÈME 3.7. 1. L'espace métrique $(\mathscr{C}(U,\mathbf{C}), d)$ est complet.
2. La distance d est invariante par translation, *i. e.* $d(f,g) = d(f+h, g+h)$ pour toutes f, g, h.
3. La multiplication scalaire et l'addition sont continues.
4. Le sous-espace $\mathscr{O}(U) \subset \mathscr{C}(U,\mathbf{C})$ est fermé et donc complet.

Preuve 1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de CAUCHY de $(\mathscr{C}(U,\mathbf{C}), d)$. Soient $P \geqslant 1$ et $\varepsilon \in \,]0,1[$. Il existe $N \geqslant 1$ tel que

$$\forall k, \ell > N, \quad d(f_k, f_\ell) \leqslant \varepsilon/2^P.$$

On en déduit que, pour tout $k, \ell > N$, on a $\|f_k - f_\ell\|_{K_P} \leqslant \varepsilon$. Comme l'espace $(\mathscr{C}(K_P, \mathbf{C}), \|\ \|_{K_P})$ est complet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur K_P vers f. Comme les compacts K_P sont emboîtés, elle converge aussi uniformément sur K_{P+1} vers f par unicité de la limite et donc sur tout compact. □

DÉFINITION 3.8. Une partie $A \subset \mathscr{O}(U)$ est dite *bornée* si ses éléments sont uniformément bornés sur tout compact de U, *i. e.* pour tout compact $K \subset U$, *i. e.* il existe $c_K > 0$ tel que

$$\forall f \in A, \quad \|f\|_K \leqslant c_K.$$

THÉORÈME 3.9 (MONTEL). Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de $\mathscr{O}(U)$. Alors il existe une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U.

Preuve On veut utiliser le théorème d'ASCOLI. Pour tout $x \in U$, l'ensemble $\{x\}$ étant compact, il existe $c_x > 0$ tel que $|f_n(x)| \leqslant c_x$ pour tout $n \geqslant 1$, donc l'ensemble $\{f_n(x) \mid n \geqslant 1\}$ est bien relativement compact dans $\mathbf{C}$.

Vérifions l'hypothèse d'équicontinuité. Soit $K \subset U$ un compact. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $c > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \|f_n'\|_{K_\varepsilon} \leqslant c\|f_n\|_{K_\varepsilon}.$$

Mais comme la suite est bornée, il existe $\tilde{c} > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \|f_n'\|_{K_\varepsilon} \leqslant \tilde{c}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall n \geqslant 1, \forall x, y \in K, \quad |x - y| \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \tilde{c}|x - y|.$$

Cela montre l'équicontinuité de la partie $\{f_n \mid n \geqslant 1\}$. Le théorème d'ASCOLI assure alors que la partie $\{f_n|_K \mid n \geqslant 1\}$ est relativement compacte. On réutilise une exhaustion $(K_m)_{m\geqslant 1}$ de U. Il reste ensuite à faire un extraction diagonale : pour tout $m \geqslant 2$, il existe une sous-suite $g^m := (g_n^m)_{n\geqslant 1}$ de g^{m-1} qui converge uniformément sur K_m et, ensuite, on considère la suite $(g_m^m)_{m\geqslant 1}$ qui convient. □

3.3 SÉRIES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

DÉFINITION 3.10. Soient U un domaine de $\mathbf{C}$, I un ensemble discret et $(f_i)_{i\in I}$ une suite de fonctions méromorphes sur U. On dit que la série $\sum_{i\in I} f_i$ converge uniformément sur tout compact si, pour tout compact $K \Subset U$, les propositions suivantes sont vraies :

(i) il existe une voisinage V de K et une partie finie $F \subset I$ tels que, pour tout $i \in F$, on a $f_i \in \mathscr{O}(V)$;

(ii) la série $\sum_{i\in U\setminus F} f_i$ converge uniformément sur tout compact.

▷ EXEMPLES. – La série $\sum_{n\in\mathbf{Z}}(z-n)^{-2}$ converge uniformément sur tout compact.

– Montrons que la série

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbf{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

converge sur $\mathbf{C}$. Soit $R > 0$. Pour tout $z \in \overline{\mathrm{D}}(0,R)$, on a

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbf{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^*\\|n|<2R}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^*\\|n|\geqslant 2R}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).$$

Montrons que le dernier terme est bien une série dont le terme général est holomorphe sur $\overline{\mathrm{D}}(0,R)$. En effet, pour tous $z \in \overline{\mathrm{D}}(0,R)$ et $n \in \mathbf{Z}$ tel que $|n| \geqslant 2R$, on a

$$\left|\frac{1}{z-n}-\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{z}{(z-n)n}\right| \leqslant \frac{|z|}{(|n|-|z|)\,|n|} \leqslant \frac{2R}{|n|^2}$$

ce qui assure la converge uniforme sur $\overline{\mathrm{D}}(0,R)$. Ainsi cette série converge uniformément uniformément sur tout compact vers une fonction f. De plus, pour tout $z \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{z+n}+\frac{1}{-n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2-n}.$$

Calculons explicitement la fonction f et montrons qu'il s'agit de la fonction $z \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{Z} \longmapsto \pi\operatorname{cotan}\pi z$. Pour cela, utilisons le théorème des résidus. Soient $N \geqslant 1$ et $C_N \subset \mathbf{C}$ le carré de centre 0 et de côté $2N+1$. Pour tout $z \in C_N$, le théorème des résidus assure

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_N}\frac{\operatorname{cotan}\pi z}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}^*\\|n|\leqslant N}}\frac{1/\pi}{n-z}.$$

On peut ensuite obtenir le résultat.

– • *La fonction de* WEIERSTRASS. Existe-t-il des fonctions $\mathbf{Z}+i\mathbf{Z}$-périodique ? La fonction $x+iy \longmapsto e^{2i\pi x}e^{2i\pi y}$ est $\mathbf{Z}+i\mathbf{Z}$, mais cette dernière n'est pas holomorphe. Par le principe du maximum, il n'existe pas de telle fonction holomorphe. Quant est-il des fonctions méromorphes ? Soient ω_1 et ω_2 deux complexes $\mathbf{R}$-indépendantes. L'ensemble $\Omega := \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{C}$. Existe-t-il une fonction méromorphe f sur $\mathbf{C}$ qui soit constante sur Ω ? Par exemple, on pourrait poser

$$f(z) := \sum_{\Omega\in\Omega}\frac{1}{z-\omega}, \quad z \in \mathbf{C}\setminus\Omega,$$

mais cette fonction ne converge pas. La fonction de WEIERSTRASS est définie par

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\\omega\neq 0}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right), \quad z \in \mathbf{C}\setminus\Omega.$$

Elle converge bien vers une fonction méromorphe.

LEMME 3.11. Soit $k > 0$. Alors la série $\sum_{z\in\Omega\setminus\{0\}}|\omega|^{-k}$ converge si et seulement si $k > 2$.

Preuve Sommons par parquet. Pour $n \geqslant 0$, on note

$$\Omega_n := \{k\omega_1 + \ell\omega_2 \mid k,\ell \in \mathbf{Z}, \max(|k|,|\ell|) = n\} \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_n := \{k\omega_1 + \ell\omega_2 \mid k,\ell \in \mathbf{R}, \max(|k|,|\ell|) = n\}.$$

Comme la série est positive, on peut considérer des paquets comme on veut et on a

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\\omega\neq 0}}\frac{1}{|\omega|^k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\omega\in\Omega_n}\frac{1}{|\omega|^k}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\omega \in \Omega_n$, on a

$$nC_2 \leqslant |\omega| \leqslant \max_{w\in\Omega_n}|w| = nC_1$$

où $C_1 = \max_{w\in\mathscr{P}_1} |w|$ et $C_2 := \max_{w\in\mathscr{P}_1} |w|$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$\frac{8n}{n^k c_2^k} \leqslant \sum_{\omega\in\Omega_n} \frac{1}{|\omega|^k} \leqslant \frac{8n}{n^k c_1^k}.$$
Finalement, la série converge si et seulement si $k-1>1$ ce qui assure le lemme. □

Montrons la convergence de la série définissant la fonction $\wp$. Soient $R>0$ et $z \in \overline{\mathrm{D}}(0,R)$. Alors
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ \omega\neq 0\\ |\omega|<2R}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) + \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ |\omega|\geqslant 2R}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$
La première somme est finie. De plus, pour tout $\omega \in \Omega$ tels que $|\omega| \geqslant 2R$, on a
$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{-z^2+2z\omega}{(z-\omega)^2\omega^2}\right| \leqslant \frac{R^2+2R|\omega|}{(|\omega|-|z|)^2|\omega|^2} \sim \frac{1}{|\omega|^2}.$$
Cela montre la convergence de la série.

Théorème de Mittag-Leffler

Définition 3.12. Soient $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}^*(z_0,r))$ une fonction possédant un pôle d'ordre $m \geqslant 1$ en z_0 et
$$\sum_{n\geqslant -m} a_m (z-z_0)^n$$
son développement de Laurent. La *partie principale* de f en z_0 est la fonction
$$z \longmapsto \sum_{n=-m}^{-1} a_n (z-z_0)^n.$$

Théorème 3.13 *(Mittag-Leffler)*. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes deux à deux distincts tendant vers l'infini et $(P_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de parties principales. Alors il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbf{C}$ ayant ses pôles en a_n de partie principale P_n.

Preuve Si la série $\sum_{n\geqslant 1} P_n(z)$ converge, alors sa somme répond au problème. Sinon on cherche une telle fonction f sous la forme $\sum_{n\geqslant 1}(P_n(z) - p_n(z))$. On peut supposer que 0 n'est pas dans la suite des pôles. Alors pour tout $n \geqslant 1$, comme la développement de Taylor de P_n en 0 converge uniformément sur toute disque fermé inclus dans $\mathrm{D}(0,|a_n|)$, il existe un polynôme $p_n \in \mathbf{C}[z]$ tel que
$$\|P_n - p_n\|_{\mathrm{D}(0,|a_n|/2)} \leqslant 1/2^n.$$
On pose alors $f(z) := \sum_{n\geqslant 1}(P_n(z) - p_n(z))$. Cette fonction est bien définie car, en séparant la somme en deux comme dans les exemples précédents, il y a converge uniforme. □

Corollaire 3.14 *(théorème de Bézout dans $\mathscr{O}(\mathbf{C})$)*. Soient $f, g \in \mathscr{O}(\mathbf{C})$ telles que $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$ où les ensembles $Z(f)$ et $Z(g)$ sont les ensembles des zéros de f et g. Alors il existe $u, v \in \mathscr{O}(\mathbf{C})$ telles que $uf + vg = 1$.

Preuve La fonction $1/fg$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les éléments de $Z(f) \cup Z(g)$. Le théorème de Mittag-Leffler assure l'existence d'une fonction méromorphe $\tilde{u}$ sur $\mathbf{C}$ ayant les mêmes parties principales que la fonction $1/fg$ en les points de $Z(f)$. Alors la fonction $\tilde{v} := 1/fg - \tilde{u}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les éléments de $Z(g)$ et dont les parties principales en ces pôles sont celles de $1/fg$. Avec la définition de $\tilde{v}$, on a $1 = (\tilde{u}f)g + (\tilde{v}g)f$. Il reste à vérifier que la fonction $\tilde{u}f$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Soit $z_0 \in Z(f)$. Au voisinage de z_0, on écrit
$$\tilde{u}(z) = \frac{c_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$
avec $c_n \neq 0$. La partie principale de $\tilde{u}$ est celle de $1/fg$. De plus, comme g est holomorphe en z_0, on écrit $g(z) = g_0 + \cdots$. Comme z_0 est un pôle d'ordre $k \geqslant 1$ de f, on écrit $f(z) = f_k(z-z_0)^k + \cdots$. On en déduit que $k = n$ et $c_n = 1/f_k g_0$. Cela nous montre que la fonction $\tilde{u}f$ est holomorphe en z_0. □

3.4 Produits infinis de fonctions holomorphes

LEMME 3.15. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes. Pour $N \geqslant 1$, on pose

$$p_N := \prod_{i=1}^{N}(1+u_n) \quad \text{et} \quad p_N^* := \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|).$$

Alors pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$p_N^* \leqslant \exp(|u_1| + \cdots + |u_N|) \quad \text{et} \quad |p_N - 1| \leqslant p_N^* - 1.$$

Preuve La première inégalité vient de l'inégalité de BERNOULLI. La seconde se montre par récurrence. □

THÉORÈME 3.16. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions bornées sur U telle que la série $\sum_{n\geqslant 1}|u_n|$ converge uniformément sur U. Alors

1. le produit $f := \prod_{n\geqslant 1}(1+u_n)$ converge uniformément sur U ;
2. pour toute bijection $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, la produit $\prod_{n\geqslant 1}(1+u_{\sigma(n)})$ converge vers f ;
3. s'il existe $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$, alors il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $1 + u_{n_0}(z_0) = 1$.

Preuve Soient $N \geqslant 1$ et $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ une bijection. On pose

$$p_N := \prod_{n=1}^{N}(1+u_n) \quad \text{et} \quad q_M := \prod_{n=1}^{N}(1+u_{\sigma(n)}).$$

Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \geqslant 1,\ \forall N \geqslant N_0,\ \exists M_0 \geqslant 1,\ \forall M \geqslant M_0, \quad |q_M - p_N| \leqslant \varepsilon. \tag{$*$}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$c := \sup_{z\in U}\sum_{n\geqslant 1}|u_n(z)| < +\infty.$$

Il existe $N_0 \geqslant 1$ tel que

$$\forall N > N_0, \quad c := \sup_{z\in U}\sum_{n\geqslant N}|u_n(z)| < \varepsilon.$$

Soit $M_0 \geqslant 1$ tel que $[\![1,n]\!] \subset \{\sigma(1),\dots,\sigma(M_0)\}$. Soit $M \geqslant M_0$. Alors

$$q_M - p_N = p_N\left(\frac{q_M}{p_N} - 1\right) = p_N\Big(\prod_{k\in K}(1+u_k) - 1\Big)$$

où $K := \{\sigma(1),\dots,\sigma(M_0)\} \setminus \{1\}\, N$. Par le lemme, on a alors

$$\begin{aligned}
|q_M - p_N| &\leqslant |p_N|\Big|\prod_{k\in K}(1+u_k) - 1\Big| \\
&\leqslant |p_N|\Big(\prod_{k\in K}(1+|u_k|) - 1\Big) \\
&\leqslant |p_N|\Big(\exp\Big(\sum_{k\in K}|u_k|\Big) - 1\Big) \\
&\leqslant |p_N|(e^\varepsilon - 1) \\
&\leqslant e^c(e^\varepsilon - 1) \leqslant 2e^c\varepsilon
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Le point 1 se montre alors en prenant $\sigma = \mathrm{Id}$. Alors la suite des produits partiels est de CAUCHY, donc elle converge vers une fonction f. Pour le point 2, comme la série $\sum_{n\geqslant 1}|u_n|$, la série

$$\sum_{n\geqslant 1}|u_{\sigma(n)}|$$

converge, donc la suite $(q_M)_{M\geqslant 1}$ converge vers une fonction g. Ensuite on fait $M \to +\infty$ puis $N \to +\infty$ dans la relation $(*)$ et on obtient $|f-g| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $f = g$. Pour le point 3, pour $M \geqslant M_0$, on a

$$\begin{aligned}
|p_{N_0}| &\leqslant |p_M - p_{N_0}| + |p_M| \\
&\leqslant |p_{N_0}|(e^\varepsilon - 1) + |p_M| \\
&\leqslant |p_{N_0}|(e^\varepsilon - 1) + |f|.
\end{aligned}$$

Si $f(z) = 0$, alors

$$|p_{N_0}(z)| \leqslant (e^\varepsilon - 1)|p_{N_0}(z)|$$

et, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient $p_{N_0}(z) = 0$. □

◇ REMARQUE. On dit qu'un produit $\prod_{k\geqslant 1}(1+u_n)$ converge normalement sur U si la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur U.

DÉFINITION 3.17. Pour une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}^*(z_0, r))$ possédant un pôle en z_0 dont le développement de LAURENT s'écrit $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(z-z_0)^n$, on note

$$\nu_{z_0}(f) := \min\{n \in \mathbf{Z} \mid a_n \neq 0\}.$$

THÉORÈME 3.18. Soient U un domaine de $\mathbf{C}$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathscr{O}(U) \setminus \{0\}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} |1 - f_n|$ converge uniformément sur tout compact. Alors

1. le produit $f := \prod_{k\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur tout compact ;
2. pour tout $z_0 \in U$, on a

$$\nu_{z_0}(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu_{z_0}(f_n).$$

Preuve Le premier point vient du théorème précédent. Montrons le second point. Soit $z_0 \in U$ un zéro de f. Soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subset U$. Par hypothèse, il existe $N \geqslant 1$ tel que

$$\forall n > N, \quad \|1 - f_n\|_{\mathrm{D}(z_0,r)} \leqslant 1/2.$$

Pour $n > N$, la fonction f_n ne s'annule donc pas sur la disque. De plus, on peut alors écrire

$$\prod_{n\geqslant 1} f_n = \prod_{n\leqslant N} f_n \prod_{n>N} f_n$$

où le deuxième produit est fini. Ceci montre le second point. □

Chapitre 4

SPHÈRE DE RIEMANN, FONCTIONS RATIONNELLES & HOMOGRAPHIES

On va identifier trois objets : le sphère $\mathbf{S}^2$, le compactifié d'ALEXANDROFF $\hat{\mathbf{C}}$ et la droite projective $\mathbf{CP}^1$.

4.1 LE COMPACTIFIÉ D'ALEXANDROFF

DÉFINITION 4.1. Le *compactifié d'*ALEXANDROFF est l'ensemble $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ de la topologie suivante : les voisinages de l'élément ∞ sont les ensembles de la forme $\{\infty\} \cup \mathbf{C} \setminus K$ pour un compact K de $\mathbf{C}$ et les voisinages d'un point de $\mathbf{C}$ est un voisinage usuel.

PROPOSITION 4.2 *(*PTOLÉMÉE, MERCATOR*).* Le compactifié $\hat{\mathbf{C}}$ est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^2$.

Preuve On pose $N := (0,0,1)$. Alors la projection stéréographique

$$\varphi \colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}, \\ x+iy \longmapsto \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2+1}, \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}, \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme dont la réciproque est

$$\varphi^{-1} \colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ (x,y,z) \longmapsto \dfrac{x+iy}{1-z}. \end{array} \right.$$

On prolonge ces applications en posant $\varphi(\infty) = N$. On a ainsi obtenu un homéomorphisme $\hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbf{S}^2$. □

LEMME 4.3. L'application

$$J \colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*, \\ z \longmapsto 1/z \end{array} \right.$$

se prolonge en un homéomorphisme de $\hat{\mathbf{C}}$ dans lui-même. De plus, sur $\mathbf{S}^2$, elle s'écrit

$$\varphi \circ J \circ \varphi^{-1} \colon (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, -x_2, -x_3).$$

Preuve Il suffit de remarquer que, sur $\mathbf{S}^2$, l'application $\overline{J}$ s'écrit $(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1,x_2,-x_3)$ et la conjugaison s'écrit $(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_1,-x_2,x_3)$. □

DÉFINITION 4.4. Soit U un domaine de $\hat{\mathbf{C}}$. On dit qu'une fonction $f \colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe sur U si la restriction $f|_{U\setminus\{\infty\}}$ est holomorphe et la restriction $f|_{J^{-1}(U)\setminus\{\infty\}}$ est holomorphe en 0. On définit de même la notion de fonction méromorphe sur U.

◇ REMARQUES. – Par le principe du maximum, il n'existe pas de fonctions holomorphes non constantes sur $\hat{\mathbf{C}}$.

– Soient U un voisinage de ∞ et $f \in \mathscr{O}(U \setminus \{\infty\})$. Alors elle est holomorphe au point ∞ si et seulement si la limite de $f(z)$ quand $z \to \infty$ existe. De plus, elle est méromorphe au point ∞ si et seulement si $f(z) \to \infty$ quand $z \to \infty$.

– Soient U un domaine de $\hat{\mathbf{C}}$ et $f \colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction méromorphe sur U. Alors elle admet un prolongement continue $f \colon U \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ tel que la restriction $f|_{U\setminus f^{-1}(\{\infty\})}$ soit holomorphe et la restriction $J \circ f|_{U\setminus f^{-1}(\{0\})}$ soit holomorphe.

THÉORÈME 4.5. Soient $f, g \colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ deux fonctions méromorphes ayant les mêmes pôles et mêmes parties principales en ces pôles. Alors il existe $c \in \mathbf{C}$ tel que $f = g + c$.

Preuve La fonction $f - g$ est holomorphe sur $\hat{\mathbf{C}}$, donc elle est constante d'après la remarque précédente. □

THÉORÈME 4.6. Soient $f, g\colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ deux fonctions méromorphes telles que

$$\forall z \in \hat{\mathbf{C}}, \quad v_z(f) = v_z(g)$$

où $v_\infty(f) := v_0(f \circ J)$. Alors il existe $c \in \mathbf{C}^*$ tel que $f = cg$.

Preuve La fonction f/g ne possède pas de pôle, donc elle est holomorphe sur $\hat{\mathbf{C}}$, donc elle est constante. Comme elle n'a pas de zéro, la constante est non nulle. □

THÉORÈME 4.7. Soit $f\colon \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ une fonction méromorphe. Alors elle est rationnelle.

Preuve Elle ne possède qu'un nombre fini de pôles. En effet, les pôles « à distance finie » forment une partie discrète $P \subset \mathbf{C}$. De plus, les pôles de la fonction $g := f \circ J$ forment également une ensemble discret qui contient les éléments $1/z_0$ pour $z_0 \in P \setminus \{\infty\}$. Ce dernier ensemble ne peut donc pas s'accumuler en 0, donc elle est fini. On note $P = \{z_1, \dots, z_m\}$ et, pour $i \in [\![1, m]\!]$, on note $m_i \geqslant 1$ l'ordre du pôle z_i de f. Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose

$$Q(z) := \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)^{m_i}.$$

Alors la fonction Qf est holomorphe sur $\mathbf{C}$, donc on peut l'écrire sous la forme

$$Q(z)f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, on a donc

$$Q(1/z)f(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{K} a_n \frac{1}{z^n} =: P(1/z)$$

pour un certain entier $K \geqslant 0$. Ainsi $f = P/Q$. □

COROLLAIRE 4.8. Soient $f\colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ une fonction rationnelle. On note $f = P/Q$ avec deux polynômes $P, Q \in \mathbf{C}[Z]$ premiers entre eux. On pose

$$\deg f := \max(\deg P, \deg Q).$$

Si $\deg f > 0$, alors la fonctions f atteint toutes les valeurs de $\hat{\mathbf{C}}$ le même nombre de fois (comptée avec multiplicité).

Preuve Une solution de l'équation $f(z) = \infty$ est une solution de l'équation $Q(z) = 0$. Avec multiplicité, il y en a $\deg Q$ dans $\mathbf{C}$. Si $\deg P \leqslant \deg Q$, alors on n'a pas de pôle en ∞. Si $\deg P > \deg Q$, alors l'équation $f(\infty) = \infty$ est réalisé avec multiplicité $\deg P - \deg Q$. Donc tous les cas, l'équation $f(z) = \infty$ possède $\deg f$ solution.

Pour une constante $c \in \mathbf{C}$ quelconque, on pose $\tilde{f} := 1/(f - c)$. On se ramène alors au cas précédent et on remarque que $\deg \tilde{f} = \deg f$. □

COROLLAIRE 4.9. Soient $f\colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ une fonction rationnelle. On note m_i les ordres des zéros de f dans $\mathbf{C}$ et n_j l'ordre des pôles de f. Alors $v_\infty(f) = \sum n_i - \sum m_j$. Autrement dit, on a

$$\sum_{a \in \hat{\mathbf{C}}} v_a(f) = 0.$$

4.2 LA DROITE PROJECTIVE COMPLEXE

DÉFINITION 4.10. On définit l'action de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par multiplication par un complexe. On note

$$\mathbf{CP}^1 := \frac{\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}}{\mathbf{C}^*}.$$

PROPOSITION 4.11. Les espaces $\mathbf{CP}^1$ et $\hat{\mathbf{C}}$ sont homéomorphes.

NOTATION. Pour $w_1, w_2 \in \mathbf{C}$, on note $\mathbf{C}(w_1, w_2) := \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid w_2 z_1 + w_2 z_2 = 0\} \subset \mathbf{CP}^1$.

Preuve On associe à un complexe $z \in \mathbf{C}$ la droite $\mathbf{C}(z, 1)$ et à l'infini la droite $d_\infty := \mathbf{C}(1, 0)$. □

◇ REMARQUE. Toutes les droites complexes coupent la sphère $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{C}^2$ en des cercles. Ces droites sont les orbites de $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}^*$.

Homographie

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ agit sur $\mathbf{C}^2$ et préserve les droites vectorielles, *i. e.* il commute à l'action de $\mathbf{C}^*$. Il agit donc sur $\mathbf{CP}^1$.

DÉFINITION 4.12. Une *homographie* est une application rationnelle de $\hat{\mathbf{C}}$ dans lui-même de degré 1. Une telle application est de la forme

$$z \in \hat{\mathbf{C}} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \hat{\mathbf{C}} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}).$$

On note $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ le groupes de homographies. L'application naturelle $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \longmapsto [g] \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ a pour noyau les homothéties.

EXERCICE 4.1. On note $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ l'image de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.

THÉORÈME 4.13. On a $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.

Preuve Soit $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$. Si $f(\infty) = \infty$, alors la fonction f se restreint en un automorphisme de $\mathbf{C}$, donc elle est affine, donc $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. On suppose $f(\infty) \neq \infty$. On pose $g := h \circ f$ où

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -f(\infty) \end{bmatrix}.$$

Alors $h \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ et $g \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ car $g(\infty) = \infty$, donc la fonction g est affine, donc $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. L'inclusion réciproque est évidente. □

4.3 CERCLES, BIRAPPORT ET QUELQUES GROUPES

Un cercle de $\mathbf{S}^2$ est la trace d'un plan.

LEMME 4.14. La projection stéréographique d'un cercle est un cercle ou une droite (réelle).

PROPOSITION 4.15 *(caractérisation complexe des cercles et droites)*. 1. Soient $b \in \mathbf{C}$, $c > 0$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Alors l'ensemble

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \varepsilon z\overline{z} + b\overline{z} + \overline{b}z + c = 0\}$$

est vide, réduit à un point, un cercle si $\varepsilon = 1$ ou une droite si $\varepsilon = 0$.

2. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ trois points distincts. Alors l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} & \overline{z} \\ z_1\overline{z_1} & z_2\overline{z_2} & z_3\overline{z_3} & z\overline{z} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

est un cercle ou une droite passant par les trois points.

3. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ trois points distincts. Alors l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)} \in \hat{\mathbf{R}} \right\}$$

est un cercle ou une droite passant par les trois points.

Preuve Pour montrer le point 1, on calcul la partie réelle d'un tel point et on reconnaît l'équation d'un cercle ou d'une droite. Pour le point 2, on se ramène au cas 1 en développant par rapport à la dernière ligne. Le point 3 se montre à l'aide du théorème de l'angle inscrit. □

DÉFINITION 4.16. Le *birapport* de quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 de $\mathbf{C}$ est la quantité

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] := \frac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}.$$

THÉORÈME 4.17. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ trois points distincts. Alors il existe une unique homographie $h \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ telle que $h(z_1) = 0$, $h(z_2) = 1$ et $h(z_3) = \infty$.

Preuve Il suffit de poser $h(z) := [z_1 : z_2 : z_3 : z]$ pour tout $z \in \hat{\mathbf{C}}$. L'unicité vient du fait qu'une application linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ qui fixe une à une trois droites distinctes est l'identité. □

COROLLAIRE 4.18. L'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ sur $\hat{\mathbf{C}}$ est 3-transitive.

PROPOSITION 4.19. Une homographie préserve le birapport.

EXERCICE 4.2. Trouver les six homographies qui permutent 0, 1 et ∞.

QUELQUES SOUS-GROUPES.

– Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est constitué des applications de la forme

$$z \in \mathbb{D} \longmapsto \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}} \in \mathbb{D}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^1 = 1.$$

– Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. En effet, l'application

$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

est une homographie telle que $h(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. On obtient une injection $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \longmapsto h^{-1} \circ \varphi \circ h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

– Le groupe $\mathrm{SO}(3) := \{O \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \mid {}^{t}OO = I_3\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. En effet, montrons un petit lemme.

LEMME 4.20. La projection stéréographique est conforme.

Admettons ce lemme. Soit $O \in \mathrm{SO}(3)$. Alors l'application $h_0 := \varphi^{-1} \circ O \circ \varphi$ est bien une homographie où l'application φ est l'homéomorphisme entre $\hat{\mathbf{C}}$ et $\mathbf{S}^2$.

Montrons le lemme. On pose

$$\psi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{C}, \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{x+iy}{1-z}. \end{array} \right.$$

On vérifie que, pour tout point $p \in \mathbf{S}^2$, la différentielle $d\psi|_{\mathbf{S}^2}(p)$ est la restriction de la différentielle $d\psi(p)$ au plan tangent $\mathrm{T}_p\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

L'image de $\mathrm{SO}(3)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est l'ensemble

$$\mathrm{PSU}(2) := \left\{ z \longmapsto \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{-\beta z + \overline{\alpha}} \;\middle|\; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

4.4 LE THÉORÈME DE L'APPLICATION CONFORME

4.4.1 Introduction

Tout d'abord, énonçons le théorème sans définir ce qu'est un domaine « simplement connexe ». Avec les mains, un tel ensemble n'a pas de trou.

THÉORÈME 4.21 *(RIEMANN-KOEBE-POINCARÉ-CARATHÉODORY)*. Soit U un domaine simplement connexe de $\hat{\mathbf{C}}$. Alors on a les alternatives suivantes :

(i) soit $U = \hat{\mathbf{C}}$;

(ii) soit il existe $p \in \hat{\mathbf{C}}$ tel que $U = \hat{\mathbf{C}} \setminus \{p\}$;

(iii) soit, pour tout $c \in U$, il existe un unique biholomorphisme $f : U \to \mathbb{D}$ tel que $f(c) = 0$ et $f'(c) > 0$.

◇ REMARQUE. Une telle fonction f s'appelle une *uniformisation* de U. Par exemple, le demi-plan $\mathbb{H}$ est biholomorphe au disque $\mathbb{D}$ par l'application

$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

De même, la bande $\{-\pi < \mathrm{Im} < \pi\}$ est biholomorphe au demi-plan $\mathbb{H}$ par la composée de l'exponentielle et de la racine carrée. Un autre exemple est le carré de côté 1, le théorème nous dit qu'il est biholomorphe à $\mathbb{H}$, mais l'uniformisation est difficile à trouver : c'est la fonction $\wp$ pour le réseau $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$.

4.4.2 Simple connexité

DÉFINITION 4.22. Soit U un domaine de $\mathbf{C}$. On dit que deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to U$ sont *homotopes* dans U s'il existe une fonction continue $h\colon [0,1]^2 \to U$ telle que $h(0,\cdot) = \gamma_0$ et $h(1,\cdot) = \gamma_1$.

DÉFINITION 4.23. Un domaine U de $\hat{\mathbf{C}}$ est *simplement connexe* si tout lacet dans U est homotope à un lacet constant dans U.

▷ EXEMPLE. Soit U un domaine étoilé par rapport à un point $z_0 \in U$. Soit $\gamma\colon [0,1] \to U$ un chemin issu de z_0. Alors l'application

$$\left|\begin{array}{l} [0,1]^2 \longrightarrow U, \\ (s,t) \longmapsto s(\gamma(t) - z_0) + z_0 \end{array}\right.$$

est bien continue. On en déduit que le domaine U est simplement connexe.

THÉORÈME 4.24. Un domaine U de $\hat{\mathbf{C}}$ est simplement connexe si et seulement si son complémentaire $\hat{\mathbf{C}} \setminus U$ est connexe.

THÉORÈME 4.25. Soit U un domaine de $\mathbf{C}$. Soient $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to U$ deux chemins homotopes dans U et $f \in \mathscr{O}(U)$. Alors

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Preuve Pour simplifier la preuve, on suppose que les deux chemins sont de classe $\mathscr{C}^2$. On considère une homotopie $h\colon (s,t) \longmapsto \gamma_s(t)$ une homotopie entre ces deux chemins. Pour $s \in [0,1]$, on a

$$I_s := \int_{\gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(h(s,t))\partial_t h(s,t)\,\mathrm{d}t.$$

En dérivant puis en intégrant par parties, on a

$$\partial_s I_s = \int_0^1 f'(h)\partial_s h(s,t)\partial_t h(s,t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(h)\partial_{st} h(s,t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$[f(h(s,t))\partial_s(s,t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 f(z)\partial_{ts} h(s,t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(h)\partial_{st}(s,t)\,\mathrm{d}t = 0$$

car la fonction h est de classe $\mathscr{C}^2$. De plus, on a

$$\int_0^1 f'(h)\partial_s h(s,t)\partial_t h(s,t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit que l'application $s \longmapsto I_s$ est constante ce qui assure le théorème. □

COROLLAIRE 4.26. Soient U un domaine simplement connexe, $f \in \mathscr{O}(U)$ et $\gamma\colon [0,1] \to U$ un chemin. Alors

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

COROLLAIRE 4.27. Soient U un domaine simplement connexe et $f \in \mathscr{O}(U)$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Alors il existe $g \in \mathscr{O}(U)$ telle que $\exp g = f$.

Preuve On considère la fonction $f'/f \in \mathscr{O}(U)$. Soient $z_0, z \in U$. On choisit un chemin γ reliant z_0 à z et on pose

$$g(z) := \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Cette fonction $g\colon U \to \mathbf{C}$ est bien définie (elle ne dépend pas des chemins γ choisis) car le domaine U est simplement connexe. Maintenant, on a

$$\left(\frac{f}{\exp g}\right)' = \frac{f'\exp g - fg'\exp g}{\exp 2g} = 0.$$

Comme U est connexe, il existe une constante $C \in \mathbf{C}$ tel que $f = C\exp g$. Comme f ne s'annule pas, on a $C \neq 0$ et on peut l'écrire sous la forme $C = e^\lambda$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$. On obtient alors $f = \exp \lambda g$. □

4.4.3 La preuve

Si $U = \hat{\mathbf{C}}$, alors on n'a rien à montrer. S'il existe $p \in \hat{\mathbf{C}}$ tel que $U = \hat{\mathbf{C}} \setminus \{p\}$, alors l'application $z \longmapsto 1/(z-p)$ est un biholomorphisme de U dans $\mathbf{C}$. On suppose alors $\sharp(\hat{\mathbf{C}} \setminus U) \geqslant 2$. On peut faire deux hypothèses supplémentaires :

– quitte à utiliser le cas $U = \hat{\mathbf{C}} \setminus \{p\}$, on peut supposer $\infty \notin U$;
– on peut supposer que le domaine U est borné dans $\mathbf{C}$.

En effet, montrons qu'on peut supposer le second point. Soit $b \in \mathbf{C} \setminus U$. La fonction $z \longmapsto z - b$ ne s'annule pas sur U, donc il existe une fonction holomorphe $g \colon U \to \mathbf{C}$ telle que

$$\exp g(z) = 1/(z-b), \quad z \in U.$$

Alors la fonction g est injective car la fonction exponentielle l'est sur $\mathbf{C}$. Montrons que son image est contenu dans une bande. En effet, pour tout $\omega \in g(U)$, on a $\omega + 2i\pi \notin g(U)$ car, si $\omega + 2i\pi \in g(U)$, alors il existerait $z_1, z_2 \in U$ tels que $\omega = g(z_1)$ et $\omega + 2i\pi = g(z_2)$, donc $1/(z_1 - b) = 1/(z_2 - b)$, donc $z_1 = z_2$ ce qui est impossible.

On construit maintenant le domaine borné recherché. D'après le théorème de l'application ouverte, il existe $\omega \in \mathbf{C}$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{D}(\omega, r) \subset g(U)$. Alors la remarque précédente donne $\mathrm{D}(\omega + 2i\pi, r) \cap g(U) = \emptyset$. En composant g avec l'application $h \colon z \longmapsto 1/[z - (\omega + 2i\pi)]$, on obtient un biholomorphisme de U dans

$$V \subset h(\hat{\mathbf{C}} \setminus \mathrm{D}(\omega + 2i\pi, r)) = \mathrm{D}(0, 1/r)$$

qui est donc borné. Finalement, on peut supposer que le domaine U est borné dans $\mathbf{C}$.

On peut supposer $c = 0$ dans le théorème. On veut utiliser le théorème de MONTEL. Soit $M > 0$ une constante telle que $U \subset \mathrm{D}(0, M)$. On considère A l'ensemble des fonctions holomorphe injective $f \in \mathscr{O}(U)$ telle que

$$|f| < 1, \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) \geqslant 1/M.$$

Cet ensemble est non vide car il contient la fonction $z \mapsto z/M$. De plus, il est borné. Enfin, montrons qu'il est fermé. Soient $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de A qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathscr{O}(U)$. Alors $f(0) = 0$ et $f'(0) \geqslant 1/M$. En particulier, la fonction f est non constante et, comme les fonctions f_n sont injectives, la limite est injective (cf. corollaire 3.5). Comme $|f_n| < 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $|f| \leqslant 1$. Par le principe du maximum, on obtient $|f| < 1$. D'où $f \in A$ ce qui montre que l'ensemble A est fermé. Le théorème de MONTEL assure alors qu'il est compact. Comme l'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathscr{O}(U) \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \quad f \longmapsto |f'(0)| \end{array} \right.$$

est continue, sa restriction à A atteint son maximum en une fonction $F \in A$.

Montrons que la fonction $F \colon U \to \mathbb{D}$ est surjective. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle n'est pas surjective. Soit $\omega_0 \in \mathbb{D} \setminus F(U)$. Alors la fonction

$$\left| \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{D}, \\ z \longmapsto \dfrac{F(z) - \omega_0}{1 - \overline{\omega_0} F(z)} \end{array} \right.$$

ne s'annule pas. On note $G \colon U \to \mathbb{D}$ une racine carrée de cette dernière (qui existe bien d'après le corollaire 4.27). Alors l'application

$$g \colon \left| \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{D}, \\ z \longmapsto \dfrac{|G'(0)|}{G(0)} \dfrac{G(z) - G(0)}{1 - \overline{G(0)} G(z)} \end{array} \right.$$

est injective. En calculant, on trouve $g \in A$ et

$$g'(0) = \frac{1 + |\omega_0|}{2\sqrt{|\omega_0|}} F'(0) \quad \text{avec} \quad \frac{1 + |\omega_0|}{2\sqrt{|\omega_0|}} > 1$$

ce qui est impossible. Ainsi, la fonction F est surjective.

L'unicité provient du lemmes de SCHWARZ. Soient $f_1, f_2 \colon U \to \mathbb{D}$ deux tels biholomorphismes. On considère le biholomorphisme $\varphi := f_1 \circ f_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Alors 0 est un point fixe de φ dans $\mathbb{D}$ et on a $\varphi'(z_0) > 0$. Il y a donc trois contraintes, donc le lemme de SCHWARZ assure $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$. D'où l'unicité.

4.5 EXTENSION CONTINUE ET REPRÉSENTATION CONFORME

Soit U un domaine de $\hat{\mathbf{C}}$. On considère une fonction holomorphe de U dans $\mathbb{D}$. Peut-on la prolonger *a minima* continûment en une fonction de $\overline{U}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$? Ce n'est pas toujours le cas.

DÉFINITION 4.28. Un point $b \in \partial U$ est dit *simple* si, pour toutes suites $(b_n)_{n \in U}$ de U convergeant vers b, il existe un chemin continu $\gamma \colon [0,1] \to \overline{U}$ et une suite croissante $(t_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de $[0,1]$ tels que
– pour tout $i \in \mathbf{N}$, on ait $\gamma(t_i) = b_i$;

– $\gamma([0,1[) \subset U$;
– $\gamma(1) = b$.

THÉORÈME 4.29. Soient U un domaine simplement connexe de $\hat{\mathbf{C}}$ et $f : U \to \mathbb{D}$ une représentation conforme. Soit $b \in \partial U$ un point simple. Alors la fonction f s'étend continûment à $U \cup \{b\}$ avec $|f(b)| = 1$.

Preuve Admis, cf. le livre de RUDIN, pp. 289–290. □

COROLLAIRE 4.30. Soient U un domaine simplement connexe de $\hat{\mathbf{C}}$ et $f : U \to \mathbb{D}$ une représentation conforme. Si tous les points de ∂U sont simples, alors la fonction f s'étend en un unique homéomorphisme $f : \overline{U} \to \overline{\mathbb{D}}$.

On va regarder la représentation conforme du rectangle.

4.6 PRINCIPE DE RÉFLEXION

Soit $d \subset \mathbf{C}$ une droite. On note $i_d : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ la réflexion d'axe d. On note $b \in i\mathbf{R}$ l'ordonnée à l'origine de la droite et $\theta \in \mathbf{R}$ l'angle entre $\mathbf{R}$ et d. L'application

$$h : \left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto e^{-i\theta}(z-b) \end{array} \right.$$

est une isométrie du plan qui envoie d sur $\mathbf{R}$. En particulier, on a $h \circ i_d \circ h^{-1}(z) = \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. On en déduit alors que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a

$$\begin{aligned} i_d(z) &= h^{-1}(\overline{h(z)}) \\ &= e^{2i\theta}\overline{z} + (1 + e^{2i\theta})b \\ &= \alpha\overline{z} + \beta. \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.31. Soit U un domaine de $\mathbf{C}$ symétrique par rapport à une droite d. On note $P \subset \mathbf{C}$ un des deux demi-plans ouverts définies par d. Soit $f : U \cap \overline{P} \to \mathbf{C}$ une fonction continue, holomorphe sur $U \cap P$ et à valeurs réelles sur $U \cap d$. Alors cette dernière se prolonge en une fonction holomorphe sur U.

Preuve On considère la fonction $\tilde{f} : U \to \mathbf{C}$ définie par

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in U \cap \overline{P}, \\ \overline{f(i_d(z))} & \text{si } z \in U \cap (\mathbf{C} \setminus P). \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie sur la droite d car la fonction f est réelle sur d. De plus, elle est clairement holomorphe sur $U \cap P$ et, puisque on a $\tilde{f}(z) = \overline{f(\alpha\overline{z} + \beta)}$ pour tout $z \in U \cap (\mathbf{C} \setminus \overline{P})$, elle est aussi holomorphe sur $U \cap (\mathbf{C} \setminus \overline{P})$. Montrons qu'elle est holomorphe sur U. Par la caractérisation de MORERA, il suffit de montrer que, pour tout disque $\overline{D} \subset U$, on a

$$\int_{\partial\overline{D}} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Si $\overline{D} \subset (U \cap P) \cup (D \cap (\mathbf{C} \setminus \overline{P})$, c'est bon. Soit $\varepsilon > 0$. Sinon, on considère deux demi-disques D_1 et D_2 comme suivant. Par holomorphie, on a

$$\int_{\partial\overline{D}_1} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\overline{D}_2} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Notons $A_i(\varepsilon)$ et $I_i(\varepsilon)$ l'arc de cercle et le segment de D_i pour $i \in \{1,2\}$. Notons également $I_0 := \overline{D}_1 \cap d$. Alors on peut montrer que

$$\int_{I_1(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{I_0} f(z)\,\mathrm{d}z$$

et de même pour $I_2(\varepsilon)$: ceci se montre avec le théorème de convergence dominée. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{A_1(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z + \int_{A_2(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{A_1(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z + \int_{I_1(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z + \int_{A_2(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z + \int_{I_2(\varepsilon)} \tilde{f}(z)\,\mathrm{d}z\right) = 0. \end{aligned}$$
□

Construction géométrique d'une fonction elliptique

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. On pose $\Omega := a\mathbf{Z} + ib\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$. On veut construire une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ telle que, pour tous $z \in \mathbf{C}$ et $\omega \in \Omega$, on a $f(z+\omega) = f(z)$. En réitérant les réflexions de SCHWARZ, on construit une fonction méromorphe qui est Ω-périodique, paire et possède des pôles d'ordre 2 sur Ω.

PROPOSITION 4.32. Soit U un domaine de $\hat{\mathbf{C}}$ invariant par une inversion $i_{\mathscr{C}_1}$ d'un cercle $\mathscr{C}_1 = \partial D_1$, *i. e.*

$$i_{\mathscr{C}_1}(z) = \frac{\overline{z}z_1 - |z_1|^2 + r_1}{\overline{z} - \overline{z_0}}.$$

Soit $\mathscr{C}_2$ un autre cercle. Soit $f \colon U \cap \overline{D_1} \to \hat{\mathbf{C}}$ une fonction continue, holomorphe sur $U \cap D_1$ telle que $f(U \cap \mathscr{C}_1) \subset \mathscr{C}_2$. Alors cette dernière se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f} \colon U \to \hat{\mathbf{C}}$ en posant

$$\tilde{f}(z) = i_{\mathscr{C}_2} \circ f \circ i_{\mathscr{C}_1}(z) \quad \text{pour tout } z \in U \setminus \overline{D_1}.$$