

Introduction à la géométrie algébrique

Tobias SCHMIDT

Master 2 de mathématiques fondamentales · Université de Rennes 1
Notes prises par Téofil ADAMSKI (version du 13 décembre 2022)



Sommaire

1	Variétés algébriques affines	
1.1	Ensembles algébriques affines	1
1.2	Le Nullstellensatz d’Hilbert	2
1.3	Algèbre de fonctions et correspondance fonctorielle	3
2	Spectre d’un anneau et faisceaux	
2.1	Introduction	5
2.2	Spectre d’un anneau	6
2.3	Propriétés topologiques du spectre	8
2.4	Faisceau naturel sur le spectre	11
3	Théorie générale des faisceaux, espaces localement annelés, schémas	
3.1	Morphisme de faisceaux, tige	13
3.2	Espaces localement annelés et schémas	16
3.3	Équivalence entre les catégories des anneaux et des schémas affines	19
3.4	Points et produits fibrés	22
3.5	L’espace projectif	24
3.6	Faisceaux quasi-cohérents et immersions fermées	26
3.6.1	Faisceaux quasi-cohérents	26
3.6.2	Immersion fermés	28
3.7	Fibrés vectoriels et groupe de Picard	30

Chapitre 1

Variétés algébriques affines

1.1	Ensembles algébriques affines	1
1.2	Le Nullstellensatz d'Hilbert	2
1.3	Algèbre de fonctions et correspondance fonctorielle	3

La géométrie algébrique est l'étude des équations polynomiales et de leurs ensembles de solutions. Dans ce chapitre, on considère un corps algébriquement clos k et on fixe un entier $n \geq 1$.

1.1. Ensembles algébriques affines

Définition 1.1. Une partie $V \subseteq k^n$ est un *ensemble algébrique affine* s'il peut s'écrire sous la forme

$$V = V(M) \quad \text{avec} \quad V(M) := \{x \in k^n \mid \forall f \in M, f(x) = 0\}$$

pour une certaine partie $M \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$.

Dans la suite, on notera $k[\underline{X}]$ l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$. On peut déjà tirer de cette définition des propriétés basiques des ensembles algébriques affines.

Proposition 1.2. 1. Pour $M \subseteq k[\underline{X}]$, on a $V(M) = V(\langle M \rangle)$.

2. Pour $M \subseteq k[\underline{X}]$, il existe des polynômes $f_1, \dots, f_m \in M$ tels que $V(f_1, \dots, f_m) = V(M)$.

Démonstration. 1. Comme $M \subseteq \langle M \rangle$, on obtient $V(M) \supseteq V(\langle M \rangle)$. Réciproquement, on considère un élément $f \in \langle M \rangle$ qu'on écrit sous la forme $f = \sum_{i=1}^m f_i g_i$ avec $f_i \in M$ et $g_i \in k[\underline{X}]$. Pour tout élément $x \in V(M)$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) g_i(x) = 0$ et cela montre que $x \in V(\langle M \rangle)$.

2. Comme l'anneau k est noethérien, le théorème de la base de Hilbert assure qu'il en va de même de l'anneau $k[\underline{X}]$. Soient $f_1, \dots, f_m \in \langle M \rangle$ des générateurs de l'idéal $\langle M \rangle$. La première partie donne alors

$$V(M) = V(\langle M \rangle) = V(f_1, \dots, f_m). \quad \diamond$$

Exemples. – Un sous-ensemble fini de k^n est un ensemble algébrique affine.

- Un ensemble algébrique affine de k est soit fini soit le corps k .
- L'ensemble $V(X + Y)$ est une droite du plan \mathbf{R}^2 .
- L'ensemble $V(X^2 + Y^2 + 1)$ est vide sur le corps \mathbf{R} bien qu'il ne le soit pas sur le corps \mathbf{C} .
- L'ensemble $V(X^2 - Y^2)$ est la réunion de deux droites.

Proposition 1.3. Il existe une unique topologie sur l'ensemble k^n dont les fermés sont exactement les ensembles algébriques affines, appelée la *topologie de Zariski*.

Démonstration. Décrétons que les fermés sont les ensembles algébriques affines. Vérifions que cette famille définit bien une topologie.

- D'abord, les ensembles \emptyset et k^n appartiennent bien à cette famille puisque ce sont respectivement les ensembles $V(1)$ et $V(0)$.
- Montrons que cette famille est stable par intersection. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $k[\underline{X}]$. La propriété cherchée découle de la formule

$$\bigcap_{i \in I} V(M_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right).$$

- Montrons enfin que cette famille est stable par réunion finie. Soient $M_1, M_2 \subseteq k[\underline{X}]$ deux parties. Vérifions alors que l'ensemble $V(M_1) \cup V(M_2)$ est encore un ensemble algébrique affine. Il est clair que $V(M_1) \cup V(M_2) \subseteq V(M_1 \cdot M_2)$ avec

$$M_1 \cdot M_2 := \{fg \mid f \in M_1, g \in M_2\}.$$

Réciproquement, soit $x \in V(M_1 \cdot M_2)$. On suppose que $x \notin V(M_1)$. Montrons que $x \in V(M_2)$. Soit $f \in M_1$ un polynôme vérifiant $f(x) \neq 0$. Pour tout polynôme $g \in M_2$, comme $fg \in M_1 \cdot M_2$, on peut écrire $f(x)g(x) = 0$ si bien que $g(x) = 0$ par intégrité. D'où $x \in V(M_2)$. \diamond

Définition 1.4. L'espace topologique k^n ainsi obtenu est appelé l'*espace affine* de dimension n sur le corps k . On le note $\mathbf{A}^n(k)$.

1.2. Le Nullstellensatz d'Hilbert

On rappelle maintenant la notion de radical d'un idéal. Soit A un anneau commutatif unitaire. Le *radical* d'un idéal $I \subseteq A$ est l'idéal

$$\sqrt{I} := \{f \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}^*, f^n \in I\}.$$

Notons que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Proposition 1.5. Soit $I \subseteq k[\underline{X}]$ un idéal. Alors

$$V(I) = V(\sqrt{I}).$$

Démonstration. L'inclusion $V(I) \supseteq V(\sqrt{I})$ découle de l'inclusion claire $I \subseteq \sqrt{I}$. Réciproquement, il suffit d'utiliser l'intégrité de l'anneau k . \diamond

Théorème 1.6 (*Hilbert's Nullstellensatz*). L'application

$$\Phi: I \longmapsto V(I)$$

entre l'ensemble des idéaux $I \subseteq k[\underline{X}]$ vérifiant $I = \sqrt{I}$ et l'ensemble des fermés de l'espace affine $\mathbf{A}^n(k)$ est une bijection décroissante pour l'inclusion.

Dans la suite, on va vérifier que l'inverse est l'application

$$\Phi^{-1}: V \longmapsto \{f \in k[\underline{X}] \mid \forall x \in V, f(x) = 0\}.$$

Corollaire 1.7. Soit $I \subsetneq k[\underline{X}]$ un idéal. Alors il existe un point $x \in k^n$ vérifiant

$$\forall f \in I, \quad f(x) = 0,$$

c'est-à-dire $V(I) \neq \emptyset$.

Démonstration. Comme l'idéal I est propre, il ne contient pas le neutre 1, donc le radical \sqrt{I} ne le contient pas non plus si bien que $\sqrt{I} \subsetneq k[\underline{X}]$. D'après le Nullstellensatz, on obtient alors

$$V(I) = V(\sqrt{I}) \neq V(k[\underline{X}]) = \emptyset. \quad \diamond$$

Lemme 1.8. Soit R une k -algèbre non nulle de type fini. Alors il existe un morphisme de k -algèbres $R \longrightarrow k$.

Démonstration. Le lemme de Zorn assure qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m} \subseteq R$. Le quotient R/\mathfrak{m} est alors un corps. On peut donc supposer que l'anneau R est un corps. D'après le lemme de

normalisation de Noether, il existe alors un entier $m \geq 0$ et un morphisme de k -algèbres injectif $k[X_1, \dots, X_m] \rightarrow R$ qui est fini, c'est-à-dire que le $k[X_1, \dots, X_m]$ -module R est de type fini. Montrons que $m = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $m > 0$. Dans ce cas, l'image de l'élément $X_1 \in k[X_1, \dots, X_m]$ admet un inverse $x \in R$. Avec l'hypothèse de finitude, il existe des éléments $g_1, \dots, g_d \in k[X_1, \dots, X_m]$ tels que

$$x^d + g_1 x^{d-1} + \dots + g_d = 0.$$

En multipliant cette égalité par l'élément x , on obtient qu'un polynôme de degré strictement positif est nul ce qui est impossible. Ainsi $m = 0$ et la k -algèbre R est une extension finie du corps k . En particulier, l'extension R/k est algébrique si bien que $k \simeq R$ ce qui conclut. \diamond

Preuve du Nullstellensatz. Soit $I \subseteq k[X]$ un idéal quelconque. On admet provisoirement que

$$\sqrt{I} = \Phi^{-1}(V(I)). \quad (*)$$

Alors $\Phi^{-1} \circ \Phi = \text{id}$ puisque

$$\Phi^{-1} \circ \Phi(I) = \Phi^{-1}(V(I)) = \sqrt{I} = I.$$

De plus, l'application Φ est clairement surjective en utilisant la définition d'un fermé pour la topologie de Zariski et le fait $V(I) = V(\sqrt{I})$ pour un idéal I . Ceci conclut la bijectivité de l'application Φ .

Il reste à établir l'égalité (*). Soit $f \in \sqrt{I}$. Montrons que $f \in \Phi^{-1}(V(I))$. Comme $f \in \sqrt{I}$, il existe un entier $m > 0$ tel que $f^m \in I$. Soit $x \in V(I)$. Alors $f^m(x) = 0$, donc $f(x) = 0$. D'où $f \in \Phi^{-1}(V(I))$. Réciproquement, soit $f \notin \sqrt{I}$. Montrons que $f \notin \Phi^{-1}(V(I))$. Il suffit de trouver un point $x \in V(I)$ tel que $f(x) \neq 0$. On note \bar{f} la classe $f + I$ dans l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]/I$. On considère la localisation R de l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]/I$ par rapport à l'ensemble multiplicatif $S := \{1, \bar{f}, \bar{f}^2, \dots\}$. Alors $R \neq 0$ puisque si $R = 0$, alors $0 \in S$, donc il existe un entier $m > 0$ tel que $f^m \in I$ ce qui est impossible puisque $f \notin \sqrt{I}$. De plus, la k -algèbre est de type fini puisqu'elle est engendrée par les éléments \bar{X}_i et \bar{f}^{-1} . Par le lemme précédent, il existe alors un morphisme de k -algèbres $\mathfrak{p}: R \rightarrow k$. On pose $x_i := \mathfrak{p}(\bar{X}_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $y := \mathfrak{p}(\bar{f}^{-1})$. Alors l'élément $x := (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ vérifie $f(x) \times y = 1$ et donc $f(x) \neq 0$. Comme $g(x) = 0$ pour tout $g \in I$, on obtient aussi $f(x) \neq 0$. Ceci conclut. \diamond

1.3. Algèbre de fonctions et correspondance fonctorielle

On peut même avoir une correspondance un peu plus riche.

Définition 1.9. L'algèbre de fonctions sur un ensemble algébrique affine $V \subseteq \mathbf{A}^n(k)$ est le quotient

$$\mathcal{O}(V) := k[X]/\{f \in k[X] \mid \forall x \in V, f(x) = 0\}.$$

Notons que l'anneau $\mathcal{O}(V)$ est réduit, c'est-à-dire que, pour tout élément $f \in \mathcal{O}(V)$, la relation $f^m = 0$ dans $\mathcal{O}(V)$ implique $f = 0$. C'est également une k -algèbre de type fini.

Définition 1.10. Un morphisme entre deux ensembles algébriques affines $V \subseteq \mathbf{A}^n(k)$ et $W \subseteq \mathbf{A}^m(k)$ est une application $f: V \rightarrow W$ telle qu'il existe des polynômes $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Les ensembles algébriques affines munis de leurs morphismes forment une catégorie $\mathbf{AffVar}(k)$.

Remarque. Les polynômes f_i de la définition ne sont pas déterminés par le morphisme f , mais leurs images dans le quotient $\mathcal{O}(V)$ le sont. Notons qu'un morphisme $f: V \rightarrow W$ détermine un morphisme de k -algèbres $\tilde{f}: k[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow \mathcal{O}(W)$ tels que

$$\tilde{f}(Y_i) = \bar{f}_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

qui lui-même induit un morphisme $f^*: \mathcal{O}(W) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ qui fasse commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 k[\mathbf{Y}] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{O}(V) \\
 \downarrow & \nearrow f^* & \\
 \mathcal{O}(W) & &
 \end{array}$$

Corollaire 1.11. La catégorie $\mathbf{AffVar}(k)$ et la catégorie des k -algèbres réduites de type fini sont équivalentes par la foncteur contravariant

$$V \longmapsto \mathcal{O}(V) \quad \text{et} \quad f \longmapsto f^*.$$

Démonstration. Notons F ce foncteur. Montrons qu'il est pleinement fidèle. Soient V et W deux sous-ensembles algébriques affines. Montrons l'injectivité. Soient $f, f': V \rightarrow W$ deux morphismes tels que $f^* = g^*$. Montrons que $f = g$. Soient $g \in \mathcal{O}(W)$ et $x \in V$. Alors

$$g(f_1, \dots, f_m)(x) = f^*(g)(x) = f'^*(g)(x) = g(f'_1, \dots, f'_m)(x).$$

Pour $g = \overline{Y}_i$, on obtient $f(x) = f'(x)$ et donc $f = f'$. D'où l'injectivité.

Montrons la surjectivité. Soit $G: \mathcal{O}(W) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ un morphisme dont on note \overline{f}_i l'image de la classe \overline{Y}_i . On obtient une application $(f_1, \dots, f_m): k^n \rightarrow k^n$. Restreinte à V , on trouve donc un morphisme $f: V \rightarrow W$. Montrons que $f^* = G$. Pour tout point $x \in V$, on a

$$f^*(\overline{Y}_i)(x) = Y_i \circ f(x) = \overline{f}_i(x) = G(\overline{Y}_i)(x),$$

ce qui donne $f^* = G$. D'où la surjectivité. Ainsi le foncteur F est pleinement fidèle.

Enfin, montrons qu'il est essentiellement surjectif. Soit R une k -algèbre réduite de type fini. Alors $R \simeq k[X]/I$ pour un certain idéal radical $I \subseteq k[X]$. D'après le Nullstellensatz, on peut écrire $I = \mathbf{I}(V)$. Comme $V = \mathbf{V}(I)$, on obtient $R \simeq \mathcal{O}(V)$. Ainsi le foncteur est essentiellement surjectif. \diamond

Chapitre 2

Spectre d'un anneau et faisceaux

2.1	Introduction	5
2.2	Spectre d'un anneau	6
2.3	Propriétés topologiques du spectre	8
2.4	Faisceau naturel sur le spectre	11

2.1. Introduction

On aimerait étendre la correspondance préférences à des anneaux plus généraux. Mais notons qu'un anneau n'a pas de corps de base k . Dans la suite, tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires sauf mention du contraire; les morphismes d'anneaux conservent ainsi le neutre multiplicatif. Pour commencer, donnons une définition naïve de la notion de spectre.

Définition 2.1. Le *spectre* d'un anneau A est l'ensemble $\text{Spec } A$ des morphismes d'anneaux $A \rightarrow K$ pour un corps K où l'on identifie deux morphismes d'anneaux $A \rightarrow K$ et $A \rightarrow K'$ s'il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 & & K' \\
 & \nearrow & \uparrow \\
 A & & \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & K
 \end{array}$$

Le problème de cette définition vient du fait que l'objet $\text{Spec } A$ n'est pas un ensemble.

Proposition 2.2. L'application

$$f \mapsto \ker(f)$$

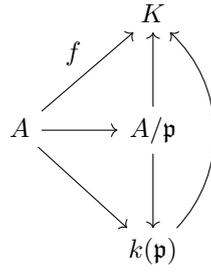
réalise une bijection bien définie entre $\text{Spec } A$ et l'ensemble des idéaux premiers de A .

Démonstration. D'abord, pour un morphisme d'anneaux $f: A \rightarrow K$, son noyau $\ker(f)$ est bien un idéal propre de A et il est premier en utilisant l'intégrité du corps k .

L'application considérée est bien définie. En effet, soient $f: A \rightarrow K$ et $f': A \rightarrow K'$ deux morphismes d'anneaux. Comme le morphisme $K \rightarrow K'$ est injectif, on obtient $\ker(f) = \ker(f')$.

Montrons maintenant qu'elle est bijective en construisant une application inverse. Soit $\mathfrak{p} \subseteq A$ un idéal premier. Alors on obtient un morphisme $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow k(\mathfrak{p}) := \text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ puis un morphisme $f_{\mathfrak{p}}: A \rightarrow k(\mathfrak{p})$ qui vérifie $\ker(f_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$. Cela montre la surjectivité.

Enfin, vérifions l'injectivité. Soit $f: A \rightarrow K$ un morphisme d'anneaux de noyau \mathfrak{p} . Alors on obtient le diagramme commutatif



qui montre que $f \sim f_p$. ◇

2.2. Spectre d'un anneau

On utilise cette proposition pour redéfinir le spectre. Ce dernier sera cette fois-ci bien défini.

Définition 2.3. Le *spectre* d'un anneau A est l'ensemble $\text{Spec } A$ de ses idéaux premiers. Le *corps résiduel* d'un élément $x \in \text{Spec } A$ est le corps $k(x) := \text{Frac}(A/x)$. Pour un élément $x \in \text{Spec } A$, la projection canonique $A \rightarrow k(x)$ est notée sous la forme

$$g \mapsto g(x).$$

Un élément de l'anneau A est donc considérée comme une fonction sur l'ensemble $\text{Spec } A$ est à valeur dans le corps $k(x)$.

Exemple. Le spectre de l'anneau \mathbf{Z} est constitué des idéaux $\langle p \rangle$ pour un nombre premier p et de l'idéal nul $\langle 0 \rangle$. Les corps résiduels sont alors les corps

$$k(\langle p \rangle) = \mathbf{F}_p \quad \text{et} \quad k(\langle 0 \rangle) = \mathbf{Q}.$$

Maintenant, on va faire le lien entre la notion de spectre et celle d'ensemble algébrique affine dans l'espace affine k^n lorsque le corps k est algébriquement clos.

Définition 2.4. Le *spectre maximal* d'un anneau A est l'ensemble $\text{Spec}_{\max} A$ des idéaux maximaux.

Proposition 2.5. Soient k un corps algébriquement clos et A une k -algèbre non nulle de type fini. Soit $I \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ un idéal vérifiant $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$. Alors l'application

$$\left| \begin{array}{l} V(I) \simeq \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k) \longrightarrow \text{Spec}_{\max} A \subseteq \text{Spec } A, \\ f \longmapsto \ker(f) \end{array} \right.$$

est une bijection.

Démonstration. Cette application est bien définie puisque le noyau d'un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow k$ est un idéal maximal de A . Dans l'autre sens, pour un idéal $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\max} A$, on obtient un isomorphisme de k -algèbres $A/\mathfrak{m} \simeq k$ et donc un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow k$ de noyau \mathfrak{m} . ◇

L'inconvénient du spectre maximal est qu'il n'est pas « fonctoriel ». Par exemple, considérons l'inclusion $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$. Elle induit une application $\text{Spec } \mathbf{Q} = \{\langle 0 \rangle\} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$, mais elle ne peut pas se restreindre aux spectres maximaux puisque $\langle 0 \rangle \notin \text{Spec}_{\max} \mathbf{Z}$.

Proposition 2.6. Soit $f: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Alors l'application

$$\text{Spec } f: \left| \begin{array}{l} \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A, \\ \mathfrak{q} \longmapsto f^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array} \right.$$

est bien définie.

Remarque. Pour tout élément $a \in A$ et tout idéal $x \in \text{Spec } B$, on vérifie la formule

$$f(a)(x) = a(\text{Spec } f(x)).$$

Remarque. Soit A un anneau. Il existe toujours un morphisme canonique $\mathbf{Z} \longrightarrow A$ et donc une unique application $\text{Spec } A \longrightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$.

Toute la géométrie algébrique vit sur le spectre de l'anneau \mathbf{Z} . On veut munir les spectres d'une topologie. Soit A une k -algèbre non nulle de type fini. On la note $A = k[\underline{X}]/I$ pour un idéal $I \subseteq k[\underline{X}]$. La topologie sur l'espace algébrique affine $V(I)$ induit une topologie sur l'ensemble $\text{Spec } A$ grâce à la proposition 2.5.

Définition 2.7. Soit A un anneau. Le *lieux d'annulation* d'une partie $M \subseteq A$ est l'ensemble

$$V(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid M \subseteq \mathfrak{p}\} = \{x \in \text{Spec } A \mid \forall g \in M, g(x) = 0\}.$$

Vérifions que les deux ensembles de la définition coïncide. Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ un idéal vérifiant $M \subseteq \mathfrak{p}$. Alors pour tout élément $g \in M$, on a $g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, donc $g(\mathfrak{p}) = 0$. Cela montre l'inclusion \subseteq . Réciproquement, soit $x \in \text{Spec } A$ un point tel que

$$\forall g \in M, \quad g(x) = 0.$$

Alors pour tout $g \in M$, on a $g = 0$ dans $k(x)$, donc $g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, donc $g \in \mathfrak{p}$. D'où $M \subseteq \mathfrak{p}$ ce qui conclut l'inclusion \supseteq .

Exemple. Avec l'anneau \mathbf{Z} , on trouve $V(\{12\}) = \{\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle\}$ et $V(\{0\}) = \text{Spec } \mathbf{Z}$.

Définition 2.8. Il existe une unique topologie sur l'ensemble $\text{Spec } A$ tel que les fermés soient exactement les ensembles de la forme $V(M)$ avec $M \subseteq A$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle qui construit la topologie de Zariski. \diamond

Remarque. Soit $f: A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Alors l'application induite

$$\text{Spec } f: \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A$$

est continue. En effet, pour un fermé $V(M) \subseteq \text{Spec } A$, on vérifie que sa préimage par l'application f est aussi un fermé puisqu'elle vaut

$$(\text{Spec } f)^{-1}(V(M)) = V(f(M))$$

Exemple. Le point $\langle 0 \rangle \in \text{Spec } \mathbf{Z}$ est inclus dans tout ouvert non vide. En effet, si $V(M) \neq \text{Spec } \mathbf{Z}$, alors $M \neq \{0\}$, donc $M \not\subseteq \langle 0 \rangle$, donc $\langle 0 \rangle \notin V(M)$.

Remarque. Pour un corps algébriquement clos et dénombrable k , il existe une bijection

$$\text{Spec } k[X] \simeq \text{Spec } \mathbf{Z}.$$

Un espace topologique est *quasi-compact* s'il est compact mais sans la propriété de séparation.

Proposition 2.9. L'espace $\text{Spec } A$ est quasi-compact.

Démonstration. Soit $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement par des ouverts. On note $Z_i := \text{Spec } A \setminus U_i = V(M_i)$ avec $M_i \subseteq k[\underline{X}]$. Alors

$$\emptyset = V\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right).$$

Soit $I := \langle \bigcup_{i \in I} M_i \rangle$. Alors $\emptyset = V(I)$. Supposons que $I \neq A$. Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal. Alors $I \subseteq \mathfrak{m} \subseteq A$, donc $\mathfrak{m} \in V(I)$ ce qui est impossible. Donc $I = A$. Soit $a \in A$. Il existe alors $f_1, \dots, f_m \in \bigcup_{i \in I} M_i$ et $g_1, \dots, g_m \in A$ tels que

$$1 = \sum_{i=1}^m f_i g_i.$$

Soit $J \subseteq I$ une partie finie telle que $f_1, \dots, f_m \in \bigcup_{i \in J} M_i$. Alors

$$\emptyset = V(A) = V\left(\bigcup_{i \in J} M_i\right) = \bigcap_{i \in J} V(M_i),$$

donc

$$\text{Spec } A = \bigcup_{i \in J} U_i. \quad \diamond$$

2.3. Propriétés topologiques du spectre

Proposition 2.10. Soient $M \subseteq A$ une partie et $I \subseteq A$ l'idéal qu'elle engendre.

1. Alors $V(M) = V(I) = V(\text{rad } I)$.
2. Soit $f: A \rightarrow A/I$ la projection. Alors l'application

$$\text{Spec } f: \text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec } A$$

induit un homéomorphisme sur $V(I) \subseteq \text{Spec } A$. En particulier, on a

$$\text{Spec}(A_{\text{rad}}) \simeq V(\text{Nil } A) = \text{Spec } A.$$

3. Il existe une bijection entre l'ensemble des idéaux radicaux de A et l'ensemble des fermés de $\text{Spec } A$ donné par les correspondances

$$I \mapsto V(I) \quad \text{et} \quad V \mapsto I(V).$$

Démonstration. 1. Ce résultat est similaire à ce qu'on a fait au chapitre précédent.

2. L'application est donnée par la correspondance

$$\mathfrak{q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{q})$$

qui donne une bijection continue $\text{Spec}(A/I) \simeq V(I)$. Il reste à montrer que sa bijection réciproque est continue, c'est-à-dire qu'elle est fermée. Soit $Z \subseteq \text{Spec}(A/I)$ un fermé. On note $Z = V(\mathfrak{b})$ pour un idéal $\mathfrak{b} \subseteq A/I$. Soit $\mathfrak{b}' \in \text{Spec } A$ un idéal tel que $\mathfrak{b}' := f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$. Alors l'image $(\text{Spec } f)(Z) = V(\mathfrak{b})$ est un fermé.

3. Montrons que $\text{rad } I = I(V(I))$. Pour l'inclusion \subseteq , soit $f \in \text{rad } I$. Il existe un entier $m \geq 1$ tel que $f^m \in I \subseteq \bigcup_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = I(V(I))$. Réciproquement, soit $f \in I(V(I))$. Supposons par l'absurde que $f \notin \text{rad } I$. On pose $R := (A/I)[\bar{f}^{-1}]$. Comme $f \notin \text{rad } I$, on a $R \neq 0$, donc $\text{Spec } R \neq \emptyset$ car il existe un idéal maximal $\mathfrak{m} \subseteq R$. Soit $x \in \text{Spec } R$. Alors $f(x) \neq 0$ car $\bar{f} \in R^\times$. Soit $y \in \text{Spec } A$ l'image de l'élément x par l'application $\text{Spec } F: \text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } A$ induite par la projection $F: A \rightarrow R$. En particulier, pour $g \in I$, on a $g(y) = F(g)(x) = 0$, donc $y \in V(I)$. Mais $f(y) = (\bar{f}/1)(x) \neq 0$ ce qui est impossible car $f \in I(V(I))$. \diamond

Finalement, on a montré $I \circ V = \text{id}$. La preuve nous donne une idée quand $\text{Spec } A = \emptyset$ et quand

$$\forall x \in \text{Spec } A, \quad f(x) = 0.$$

Lemme 2.11. Soit $f \in A$. Alors

1. $\text{Spec } A = \emptyset$ si et seulement si $A = 0$;
2. $f \in A^\times$ si et seulement si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \text{Spec } A$;
3. $f \in \text{Nil}(A)$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \text{Spec } A$.

Démonstration. 1. C'est l'existence d'un idéal maximal.

2. Si $fg = 1$, alors $1 = (fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \in \text{Spec } A$, donc $f(x) \neq 0$. Réciproquement, on suppose $f \notin A^\times$. Alors $A/\langle f \rangle \neq 0$, donc $\text{Spec}(A/\langle f \rangle) \neq \emptyset$. Soit $x \in \text{Spec}(A/\langle f \rangle)$. Avec la projection $F: A \rightarrow A/\langle f \rangle$, on a

$$f((\text{Spec } F)(x)) = F(f)(x) = 0.$$

3. Soit $f \in \text{Nil}(A)$. Alors $f^m = 0$ pour $m \geq 1$, donc $f(x)^m = f^m(x) = 0$ dans $k(x)$ pour tout $x \in \text{Spec } A$, donc $f(x) = 0$. Réciproquement, soit $f \notin \text{Nil}(A)$. Alors $A[f^{-1}] \neq \emptyset$, donc $\text{Spec } A[f^{-1}] \neq \emptyset$. Soit $x \in \text{Spec } A[f^{-1}]$ et y l'image par $\text{Spec } A[f^{-1}] \rightarrow \text{Spec } A$. Alors $f(y) = (f/1)(x) \neq 0$. \diamond

Définition-proposition 2.12. Soit $f \in A$. Alors l'ensemble

$$D(f) := \text{Spec } A \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \{x \in \text{Spec } A \mid f(x) \neq 0\}$$

est un ouvert. De plus,

1. l'application $\text{Spec } \varphi: \text{Spec } A[f^{-1}] \rightarrow \text{Spec } A$ induite par le morphisme canonique $\varphi: A \rightarrow A[f^{-1}]$ est une immersion ouverte avec l'image $D(f)$;

2. la A -algèbre $A[f^{-1}]$ est initiale dans la catégorie des A -algèbres B telles que l'image de l'application $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ soit contenue dans $D(f)$.

Démonstration. 1. On rappelle que l'application $\text{Spec } \varphi$ induit une bijection entre l'ensemble $\text{Spec } A[f^{-1}]$ et l'ensemble des idéaux premiers qui ne contiennent pas l'élément f , c'est-à-dire une bijection continue

$$\text{Spec } A[f^{-1}] \longrightarrow D(f).$$

Elle est donnée par les associations

$$\mathfrak{q} \longmapsto \mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{q}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}[f^{-1}].$$

Il reste à vérifier que l'application est fermée. Soit $Z \subseteq \text{Spec } A[f^{-1}]$ un fermé qu'on note sous la forme $Z = V(M)$ avec $M \subseteq A[f^{-1}]$. On note ce dernier sous la forme

$$M = \{g_i/f^{m_i}\}_{i \in I}$$

avec $g_i \in A$ et $m_i \geq 0$. Soit $N := \{g_i\}_{i \in I} \subseteq A$. Alors

$$(\text{Spec } \varphi)(V(M)) = V(N) \iff V(M) = (\text{Spec } \varphi)^{-1}(V(N)).$$

Or

$$(\text{Spec } \varphi)^{-1}(V(N)) = \{\mathfrak{p}[f^{-1}] \mid \mathfrak{p} \in V(N)\} = \{\mathfrak{p}[f^{-1}] \mid M \subseteq \mathfrak{p}[f^{-1}]\} = V(M)$$

ce qui conclut.

2. Soit $\psi: A \rightarrow B$ une A -algèbre qui induit une application $\text{Spec } \psi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ dont l'image est contenue dans $D(f)$. Alors pour tous $f \in A$ et $x \in \text{Spec } B$, on a

$$\psi(f)(x) = f(\text{Spec } \psi(x)) \neq 0$$

car $\text{Spec } \psi(x) \subseteq D(f)$ car $f \notin \text{Spec } \psi(x)$. D'après le lemme précédent, on a donc $\psi(f) \in B^\times$, donc on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \downarrow & \nearrow & \\ A[f^{-1}] & & \end{array}$$

Cela conclut. ◇

Remarque. Le point 2 est une propriété universelle et cela implique que la A -algèbre $A[f^{-1}]$ ne dépend que de l'ensemble $D(f)$: si $D(f) = D(g)$ dans $\text{Spec } A$, alors il existe un unique isomorphisme de A -algèbres $A[f^{-1}] \rightarrow A[g^{-1}]$.

Définition 2.13. Un ouvert $U \subseteq \text{Spec } A$ est *principal* s'il est de la forme $U = D(f)$ avec $f \in A$. Dans ce cas, l'*anneau de valuation* de l'ouvert U est l'anneau $\mathcal{O}(U) := A[f^{-1}]$.

L'anneau $\mathcal{O}(U)$ est bien définie grâce à la remarque précédente.

Proposition 2.14. 1. Les ouverts principaux forment une base d'ouverts \mathcal{B} sur $\text{Spec } A$.
 2. Si $U, V \in \mathcal{B}$, alors $U \cap V \in \mathcal{B}$.
 3. Les ouverts principaux sont quasi-compacts.

Démonstration. 1. Tout ouvert U peut s'écrire sous la forme $U^c = V(M) = \bigcap_{f \in M} V(f)$, donc

$$U = \bigcup_{f \in M} D(f).$$

2. On a $V(f) \cup V(g) = V(fg)$, donc $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.
 3. Il existe un homéomorphisme $D(f) \simeq \text{Spec } A[f^{-1}]$ et on sait que le spectre d'un anneau est toujours quasi-compact. ◇

On donne quelques définitions purement topologiques pour mieux comprendre la topologie du spectre d'un anneau.

Définition 2.15. – Un espace topologique X est *irréductible* si l'intersection de deux ouverts non vide est non vide, c'est-à-dire si une réunion finie de fermés propres n'est jamais égale à l'espace X tout entier.

- Un point $x \in X$ est *générique* s'il est contenu dans tout ouvert non vide.
- Un espace topologique X est T_0 -séparé si, pour tous points $x, y \in X$, il existe un ouvert qui contient soit le point x soit le point y mais pas les deux.

Remarque. – Un espace séparé non vide et non réduit à un point n'est pas irréductible.

- Un espace admettant un point générique est irréductible.
- Un espace T_0 -séparé a au plus un point générique.
- Un point générique $x \in X$ vérifie $\overline{\{x\}} = X$.

Exemples. – L'espace $\text{Spec } A$ est T_0 -séparé. En effet, soient $x, y \in \text{Spec } A$ deux points distincts. Alors $x \in V(x)$ et $y \notin V(x)$.

- Soit k un corps algébriquement clos. Alors les espaces $\text{Spec } \mathbf{Z}$ et $\text{Spec } k[X]$ ont un unique point générique, donc ils sont irréductibles.

Lemme 2.16. Soit A un anneau intègre. Alors l'idéal nul est un point générique de l'espace $\text{Spec } A$.

Démonstration. Comme l'anneau A est intègre, l'idéal $\langle 0 \rangle$ est premier. Soit $U \subseteq \text{Spec } A$ un ouvert non vide. On écrit son complémentaire sous la forme $U^c = V(M)$ avec $M \neq 0$. Alors $M \not\subseteq \langle 0 \rangle$, donc $\langle 0 \rangle \notin V(M)$, donc $\langle 0 \rangle \in U$. \diamond

Dans la suite, on considère un espace topologique X et une partie $S \subseteq X$. Un point générique de S est un point générique pour la topologie induite. De même, on définit la notion d'irréductibilité pour S .

Proposition 2.17. 1. Les fermés irréductibles de $\text{Spec } A$ sont en bijection avec les idéaux premiers grâce à la correspondance

$$\mathfrak{p} \longmapsto V(\mathfrak{p}).$$

2. De plus, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subseteq A$, on a $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ et l'idéal \mathfrak{p} est l'unique point générique dans l'espace $V(\mathfrak{p})$.

Démonstration. 1. Il suffit de montrer que la correspondance est bien définie. Le fait que ce soit une bijection découle de la correspondance déjà établie. Soit $\mathfrak{p} \subseteq A$ un idéal premier. Alors il existe un homéomorphisme $\text{Spec}(A/\mathfrak{p}) \simeq V(\mathfrak{p})$, donc le fermé $V(\mathfrak{p})$ est irréductible. Réciproquement, soit $V \subseteq \text{Spec } A$ un fermé irréductible. Soit $I := I(V)$ l'idéal correspondant. Montrons qu'il est premier. Soient $f, g \in A \setminus I$ deux éléments tels que $fg \in I$. On veut trouver une contradiction. Alors $D(f) \cap V(I) \neq \emptyset$. En effet sinon on aurait $V(I) \subseteq V(f)$, donc $\text{rad}\langle f \rangle \subseteq \text{rad } I = I$, donc $f \in I$ ce qui est impossible. De même, on a $D(g) \cap V(I) \neq \emptyset$. Mais l'intersection $D(f) \cap D(g) \cap V(I) = D(fg) \cap V(I)$ est vide. En effet, sinon on aurait $\mathfrak{p} \in D(fg) \cap V(I)$, donc $I \subseteq \mathfrak{p}$ et $fg \notin \mathfrak{p}$ ce qui est encore impossible. Cela implique que le fermé $V(I)$ n'est pas irréductible ce qui est impossible. Donc l'idéal I est premier.

2. Pour tout fermé $V \subseteq \text{Spec } A$ et tout élément $\mathfrak{p} \in V$, on a $I(V) = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V} \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, donc $V \supseteq V(\mathfrak{p})$. Pour $V := \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, on trouve alors $\overline{\{\mathfrak{p}\}} \supseteq V(\mathfrak{p})$. L'autre inclusion étant évidente, on en déduit l'égalité. L'espace $V(\mathfrak{p})$ étant T_0 -séparé, il admet donc un unique point générique. \diamond

Remarque. Un idéal \mathfrak{p} est maximal si et seulement si $\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p})$ si et seulement si le point \mathfrak{p} est fermé dans $\text{Spec } A$.

Théorème 2.18 (Hochster, 1969). Soit X un espace topologique. Alors les points suivants sont équivalents :

- l'espace X est homéomorphe au spectre d'un anneau ;
- il est quasi-compacte, avec une base quasi-compacte et stable par intersection finie, et sobre (chaque sous-espace irréductible a un point générique) ;
- c'est une limite projection d'espaces T_0 -finis.

Définition 2.19. Un espace topologique est *spectral* s'il vérifie un des points du théorème précédent.

Exemple. Soit k un corps algébriquement clos. On considère l'anneau $A := k[X, Y]/\langle XY \rangle$. Alors son spectre $\text{Spec } A = V(X) \cup V(Y)$ n'est pas irréductible. Notons cependant que l'ensemble

$$V(X) \simeq \text{Spec } A/\langle X \rangle \simeq \text{Spec } k[Y]$$

est irréductible et admet un point générique η_X , tout comme l'ensemble $V(Y)$. Ainsi on peut écrire

$$\text{Spec } A = \text{Spec}_{\max} A \cup \{\eta_X, \eta_Y\}.$$

On sait que

$$\text{Spec}_{\max} A \simeq \text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{A}^1\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbf{A}^1\} \subseteq \mathbf{A}^2.$$

Le spectre de l'anneau A est formé alors des points des axes et des axes eux-mêmes.

Exemple. On considère l'anneau $A := k[X, Y]$. Alors l'espace $\text{Spec } A$ est irréductible et

$$\text{Spec } A = \bigcup_{0 \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}} V(\mathfrak{p}) \sqcup \{(0)\}$$

où l'idéal \mathfrak{m} est l'idéal maximal. De plus, on a

$$\text{Spec}_{\max} A \subset \bigcup_{0 \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}} V(\mathfrak{p}).$$

2.4. Faisceau naturel sur le spectre

Définition 2.20. Soit X un espace topologique. Notons $\mathbf{Ouv}(X)$ la catégorie de ses ouverts munie des inclusions. Un *préfaisceau* d'une catégorie \mathcal{C} sur l'espace topologique X est un foncteur contravariant $F: \mathbf{Ouv}(X) \rightarrow \mathcal{C}$. Pour tout ouvert $U \subseteq X$, l'objet $F(U)$ est appelé une *section* et, pour toute inclusion $V \subseteq U \subseteq X$, l'application $F(U \hookrightarrow V): F(V) \rightarrow F(U)$ est appelée une *restriction*.

Exemple. On considère l'espace topologique \mathbf{R} . Alors le foncteur $\mathcal{C}^0(-, \mathbf{R}): \mathbf{Ouv}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ est un préfaisceau de \mathbf{R} -algèbres où les applications de restriction sont les restrictions $f \mapsto f|_V$. De la même manière, on définit le préfaisceau $\mathcal{C}^\infty(-, \mathbf{R})$ des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

Définition 2.21. Un préfaisceau F sur X est un *faisceau* vérifiant les deux points suivants : pour tout ouvert U et pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de U ,

- pour toutes sections $s, t \in F(U)$ telles que $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ pour tout $i \in I$, on a $s = t$;
- si $s_i \in F(U_i)$ est une famille de sections vérifiant

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}, \quad \forall i, j \in I,$$

alors il existe un élément $s \in F(U)$ tel que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout $i \in I$.

Exemple. Le préfaisceau $\mathcal{C}^0(-, \mathbf{R})$ est un faisceau.

Remarque. Pour un préfaisceau F de groupes abéliens, le groupe $F(\emptyset)$ est toujours trivial.

Dans la suite, on veut construire un faisceau sur l'espace $\text{Spec } A$.

Définition 2.22. Soient X un espace topologique et \mathcal{B} une base stable par intersection finie. On voit cette dernière comme une sous-catégorie pleine $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{Ouv}(X)$. Un préfaisceau sur \mathcal{B} est un foncteur contravariant $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$. On définit de même la notion de préfaisceau sur \mathcal{B} .

Lemme 2.23. Soient X un espace topologique et \mathcal{B} une base stable par intersection finie. Alors le foncteur

$$F \mapsto F|_{\mathcal{B}}$$

entre la catégorie des faisceaux sur X et celle des faisceaux sur \mathcal{B} est une équivalence de catégories.

Démonstration. L'inverse de ce foncteur envoie un faisceau G sur \mathcal{B} sur le faisceau \overline{G} sur X défini par la limite projective

$$\overline{G}(U) := \operatorname{proj} \lim_{V \subseteq U, V \in \mathcal{B}} G(V). \quad \diamond$$

Théorème 2.24. Soient A un anneau et \mathcal{B} la base des ouverts principaux de $\operatorname{Spec} A$. Alors le foncteur $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ qui envoie chaque ouvert principal $D(f)$ sur l'anneau $A[f^{-1}]$ est un faisceau d'anneaux sur \mathcal{B} .

Démonstration. Soit $D(f) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert avec $U_i = D(f_i)$. On peut d'abord remplacer l'ouvert U par l'espace $X := \operatorname{Spec} A$ et l'anneau $A[f^{-1}]$ par l'anneau A . Comme l'espace X est quasi-compact, on peut également écrire $D(f) = \bigsqcup_{i=1}^n D(f_i)$.

Montrons la séparation. Il suffit de montrer que l'application canonique $A \rightarrow \prod_{i \in I} A[f_i^{-1}]$ est injective. Soit $a \in A$ un élément tel que $a/1 = 0$ dans $A[f_i^{-1}]$ pour tout i . Comme l'ensemble I est fini, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall i \in I, \quad f_i^n a = 0.$$

Comme $X = \bigsqcup D(f_i)$, on a

$$\mathbf{V}(\{f_i^n\}_{i \in I}) = \bigcap \mathbf{V}(f_i^n) = \bigcap \mathbf{V}(f_i) = \emptyset,$$

donc $\langle f_i^n \rangle_{i \in I} = A$. En particulier, il existe des éléments $g_i \in A$ tels que $1 = \sum g_i f_i^n$, donc

$$a = \sum g_i \times f_i^n a = 0.$$

Montrons la propriété de recollement. Soient $s_i \in A[f_i^{-1}]$ des sections telles que $s_i = s_j$ dans $A[(f_i f_j)^{-1}]$. Écrivons $s_i = a_i / f_i^n$ car l'ensemble A est fini. Comme $s_i = s_j$, cela implique

$$(a_i f_j^n) / (f_i f_j) = (a_j f_i^n) / (f_i f_j),$$

donc il existe un entier $m > 0$ tel que

$$(f_i f_j)^m (a_i f_j^n - a_j f_i^n) = 0.$$

On remplace a_i par $f_i^m a_i$ et n par $n + m$. On obtient alors

$$f_j^n a_i - f_i^n a_j = 0.$$

Comme précédemment, on a $\langle f_i^n \rangle_{i \in I} = A$, donc $1 = \sum g_i f_i^n$. On pose $s := \sum g_i a_i$. Pour tout j , on trouve

$$f_j^n s = \sum g_i (f_j^n a_i) = \sum g_i (f_i^n a_j) = a_j$$

ce qui conclut la preuve. \(\diamond\)

Définition 2.25. Avec le lemme, on obtient un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ sur $\operatorname{Spec} A$.

Exemple. Soit $S \subseteq A$ une partie. On définit l'ouvert

$$D(S) := \operatorname{Spec} A \setminus \mathbf{V}(S).$$

En général, on a $A[S^{-1}] \neq \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(S))$. Par exemple, soit $S = \{f, g\}$ une partie à deux éléments de A . On suppose que $D(f) \cap \mathbf{V}(g) \neq \emptyset$. Alors $D(f) \subseteq D(S)$, donc $D(S) \cap \mathbf{V}(g) \neq \emptyset$, donc l'élément g n'est pas inversible dans $\mathcal{O}(D(S))$. Mais il est inversible dans $A[S^{-1}]$.

Chapitre 3

Théorie générale des faisceaux, espaces localement annelés, schémas

3.1	Morphisme de faisceaux, tige	13
3.2	Espaces localement annelés et schémas	16
3.3	Équivalence entre les catégories des anneaux et des schémas affines	19
3.4	Points et produits fibrés	22
3.5	L'espace projectif	24
3.6	Faisceaux quasi-cohérents et immersions fermées	26
3.6.1	Faisceaux quasi-cohérents	26
3.6.2	Immersion fermées	28
3.7	Fibrés vectoriels et groupe de Picard	30

3.1. Morphisme de faisceaux, tige

Définition 3.1. Soit \mathcal{C} une catégorie. Un *morphisme* entre deux faisceaux F et G de la catégorie \mathcal{C} sur un espace topologique X est une famille de morphisme $\phi_U: F(U) \rightarrow G(U)$ pour chaque ouvert $U \subseteq X$ telle que, pour toute inclusion $V \subseteq U \subseteq X$, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\phi_U} & G(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(V) & \xrightarrow{\phi_V} & G(V) \end{array}$$

On note alors $\phi: F \rightarrow G$.

Lorsque la catégorie \mathcal{C} est abélienne, on rappelle que la catégorie des faisceaux de \mathcal{C} sur X est aussi abélienne (cf cours d'algèbre homologique).

Définition 3.2. Le *tige* d'un faisceau F en un point $x \in X$ est la limite inductive

$$F_x := \varinjlim_{x \in U} F(U).$$

La tige F_x est l'ensemble

$$\{(U, s) \mid x \in U \subseteq X, s \in F(U)\}$$

quotienté par la relation d'équivalence \sim définie comme suit : pour des éléments (U, s) et (V, t) , on déclare $(U, s) \sim (V, t)$ s'il existe un voisinage ouvert $W \subseteq U \cap V$ du point x tel que $s|_W = t|_W$. Pour un couple (U, s) , on note $\overline{(U, s)}$ sa classe dans F_x .

Un morphisme $\phi: F \rightarrow G$ induit des morphismes $\phi_x: F_x \rightarrow G_x$. L'association $F \mapsto F_x$ est alors un foncteur de la catégorie de préfaisceaux dans la catégorie \mathcal{C} . Comme les limites inductives filtrées dans \mathbf{Ab} sont exactes, si $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$, ce foncteur est exact.

Définition 3.3. La restriction à la tige au point x d'une section $s \in F(U)$ avec $x \in U$ est la classe

$$s_x := \overline{(U, s)} \in F_x.$$

Remarquons que, si une famille \mathcal{B} d'ouverts de X est une base d'ouvert, alors la tige F_x est aussi la limite inductive des objets $F(U)$ lorsque $x \in U \in \mathcal{B}$.

Proposition 3.4. Soient $\phi, \psi: F \rightarrow G$ deux morphismes de préfaisceaux.

1. On suppose que le préfaisceau F est un faisceau. Soit $U \subseteq X$ un ouvert. Alors l'application

$$\left| \begin{array}{l} F(U) \longrightarrow \prod_{x \in U} F_x, \\ s \longmapsto (s_x)_{x \in U} \end{array} \right.$$

est injective.

2. On suppose que le préfaisceau F est un faisceau. Alors les morphismes ϕ_U avec $U \subseteq X$ sont injectifs si et seulement si les morphismes ϕ_x avec $x \in X$ le sont.
3. On suppose que les préfaisceaux F et G sont des faisceaux. Alors les morphismes ϕ_U avec $U \subseteq X$ sont bijectifs si et seulement si les morphismes ϕ_x avec $x \in X$ le sont.
4. On suppose que le préfaisceau G est un faisceau. Alors $\phi = \psi$ si et seulement si $\phi_x = \psi_x$ pour tout point $x \in X$.

Démonstration. 1. Soient $s, t \in F(U)$ deux sections vérifiant $s_x = t_x$ pour tout $x \in X$. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $V_x \subseteq U$ du point x tel que $s|_{V_x} = t|_{V_x}$. Or les ouverts V_x avec $x \in X$ forment un recouvrement de U . Comme le préfaisceau F est un faisceau, on en déduit $s = t$.

2. Pour le sens direct, il suffit d'utiliser l'exactitude à gauche. Réciproquement, on suppose que les morphismes ϕ_x avec $x \in X$ sont des injectifs. Soit $U \subseteq X$ un ouvert. On considère le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \hookrightarrow & \prod F_x \\ \downarrow \phi_U & & \downarrow \prod \phi_x \\ G(U) & \longrightarrow & \prod G_x \end{array}$$

3. Le sens direct provient qu'on a un foncteur $F \mapsto F_x$. Réciproquement, on suppose que les morphismes ϕ_x avec $x \in X$ sont des bijectifs. Soit $t \in G(U)$. Soit $x \in U$. Comme ϕ_x est surjective, il existe un voisinage $V_x \subseteq U$ du point x et $s^x \in F(V_x)$ tel que $\phi_x(s^x) = t_x$. Ceci implique qu'il existe un voisinage $W_x \subseteq V_x$ du point x tel que $\phi(s^x|_{W_x}) = \phi(s^x)|_{W_x} = t|_{W_x}$. Quitter à remplacer le voisinage V_x par W_x et la section s^x par $s^x|_{W_x}$, on obtient un recouvrement $U = \bigcup_x V_x$ et des sections $s^x \in F(V_x)$ tels que

$$\phi_{V_x}(s^x) = t|_{V_x}.$$

Pour deux points $x, x' \in U$, on a

$$\phi_{V_x \cap V_{x'}}(s^x|_{V_x \cap V_{x'}}) = t|_{V_x \cap V_{x'}} = \phi_{V_x \cap V_{x'}}(s^{x'}|_{V_x \cap V_{x'}}).$$

Comme le morphisme $\phi_{V_x \cap V_{x'}}$ est injectif, on obtient

$$s^x|_{V_x \cap V_{x'}} = s^{x'}|_{V_x \cap V_{x'}}.$$

Par la propriété de recollement de F , il existe alors une section $s \in F(U)$ tel que $s|_{V_x} = s^x$ pour tout $x \in U$. Finalement, on trouve

$$\phi_U(s)|_{V_x} = \phi_{V_x}(s|_{V_x}) = \phi_{V_x}(s^x) = t|_{V_x}, \quad \forall x \in U.$$

Par la propriété de séparation de G , on trouve $\phi_U(s) = t$.

4. Le sens direct est clair. Soit $U \subseteq X$ un ouvert. Alors le morphisme $G(U) \rightarrow \prod_x G_x$ est injective, donc $\phi_U = \psi_U$. \diamond

Remarque. Le point 2 est faux lorsqu'on remplace l'injectivité par la surjectivité.

Définition 3.5. Soient F et G deux faisceaux sur X . Un morphisme $\phi: F \rightarrow G$ est

- injectif (resp. bijectif) si les morphismes ϕ_x avec $x \in X$ sont injectifs (resp. bijectif);
- surjectif si les morphismes ϕ_x avec $x \in X$ sont surjectifs.

Avec la remarque précédente, dire que le morphisme ϕ est surjectif n'est pas équivalent à dire que chaque morphisme ϕ_U avec $U \subseteq X$ est surjectif.

Proposition 3.6. Soit F un préfaisceau. Alors il existe un faisceau \tilde{F} et un morphisme de préfaisceaux $\iota: F \rightarrow \tilde{F}$ tels que, pour tout morphisme de préfaisceaux $\phi: F \rightarrow G$, il existe un unique morphisme $\tilde{F} \rightarrow G$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & G \\ \downarrow \iota & \nearrow & \\ \tilde{F} & & \end{array}$$

De plus,

1. le morphisme ι induit des bijections $F_x \simeq \tilde{F}_x$ pour tout point $x \in X$;
2. le couple (\tilde{F}, ι) est unique à unique isomorphisme près;
3. l'application $F \mapsto (\tilde{F}, \iota)$ est un foncteur;
4. le fonction $L: F \mapsto \tilde{F}$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux.

Démonstration. Montrons la première partie. Pour chaque ouvert U , on pose

$$\tilde{F}(U) := \{(s_x)_{x \in U} \in \prod_{x \in U} F_x \mid \forall x \in U, \exists x \in V \subseteq U, \exists t \in F(V), \forall y \in V, s_y = t_y\}$$

et, pour chaque inclusion $V \subseteq U$, on définit la restriction $\tilde{F}(U) \rightarrow \tilde{F}(V)$ induite par la projection $\prod_{x \in U} F_x \rightarrow \prod_{x \in V} F_x$. On définit le morphisme de préfaisceau $\iota: F \rightarrow \tilde{F}$ par

$$\iota_U: \begin{array}{l} F(U) \rightarrow \tilde{F}(U), \\ s \mapsto (s_x)_{x \in U}. \end{array}$$

Alors la famille \tilde{F} est un faisceau. En effet, l'axiome de séparation est immédiat. Pour l'axiome de recollement, soit $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ un recouvrement et $s^{\alpha} \in F(U_{\alpha})$ des sections compatibles. Définissons la section $s \in \prod_{U \ni x} F_x$ telle que $s_x = s_x^{\alpha}$ pour un indice α tel que $x \in U_{\alpha}$. Cette définition ne dépend pas de l'indice choisi α . Alors $s|_{U_{\alpha}} = s^{\alpha}$. De plus, on a $s \in \tilde{F}(U)$ ce qui conclut l'axiome de recollement. Ainsi la famille \tilde{F} est un faisceau.

Vérifions la propriété universelle. Soit $\phi: F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux. Alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \tilde{F} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \prod \phi_x \\ G & \xrightarrow{\sim} & \tilde{G} \end{array}$$

comme G est un faisceau et $G_x \simeq \tilde{G}_x$ pour tout $x \in X$. Pour l'unicité, si $\bar{\phi}_1$ et $\bar{\phi}_2$ sont de tels morphismes, alors $\bar{\phi}_1 \circ \iota = \bar{\phi}_2 \circ \iota$, donc $\bar{\phi}_{1x} = \bar{\phi}_{2x}$ pour tout $x \in X$, donc $\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2$. \diamond

Soit A un anneau. Calculons les tiges du faisceau $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$.

Proposition 3.7. Soit $X := \text{Spec } A$ le spectre d'un anneau A . Soit $x \in X$ un point. Alors il existe un isomorphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_x := A[S^{-1}]$ avec $S := A \setminus x$.

Démonstration. La famille $\mathcal{B} := \{D(f) \mid f \in A\}$ étant une base, on a

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U \in \mathcal{B}} \mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{x \in D(f)} A[f^{-1}].$$

On suppose $x \in D(f)$. Alors $f \notin x$ et on a une projection $A[f^{-1}] \rightarrow A_x$ et cette application est compatible avec les restrictions

$$\begin{cases} A[f^{-1}] \rightarrow A[(fg)^{-1}], \\ a/f^n \mapsto ag^n/(fg)^n. \end{cases}$$

On a donc une injection $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow A_x$. Dans l'autre sens, on prend l'application $\alpha: A \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ qui envoie tout élément $a \in A$ sur la classe de $a/1$.

On suppose $f \notin D(f)$. Alors $f \in x$. Notons $\beta(f)$ la classe de $f/1 \in A[f^{-1}]^\times$. Alors $\beta(f)$ est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et on obtient une factorisation

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\ \downarrow & \nearrow & \\ A_x & & \end{array}$$

Dans ce cas, on trouve alors $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \text{Id}$. \diamond

3.2. Espaces localement annelés et schémas

Définition 3.8. Un anneau est *local* s'il admet un unique idéal maximal. Dans ce cas, on note \mathfrak{m}_A son unique idéal maximal. :

Pour tout anneau local A , on peut vérifier que $A^\times = A \setminus \mathfrak{m}_A$. S'il existe un idéal $I \subseteq A$ vérifiant $A^\times = A \setminus I$, alors l'anneau A est local et $I = \mathfrak{m}_A$.

Définition 3.9. Un espace spectral est *local* s'il admet un unique point fermé.

Lemme 3.10. Un anneau A est local si et seulement si son spectre est local.

Définition 3.11. Soient A et B deux anneaux. Un morphisme $\phi: A \rightarrow B$ est *local* si $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

Définition 3.12. Soient X et Y deux espaces spectraux locaux. Une application continue $f: X \rightarrow Y$ est *locale* si elle envoie le point fermé de X sur le point fermé de Y .

Lemme 3.13. Un morphisme d'anneaux locaux $\phi: A \rightarrow B$ est local si et seulement si l'application $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$ est locale.

Définition 3.14. Soient X un espace spectral et $x \in X$. La *localisation* de X en x est l'espace

$$X_x := \bigcap_{x \in U \text{ ouvert}} U.$$

Proposition 3.15. Soient X un espace spectral et $x \in X$ un point. Soient A un anneau et $\mathfrak{p} \subseteq A$ un idéal premier. Alors

1. l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$;
2. la localisation X_x est un espace spectral local ;
3. si $X = \text{Spec } A$, alors l'application $A \rightarrow A_x$ induit un homéomorphisme $X_x \rightarrow \text{Spec } A_x$.

Démonstration. Montrons le point 2. Montrons que le point x est fermé dans X_x . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point $y \in \{x\} \cap X_x$ avec $y \neq x$. Comme l'espace X est T_0 -séparé, il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $y \in U$ et $x \notin U$. Avec $C := U^c$, on a $y \notin C$ ce qui est impossible car $y \in \overline{\{y\}} = \bigcup_{x \in C \text{ fermé}} C$.

Montrons que l'espace X_x admet un unique point fermé. Soient $x \neq y$ un autre point fermé. Alors $X_x \setminus \{y\} \subseteq X_x$ est un ouvert, donc il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $U \cap X_x = X_x \setminus \{y\}$, donc $x \in U$ et $y \notin U$, donc $y \notin X_x$ ce qui est impossible. Ceci conclut le point 2.

Avec le point 3, on a $\text{Spec } A_x \simeq X_x$, donc l'anneau A_x est local d'idéal maximal (x) ce qui montre le point 1. \diamond

Définition 3.16. – Un *espace annelé* est la donnée d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X sur X .

- Un *espace localement annelé* est un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) tel que la tige $\mathcal{O}_{X,x} := (\mathcal{O}_X)_x$ soit un anneau local pour tout point $x \in X$.

Le couple $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ est un espace annelé, dénoté désormais $\text{Spec } A$. Il est localement annelé d'après la proposition précédente.

Idéalement, on aimerait avoir un foncteur pleinement fidèle

$$\text{Spec}: \{\text{anneaux}\}^{\text{op}} \longrightarrow \{\text{espaces localement annelés}\}.$$

Pour cela, définissons la notion de morphisme d'espaces annelés.

Définition 3.17. Un morphisme entre deux espaces annelés (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) est la donnée d'une application continue $f: X \rightarrow Y$ et, pour chaque ouvert $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$ tels que $f(U) \subseteq V$, d'un morphisme d'anneaux $f_{V \rightarrow U}^\#: \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ compatible avec les restrictions, c'est-à-dire tel que, pour tous ouverts $U' \subseteq U$ et $V' \subseteq V$ tels que $f(U') \subseteq V'$, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_{V \rightarrow U}^\#} & \mathcal{O}_X(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y(V') & \xrightarrow{f_{V' \rightarrow U'}^\#} & \mathcal{O}_X(U') \end{array}$$

On a besoin de deux opérations sur les préfaisceaux.

Définition 3.18. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y . Soient F un préfaisceau sur X et G un préfaisceau sur Y .

- L'*image directe* par la fonction f du préfaisceau F est le faisceau f_*F donné par l'égalité

$$f_*F(V) := F(f^{-1}(V)), \quad \forall V \subseteq Y.$$

- L'*image inverse* par la fonction f du préfaisceau G est le préfaisceau f^+G donné par l'égalité

$$f^+G(U) := \varinjlim_{f(U) \subseteq V} G(V), \quad \forall U \subseteq X.$$

Remarque. Les associations f_* et f^+ sont des foncteurs.

Proposition 3.19. Le foncteur f^+ est adjoint à gauche du foncteur f_* , c'est-à-dire qu'il existe une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\mathbf{P}(X)}(f^+G, F) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{P}(Y)}(G, f_*F).$$

Idée. Construisons une telle bijection. Pour un morphisme $\varphi: f^+G \rightarrow F$, comme $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, on a une application naturelle $G(V) \rightarrow f^+G(U) = G(f^{-1}(V))$ et, en la composant avec le morphisme φ_U avec $U := f^{-1}(V)$, on obtient un morphisme $G(V) \rightarrow F(U) = f_*F(V)$. \diamond

Proposition 3.20. Pour tout point $x \in X$, il existe un isomorphisme naturel $(f^+G)_x \rightarrow G_{f(x)}$.

Démonstration. On a

$$(f^+G)_x = \varinjlim_{x \in U} f^+G(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subseteq V} G(V) \simeq \varinjlim_{f(x) \in V} G(V) = G_{f(x)}. \quad \diamond$$

Définition-proposition 3.21. 1. Si F est un faisceau sur X , alors f_*F est un faisceau sur Y .

2. On note $f^{-1}G$ le faisceau associé à f^+G .

3. Les foncteurs f^{-1} et f_* sont adjoints, c'est-à-dire qu'il existe une bijection

$$\text{Hom}_{\mathbf{F}(X)}(f^{-1}G, F) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{F}(Y)}(G, f_*F)$$

pour deux faisceaux F et G .

4. Les tiges de préfaisceaux $f^{-1}G$ et f^+G sont les mêmes.

Démonstration. 1. Soit $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ un recouvrement ouvert. On pose $U_i := f^{-1}(V_i)$ et $U := f^{-1}(V)$. Alors $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement ouvert. Soient $s, t \in f_*F(V)$ tel que $s|_{V_i} = t|_{V_i}$ pour tout $i \in I$. Comme $f^*F(V) = F(U)$ et F est un faisceau, on a $s = t$ dans $F_*F(V)$. D'où la propriété de séparation. La propriété de recollement se fait identiquement.

3. On utilise la propriété universelle du faisceau associé à un préfaisceau : on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}(X)}(f^{-1}G, F) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(X)}(f^+G, F) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}(Y)}(G, f_*F) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}(Y)}(G, f_*F). \end{aligned} \quad \diamond$$

Proposition 3.22. Soient (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) des espaces annelés. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) &\simeq \{(f, f^\sharp) \mid f: X \rightarrow Y, f^\sharp: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X\} \\ &\simeq \{(f, f^\flat) \mid f: X \rightarrow Y, f^\flat: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X\}. \end{aligned}$$

Démonstration. La donnée d'une famille $\{f_{V \rightarrow U}^\sharp\}_{U \subseteq X, V \subseteq Y, f(U) \subseteq V}$ est équivalente à la donnée d'une famille $\{f^+\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)\}_{U \subseteq X}$, donc d'un morphisme $f^+\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$. \diamond

Définition-proposition 3.23. Soit $\varphi: B \rightarrow A$ un morphisme d'anneaux. On pose $X := \mathrm{Spec} A$ et $Y := \mathrm{Spec} B$. Alors l'application ${}^a\phi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ définie par l'égalité

$${}^a\phi: X \xrightarrow{\mathrm{Spec} \phi} Y \quad \text{et} \quad ({}^a\phi)^\flat: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

définie sur la base des ouverts principaux est un morphisme d'espaces annelés où cette dernière application est le morphisme induit

$$\mathcal{O}_Y(D(s)) = B[s^{-1}] \rightarrow {}^a\phi_*\mathcal{O}_X(D(s)) = \mathcal{O}_X({}^a\phi^{-1}(D(s))) = \mathcal{O}_X(D(\phi(s))) = A[\phi(s)^{-1}].$$

Démonstration. Il reste à montrer que l'application ϕ^\flat est compatible aux restrictions (exercices). \diamond

Remarque. De la sorte, l'association $A \mapsto \mathrm{Spec} A$ est un foncteur contravariant de la catégorie des anneaux dans la catégorie des espaces annelés. Cependant, il n'est pas pleinement fidèle. En effet, soit p un nombre premier. On définit un morphisme d'espaces annelés $(f_p, f_p^\sharp): \mathrm{Spec} \mathbf{Q} \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbf{Z}$ par l'égalité

$$f_p(\mathrm{pt}) = \langle p \rangle$$

et par le morphisme

$$f_p^\sharp: f^+\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} \mathbf{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} \mathbf{Q}}$$

induit par l'inclusion

$$(f^+\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} \mathbf{Z}})(\mathrm{pt}) = \varinjlim_{\langle p \rangle \in D(s) \subseteq \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} \mathbf{Z}}(D(s)) = \varinjlim \mathbf{Z}[s^{-1}] \hookrightarrow \mathbf{Q}.$$

Ce morphisme ne vient pas d'un morphisme d'anneaux $\varphi: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ car $\mathrm{Spec} \phi(\mathrm{pt}) = \langle 0 \rangle \neq \langle p \rangle$.

Ce contre-exemple montre qu'on a besoin de restreindre les classes de morphismes entre deux espaces annelés. Notons que le morphisme de la remarque a la propriété suivante : en la tige au point $\langle p \rangle \in \mathrm{Spec} \mathbf{Z}$, le morphisme entre $\mathbf{Z}_{\langle p \rangle} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} \mathbf{Z}, \langle p \rangle}$ et \mathbf{Q} est l'inclusion $\mathbf{Z}_{\langle p \rangle} \rightarrow \mathbf{Q}$ qui n'est pas locale.

Définition 3.24. Un morphisme entre deux espaces localement annelés (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) est un morphisme d'espaces annelés $(f, f^\sharp): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ tel que, pour tout point $x \in X$, l'application induite $f_x^\sharp: (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ est un morphisme d'anneaux locaux.

Remarque. Soit $\phi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Alors le morphisme ${}^a\phi$ est un morphisme d'espaces localement annelés. En effet, soit $x \in X = \mathrm{Spec} A$ et $Y := \mathrm{Spec} B$. Soit $y := {}^a\phi(x)$. Alors $\mathrm{Spec} \phi(x) = \phi^{-1}(x) = \mathfrak{q} \subseteq B$. Alors

$$({}^a\phi)_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y, f(x)} = B_{\mathfrak{q}} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x} = A_{\mathfrak{p}}$$

satisfait

$$[(^a\phi)_x^\sharp]^{-1}(xA_x) = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}.$$

Donc le morphisme $(^a\phi)_x^\sharp$ est locale.

Maintenant, on peut formuler et prouver le résultat principal. Pour le formuler, on a besoin de la définition centrale du cours.

Définition 3.25. Un *schéma affine* est un espace localement annelé qui est un isomorphe à un espace localement annelé de la forme $\text{Spec } A$ pour un anneau A . Un *morphisme* entre deux schémas affines est un morphisme d'espaces localement annelés. Un *schéma* est un espace localement annelé (X, \mathcal{O}_X) tel qu'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup_i U_i$ tel que, pour tout i , l'espace annelé $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ est isomorphe à un schéma affine. Un morphisme entre deux schémas est un morphisme d'espaces localement annelés.

Théorème 3.26. Le foncteur contravariant

$$\{\text{anneaux}\}^{\text{op}} \longrightarrow \{\text{schémas affines}\}$$

est une équivalence de catégories.

3.3. Équivalence entre les catégories des anneaux et des schémas affines

Remarque. L'inverse du foncteur précédent sera le foncteur « section globale » Γ qui envoie un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) sur l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X)$. On utilisera les deux notations $\Gamma(X, F)$ et $F(X)$ pour les sections globales d'un faisceau F sur X .

Avant de commencer la preuve du théorème, on voit d'abord une construction basique qui produit des schémas non affines.

Soient $U = \text{Spec } A$ et $V = \text{Spec } B$ deux schémas affines. Soient $f \in A$ et $g \in B$. On se donne un isomorphisme d'anneaux $\alpha: A[f^{-1}] \longrightarrow B[g^{-1}]$. On va former un schéma en collant les schémas U et V selon l'isomorphisme α . Le morphisme α induit un isomorphisme

$$^a\alpha: D_U(f) \longrightarrow D_V(g).$$

On définit l'espace $X = U \cup_\alpha V := (U \sqcup V) / \sim_\alpha$. Les projections $p_U: U \longrightarrow X$ et $p_V: V \longrightarrow X$ sont ouvertes, donc l'écriture $X = p_U(U) \cup p_V(V)$ est un recouvrement ouvert. Pour définir un faisceau sur X , il suffit de le définir sur une base. Remarquons que les ouverts $W \subseteq X$ tels que $W \subseteq p_U(U)$ ou $W \subseteq p_V(V)$ forment une base. Si $W \subseteq p_U(U)$, on pose $\mathcal{O}_X(W) := \mathcal{O}_U(p_U^{-1}(W))$. De même lorsque $W \subseteq p_V(V)$. Si $W \subseteq p_U(U) \cap p_V(V) = p_U(D(f)) = p_V(D(g))$, on identifie $\mathcal{O}_U(p_U^{-1}(W))$ et $\mathcal{O}_V(p_V^{-1}(W))$ par l'isomorphe $^a\alpha$. On vérifie alors que l'objet \mathcal{O}_X est bien un faisceau. Ainsi on obtient un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) . Par ailleurs, c'est bien un schéma car $(p_U(U), \mathcal{O}_X|_{p_U(U)}) \simeq (U, \mathcal{O}_U)$ est un schéma affine et de même pour V .

Exemple. On prend $A = \mathbf{C}[t]$ et $B = \mathbf{C}[s]$, puis $f = t$ et $g = s$. On considère le morphisme d'anneaux

$$\alpha: \begin{cases} \mathbf{C}[t, t^{-1}] \longrightarrow \mathbf{C}[s, s^{-1}], \\ t \longmapsto s^{-1}. \end{cases}$$

Le schéma ainsi produit s'appelle la *droite projective* et se note $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$. Il n'est pas affine. En effet, la section globale est l'égaliseur des flèches

$$f(t) \longmapsto f(t) \quad \text{et} \quad g(s) \longmapsto g(s^{-1}).$$

Alors un élément f appartient à la section globale si $f(t) = g(t^{-1})$ pour un élément $g(s) \in \mathbf{C}[s]$, donc les fonctions globales sont constantes.

En prenant le morphisme $\alpha: t \longmapsto s$, on trouve une droite avec deux origines. Ce schéma n'est ni affine ni séparé.

On revient à la démonstration du théorème précédente. Ce dernier va découler du résultat suivant.

Théorème 3.27. Soient $Y = \text{Spec } B$ un schéma affine et (X, \mathcal{O}_X) un espace localement annelé. Alors il existe une bijection naturelle

$$\begin{array}{c} \text{Hom}_{\text{esp. loc. an.}}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) \longrightarrow \text{Hom}(B, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \\ \left| \right. \\ (f, f^\flat), \longmapsto \Gamma(Y, f^\flat: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X). \end{array}$$

Démonstration. Montrons son injectivité. Soit (f, f^\sharp) et (g, g^\sharp) deux morphismes qui induisent le même morphisme d'anneaux $\phi: B \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Montrons d'abord que $f = g$. Soit $x \in X$. On note $\mathfrak{q} \subseteq B$ l'idéal correspondant à $f(x) \in \text{Spec } B$. On considère le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\text{can}} & \mathcal{O}_{X,x} \\ \uparrow & & \uparrow f_x^\sharp \\ B & \longrightarrow & B_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} \end{array}$$

Soit $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ l'idéal maximal. Comme f_x^\sharp est locale, on a $(f_x^\sharp)(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$, donc $(f_x^\sharp \circ \text{loc})(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{q}$. Par la commutativité du diagramme, on en déduit que $\mathfrak{q} = f(x)$. Par le même argument, on obtient $f(x) = g(x)$ si bien que $f = g$.

Maintenant, montrons que $f^\sharp = g^\sharp$. Il suffit de le montrer sur $\mathcal{O}_Y(U)$ avec $U = D(s)$ car les ouverts principaux forment une base. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B = \mathcal{O}_Y(Y) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_X(X) = f_*\mathcal{O}_X(Y) \\ \text{res.} \downarrow & & \downarrow \text{res.} \\ B[s^{-1}] = \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow{f^\flat(U)} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{O}_X(U) \end{array}$$

Par propriété universelle de la localisation, il existe au plus une seule façon de factoriser la flèche par le morphisme de localisation (qui existe si et seulement si $f^\flat(U)(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))^\times$). D'où $f^\flat(U) = g^\flat(U)$ ce qui conclut l'injectivité.

Montrons sa surjectivité. Soit $\phi: B \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ un morphisme d'anneaux. Pour $x \in X$, on pose

$$f(x) := \mathfrak{q}_x = (\text{can} \circ \phi)^{-1}(\mathfrak{m}_x).$$

Cela définit une application $f: X \longrightarrow Y$. Montrons qu'elle est continue. Pour $t \in \mathcal{O}_X(X)$, on définit

$$D(t) := \{x \in X \mid t_x \notin \mathfrak{m}_x\}.$$

Montrons que c'est un ouvert et $t \in \mathcal{O}_X(D(t))^\times$. En effet, soit $x \in D(t)$. Comme $t_x \notin \mathfrak{m}_x$, on a $t_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$, donc il existe un ouvert $U \subseteq X$ et une section $v \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $t_x v_x = 1$. Quitte à restreindre U , on peut supposer que $t|_{Uv|U} = 1$ dans $\mathcal{O}_X(U)$, donc $t_y \in \mathcal{O}_{X,y}^\times$ pour tout $y \in U$, donc $t_y \notin \mathfrak{m}_y$ pour tout $y \in U$. Donc $U \subseteq D(t)$. De plus, on obtient $t|_U \in \mathcal{O}_X(U)^\times$. Comme $D(t) = \bigcup_{x \in D(t)} U_x$ et l'inverse $t^{-1}|_{U_x}$ est uniquement déterminé, on en déduit $t^{-1}|_{U_x \cap U_{x'}} = t^{-1}|_{U_x \cap U_{x'}}$, donc t^{-1} existe dans $\mathcal{O}_X(D(t))$ par la propriété de recollement des faisceaux. Soit $s \in B$. Pour $x \in X$, on pose $\mathfrak{q}_x := f(x) \subseteq B$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(D(s)) &= \{x \in X \mid s \notin \mathfrak{q}_x\} \\ &= \{x \in X \mid \phi(s)_x \notin \mathfrak{m}_x\} = D(\phi(s)) \end{aligned}$$

est un ouvert.

Construisons maintenant f^\flat . Il suffit de la définir sur les ouverts principaux puis de vérifier les compatibilités avec les restrictions. On définit

$$f^\flat(D(s)): \mathcal{O}_Y(D(s)) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(D(s))$$

comme cela faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_X(X) = f_*\mathcal{O}_X(Y) \\
 \text{res.} \downarrow & & \downarrow \text{res.} \\
 B[s^{-1}] = \mathcal{O}_Y(D(s)) & \xrightarrow{f^\flat(D(s))} & \mathcal{O}_X(D(\phi(s))) = f_*\mathcal{O}_X(D(s))
 \end{array}$$

Cette application existe car il existe au plus une unique factorisation par la projection $B \rightarrow B[s^{-1}]$ qui existe si et seulement si l'image de s est inversible dans $\mathcal{O}_X(D(\phi(s)))$ et c'est ce qu'on vient de montrer. La compatibilité des $f^\flat(U)$ est donnée par un argument similaire. On obtient alors un morphisme $f^\flat: \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ et donc un morphisme $f^\sharp: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$.

Montrons que ce dernier est local ce qui conclura la preuve. Rappelons que $f(x) \in Y$ est l'idéal $\mathfrak{q}_x = \phi_x^{-1}(\mathfrak{m}_x)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xrightarrow{\quad} & f^{-1}\mathcal{O}_Y(X) & \xrightarrow{f^\sharp(X)} & \mathcal{O}_X(X) \\
 & \searrow \text{loc} & \downarrow & & \downarrow \text{can} \\
 & & B_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \xrightarrow{f_x^\sharp} & \mathcal{O}_{X,x}
 \end{array}$$

où la flèche horizontale est le morphisme $\phi: B \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$. On veut montrer que $(f^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$, c'est-à-dire $\text{Spec } f_x^\sharp(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$. Mais comme l'application $\text{Spec } B_{\mathfrak{q}} \rightarrow \text{Spec } B$ est injective et envoie $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ sur \mathfrak{q} , il suffit de vérifier $\text{Spec}(f_x^\sharp \circ \text{loc})(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{q}$. Comme le diagramme est commutatif, on a

$$f_x^\sharp \circ \text{loc} = \text{can} \circ \phi = \phi_x,$$

on est ramené à montrer $\text{Spec } \phi_x(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{q}$ ce qui est vraie. \diamond

On va voir une première méthode pour construire des nouveaux schémas.

Définition 3.28. Une *immersion ouverte* entre deux espaces annelés (X, \mathcal{O}_X) et (Y, \mathcal{O}_Y) est un morphisme $(f, f^\sharp): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ tel que l'application $f: X \rightarrow Y$ soit un plongement ouvert et l'application $f^\sharp: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ soit un isomorphisme, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $U \subseteq Y$ tel que $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (U, \mathcal{O}_Y|_U)$.

Proposition 3.29. Soit Y un schéma. S'il existe une immersion ouverte $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, alors l'espace annelé (X, \mathcal{O}_X) est un schéma.

Remarque. Un schéma qui se plonge dans un schéma affine s'appelle un schéma *quasi-affine*. Celui-ci n'est pas nécessairement affine. En effet, soit $Y = \text{Spec } k[T_1, T_2]$ avec k algébriquement clos. Soit $U := U_1 \cap U_2 = Y \setminus \{(0, 0)\}$ avec $U_i = D(T_i)$. Cet ouvert est un schéma (U, \mathcal{O}_U) qui n'est pas affine. En effet, l'anneau $\mathcal{O}_Y(U)$ est l'égaliseur des flèches de localisation

$$k[T_1, T_1^{-1}] \rightarrow k[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}] \quad \text{et} \quad k[T_2, T_2^{-1}] \rightarrow k[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}].$$

Alors $f = \sum_{j \geq 0, i \in \mathbb{Z}} a_{i,j} T_1^i T_2^j$ et $g = \sum_{u \geq 0, j \in \mathbb{Z}} b_{i,j} T_1^i T_2^j$ sont égaux dans $k[T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}]$ si et seulement si tous leurs coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ sont égaux. En particulier, $a_{i,j} = 0$ si $i < 0$ et $b_{i,j} = 0$ si $j < 0$, c'est-à-dire que f et g sont des polynômes. D'où

$$\mathcal{O}_Y(U) = k[T_1, T_2].$$

Si U était affine, alors $U \rightarrow Y$ serait un isomorphisme ce qui est impossible car l'espace topologique U est strictement inclus dans l'espace topologique Y .

Démonstration. Soit $U \subseteq Y$ un ouvert. Montrons que l'espace annelé $(U, \mathcal{O}_Y|_U)$ est un schéma. On prend un recouvrement ouvert $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ avec $V_i \simeq \text{Spec } B_i$. Soit $x \in U$. Soit $i \in I$ un indice tel que $x \in V_i$. Alors $U \cap V_i \subseteq V_i$, donc il existe un élément $f_i \in B_i$ tel que $x \in D_{V_i}(f_i) \subseteq U \cap V_i$. On pose $U_x := D_{V_i}(f_i)$. Alors $U = \bigcup_{x \in U} U_x$. Mais

$$\Gamma(U_x, \mathcal{O}_Y|_{U_x}) = \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i}|_{U_x}) = B_i[f_i^{-1}].$$

Si $D_{V_i}(g) \subseteq D_{V_i}(f)$, alors

$$\Gamma(D_{V_i}(g), (\mathcal{O}_Y|_{U_x})|_{D_{V_i}(g)}) = B_i[(f_i g)^{-1}] = \Gamma(D_{V_i}(g), \mathcal{O}_{\text{Spec } B_i[f_i^{-1}]|_{D_{V_i}(g)}}).$$

On en déduit que

$$\mathcal{O}_Y|_{U_x} = \mathcal{O}_{\text{Spec } B_i[f_i^{-1}]}.$$

Ainsi l'ouvert U est recouvert par les schémas affines $\text{Spec } B_i[f_i^{-1}]$. C'est donc un schéma. \diamond

3.4. Points et produits fibrés

Comment visualiser un schéma ou ses points ?

Rappel. Soient k un corps algébriquement clos et $X := \text{Spec } k[T_1, \dots, T_n]/\langle f_1, \dots, f_m \rangle$. On rappelle qu'il existe une bijection

$$\text{Hom}_{\text{sch}}(\text{Spec } k, X) \simeq \text{Hom}_{k\text{-alg}}(k[T_1, \dots, T_n]/\langle f_1, \dots, f_m \rangle, k) \simeq V(f_1, \dots, f_m)$$

et que ces ensembles sont encore en bijection avec l'ensemble des points fermés de X . On peut alors faire des dessins.

Dans le cas général où le corps k est arbitraire et le schéma X n'est plus comme dans le précédent paragraphe, on peut toujours regarder l'ensemble $X(k) := \text{Hom}_{\text{sch}}(\text{Spec } k, X)$. On peut se demander si l'on peut reconstruire les points de X à partir de tous les ensembles $X(k)$ pour des corps k . Mais la procédure $X \mapsto X(k)$ fait perdre beaucoup d'informations. Par exemple, si $X = \text{Spec } \mathbf{Z}[T]$, alors $X(k) = k$; si $X = \text{Spec } \mathbf{Z}[T]/\langle p \rangle$, alors $X(k) = \emptyset$ dès que le corps k est de caractéristique différente de p .

Définition 3.30. Un schéma X est *réduit* si les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ avec $U \subseteq X$ sont réduits.

Proposition 3.31. 1. Un schéma affine $\text{Spec } A$ est réduit si et seulement si l'anneau A est réduit.
2. Un schéma X est réduit si et seulement si les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ pour tous les ouverts affines U sont réduits si et seulement si l'espace X admet un recouvrement ouvert par des schémas affines réduits.

Démonstration. 1. On suppose que l'anneau A est réduit. Alors l'anneau $A[f^{-1}]$ est réduit. En effet, si $(a/f^m)^n = 0$, alors $a^n/1 = 0$, donc a^n est de f -torsion, donc $f^N a^n = 0$ pour un entier $N \geq 1$. On peut supposer $N \geq n$. On écrit alors $(fa)^N = 0$, donc $fa = 0$, donc a est de f -torsion, donc $a/1 = 0$, donc $a/f^m = 0$.

On recouvre l'ouvert $U \subseteq X$ par des ouverts principaux. Alors on obtient un morphisme injectif $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \prod_f \mathcal{O}_X(D(f))$, donc l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. Ceci montre l'implication non triviale.

2. Les deux implications directes sont claires. On suppose maintenant que l'espace X admet un recouvrement ouvert par des schémas affines réduits. On note $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ ce recouvrement. Soit $U \subseteq X$ un ouvert. Montrons que l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. Si $U \subseteq U_{\alpha}$ pour un indice α , alors le premier point indique que l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. Sinon il existe un morphisme injectif $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \prod_{\alpha} \mathcal{O}_X(U \cap U_{\alpha})$ où le but est réduit. \diamond

Rappelons que $\text{Spec } A_{\text{red}} \simeq \text{Spec } A$ où $A_{\text{red}} = A/\text{Nil}(A)$.

Proposition 3.32. 1. Si $X := (|X|, \mathcal{O}_X)$ est un schéma, alors $X_{\text{red}} := (|X|, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}})$ est un schéma où le faisceau $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$ est celui associé au préfaisceau $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}^0$ défini par l'égalité

$$\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}^0(U) := \mathcal{O}_X(U)_{\text{red}}.$$

2. Si $X = \text{Spec } A$, alors $X_{\text{red}} \simeq \text{Spec } A_{\text{red}}$.
3. Pour tout schéma réduit Y , il existe une bijection naturelle $\text{Hom}(Y, X) \simeq \text{Hom}(Y, X_{\text{red}})$.

Démonstration. 2. On sait déjà que $|\text{Spec } A| \simeq |\text{Spec } A_{\text{red}}|$. En effet, le morphisme canonique $A \rightarrow A_{\text{red}}$ donne un morphisme $\text{Spec } A_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec } A$ qui envoie $V(f)$ sur $V(\bar{f})$ pour $f \in A$. En particulier, il envoie $D_A(f)$ sur $D_{A_{\text{red}}}(\bar{f})$ de manière homéomorphique. D'une part, cela

implique que le morphisme $A[f^{-1}]_{\text{red}} \rightarrow A_{\text{red}}[\bar{f}^{-1}]$ est une bijection. En effet, il est surjectif et, en notant I son noyau, l'image de $\text{Spec } A_{\text{red}}[\bar{f}^{-1}]$ est $V(I)$, donc $I = \text{Nil}(A[\bar{f}^{-1}]_{\text{red}}) = 0$. On obtient alors $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}^0(D(f)) = \mathcal{O}_{\text{Spec } A_{\text{red}}}(D(f))$ et donc $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}^0 = \mathcal{O}_{\text{Spec } A_{\text{red}}}$, donc $X_{\text{red}} = \text{Spec } A_{\text{red}}$.

1. Pour un ouvert affine $U = \text{Spec } A \subseteq X$, le point 2 donne

$$(|U|, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}|_U) = (|U|, \mathcal{O}_{U_{\text{red}}}) = \text{Spec } A_{\text{red}}.$$

Ainsi un recouvrement par des ouverts affines de X donne un recouvrement de l'espace annelé X_{red} par des schémas affines. Ainsi l'espace annelé X_{red} est un schéma. De plus, il est réduit grâce à la proposition précédente.

3. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme. Il donne un morphisme de faisceaux $f^b: \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$, c'est-à-dire un morphisme $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ pour tout ouvert $U \subseteq X$. Or l'anneau $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ est réduit, donc on peut factoriser ce dernier par $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}(U) = \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}^0(U)$. Par unicité de la factorisation, cette factorisation se comporte bien avec les restrictions. Cela nous donne un morphisme de faisceaux $\tilde{f}^b: \mathcal{O}_{X_{\text{red}}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ et donc un morphisme de schémas (f, \tilde{f}^b) . Pour l'autre sens, on considère le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$. \diamond

Revenons au foncteur de points. Soit X un schéma général. Comme le corps k est toujours réduit, cela permet d'obtenir l'isomorphisme $X_{\text{red}}(k) \simeq X(k)$. Pour pouvoir reconstruire le schéma X , il faut donc considérer des points à valeurs dans des schémas plus généraux.

Définition 3.33. Soient \mathcal{C} une catégorie et S un objet. Notons $\mathcal{C}/_S$ la catégorie des morphismes $A \rightarrow S$, notés A/S , pour un objet A où les morphismes sont les morphismes $f: A \rightarrow B$ formant des triangles commutatifs.

Prenons la catégorie **Sch** des schémas et un schéma S . Les *points d'un schéma X à valeurs dans un schéma T* sont l'ensemble $X_S(T) := \text{Hom}_{\mathbf{Sch}/_S}(T/S, X/S)$.

Lorsque $S = \text{Spec } \mathbf{Z}$, on écrit simplement $X(T)$ au lieu de $X_S(T)$. On obtient alors un foncteur contravariant $\mathbf{Sch}/_S \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui à un schéma T sur S associe l'ensemble $X_S(T)$.

Lemme 3.34 (Yoneda). Soit \mathcal{C} une catégorie localement petite, c'est-à-dire dont les classes de morphismes sont des ensembles. Alors le foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \text{Fon}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens})$ qui à un objet X associe le foncteur contravariant $h_X := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ est pleinement fidèle.

Démonstration. On prouve d'abord que $\text{Hom}_{\text{Fon}}(h_X, A) \simeq A(X)$ pour tout foncteur A . Ensuite, on applique cela à $A = h_Y$. \diamond

En appliquant ce lemme à la catégorie $\mathcal{C} = \mathbf{Sch}/_S$, un schéma X est uniquement déterminé par le foncteur X_S .

Proposition 3.35. Soient S un schéma affine et $\mathbf{Sch}/_S^{\text{aff}}$ la catégorie des schémas affines sur S . Alors le foncteur

$$\begin{cases} \mathbf{Sch}/_S \rightarrow \text{Fon}(\mathbf{Sch}/_S^{\text{aff}}, \mathbf{Ens}), \\ X \mapsto X_S|_{\mathbf{Sch}/_S^{\text{aff}}} \end{cases}$$

est pleinement fidèle.

Pour $S = \text{Spec } \mathbf{Z}$ et en utilisant la pleine fidélité du foncteur spectre, on remarque qu'un schéma X est équivalent à la donnée de son foncteur $\mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ens}$ associant un anneau R à l'ensemble

$$X(R) := \text{Hom}(\text{Spec } R, X).$$

- Exemple.**
1. Si $X = \text{Spec } \mathbf{Z}[T]$, alors $X(R) \simeq R$.
 2. Si $X = \text{Spec } \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$, alors $X(R) \simeq R^\times$.
 3. Si $X = \text{Spec } \mathbf{Z}[T]/\langle T^n - 1 \rangle$, alors $X(R)$ est en bijection avec l'ensemble $\mu_n(R)$ des racines n -ièmes de l'unité.
 4. Si $X = \text{Spec } \mathbf{Z}$, alors $X(R) \simeq \{\text{pt}\}$.

Rappel. Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des limites projectives finies. Alors on peut y définir les produits fibrés. Par exemple, dans la catégorie **Ens** des ensembles, soient $f: X \rightarrow S$ et $g: Y \rightarrow S$ deux applications. Alors le produit fibré $X \times_S Y$ est l'ensemble

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y.$$

Un tel produit fibré vient avec des projections $p_X: X \times_S Y \rightarrow X$ et $p_Y: X \times_S Y \rightarrow Y$ et avec une propriété universelle.

Définition 3.36. Soient X et Y deux schémas sur S . Alors on peut construire le schéma $X \times_S Y$ sur S , s'il existe, avec deux morphismes de projections p_X et p_Y avec la propriété universelle suivante :

pour tout schéma T sur S muni de deux morphismes $T \rightarrow X$ et $T \rightarrow Y$, alors il existe un unique morphisme $T \rightarrow X \times_S Y$ qui fait commuter le diagramme.

Remarque. Notons que $X(T) \times_{S(T)} Y(T) \simeq \text{Hom}(T, X \times_S Y) = (X \times_S Y)(T)$.

Théorème 3.37. Dans la catégorie $\mathbf{Sch}/_S$, le produit fibré existe. Si $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ et $S = \text{Spec } R$, alors

$$X \times_S Y \simeq \text{Spec}(A \otimes_R B).$$

Démonstration. Dans le cas affine, il suffit de le tester avec un schéma affine $T = \text{Spec } C$. Il existe un unique morphisme $A \otimes_R B \rightarrow C$ et des projections $A \rightarrow A \otimes_R B$ et $B \rightarrow A \otimes_R B$ factorisant le diagramme. Ainsi le schéma affine $\text{Spec}(A \otimes_R B)$ avec ces projections vers $\text{Spec } A$ et $\text{Spec } B$ satisfait la propriété universelle du produit fibré $X \times_S Y$. On pourra regarder le livre de Hartshorne pour le cas général. L'idée est d'utiliser des recouvrements affines qui sont compatibles avec les projections, de se servir du cas affine et de vérifier le recollement. \diamond

Exemples. – Le théorème permet d'écrire

$$\mathbf{A}_k^1 \times_{\text{Spec } k} \mathbf{A}_k^1 = \text{Spec}(k[T_1] \otimes_k k[T_2]) = \text{Spec } k[T_1, T_2] = \mathbf{A}_k^2.$$

– De même, on obtient

$$\text{Spec}(\mathbf{R}[T]/(T^n - 1)) \times_{\text{Spec } \mathbf{R}} \text{Spec } \mathbf{C} = \text{Spec}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[T]/(T^n - 1)) = \text{Spec}(\mathbf{C}[T]/(T^n - 1)).$$

Remarque. L'espace topologique $|X \times_S Y|$ n'est pas, en général, égale à $|X| \times_{|S|} |Y|$. Il existe une surjection canonique $|X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$ qui n'est pas nécessairement injective. En effet, on prend $X = Y = \mathbf{A}_k^1$ où le corps k est algébriquement clos. Alors

$$|X| \times_{|S|} |Y| = k^2 \cup \{\eta_X\} \times k \cup k \times \{\eta_Y\} \cup \{(\eta_X, \eta_Y)\}.$$

Mais dans l'espace topologique $|\mathbf{A}_k^2|$, on a aussi des courbes irréductibles $V(\mathfrak{p})$ avec $0 \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq k[T_1, T_2]$.

3.5. L'espace projectif

On verra un exemple d'un schéma non affine qui généralise l'espace projectif complexe \mathbf{CP}^n .

Rappel. Soit $n \geq 1$ un entier. On définit l'espace projectif $\mathbf{CP}^n := (\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbf{C}^*$ de dimension n . La classe d'un vecteur $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ est dénotée $[x_0 : \dots : x_n]$. Cet espace \mathbf{CP}^n se recouvrement par les ouverts

$$U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbf{CP}^n \mid x_i \neq 0\} \simeq \mathbf{C}^n.$$

Pour $i \neq j$, remarquons que $U_i \cap U_j \simeq \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}^*$. Cette définition se généralise à un corps quelconque k ce qui donne l'espace projectif $\mathbf{P}^n(k)$.

Notre but est de définir un schéma \mathbf{P}_Z^n dont les k -points forment l'ensemble $\mathbf{P}^n(k)$ pour tout corps k .

La construction. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$U_i := \text{Spec } \mathbf{Z}[X_{i,j} : j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}] \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^n.$$

Pour $i \neq j$, on pose $U_{i,j} := D(X_{i,j}) \subseteq U_i$ qui se réécrit

$$U_{i,j} = \text{Spec } \mathbf{Z}[X_{i,k} : k \neq i, j, X_{i,j}^{\pm 1}]$$

avec par convention $X_{i,i} = 1$. On a un isomorphisme $\alpha_{j,i} : U_{i,j} \longrightarrow U_{j,i}$ où l'application $\alpha_{j,i}^b$ envoie $X_{j,k}$ sur $X_{i,k} X_{i,j}^{-1}$.

Lemme 3.38. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de schéma. Pour tous $i, j \in I$, soient $U_{i,j} \subseteq U_i$ un sous-schéma ouvert et $\alpha_{j,i} : U_{i,j} \longrightarrow U_{j,i}$ un isomorphisme de schémas tels que

- $\alpha_{j,i}(U_{i,j} \cap U_{i,j}) \subseteq U_{j,k}$;
- $\alpha_{k,j} \circ \alpha_{j,i} = \alpha_{k,i}$ sur $U_{i,j} \cap U_{i,k}$.

Alors il existe un schéma X et des morphismes $\beta_i : U_i \longrightarrow X$ avec $i \in I$ tels que

- la restriction $U_i \longrightarrow V_i := \beta_i(U_i)$ soit un isomorphisme;
- $\beta_j \circ \alpha_{j,i} = \beta_i$;
- $X = \bigcup_{i \in I} V_i$;
- $V_i \cap V_j = \beta_i(U_{i,j}) = \beta_j(U_{j,i})$.

Démonstration. Ceci est une généralisation de la construction qu'on a fait pour la droite projective. On définit $X = (\bigsqcup_{i \in I} U_i) / \sim$ avec $U_{j,i} \ni x_i \sim x_j \in U_{i,j}$ si $\alpha_{j,i}(x_i) = x_j$. La condition de cocycle assure que la relation \sim est une relation d'équivalence. On obtient des injections $\beta_i : U_i \longrightarrow X$ avec $i \in I$ vérifiant l'égalité $\beta_i(U_{i,j}) = \beta_i(U_i) \cap \beta_j(U_j)$.

Il suffit alors de définir le faisceau \mathcal{O}_X sur les ouverts $U \subseteq X$ contenu dans un ensemble $\beta_i(U_i)$ avec $i \in I$. Ceci est bien défini et nous donne un faisceau. Enfin, pour chaque $i \in I$, on dispose d'un isomorphisme d'espaces localement annelés $U_i \longrightarrow (\beta_i(U_i), \mathcal{O}_X|_{\beta_i(U_i)})$. Ainsi on a obtenu un schéma (X, \mathcal{O}_X) . \diamond

Remarque. Pour $i = j = k$, on a $\alpha_{i,i} = \text{Id}_{U_i}$. Pour $i = k$, on trouve alors $\alpha_{j,i} = \alpha_{i,j}^{-1}$ sur $U_{i,j}$. De plus, le morphisme $\alpha_{j,i}$ est un isomorphisme $U_{i,j} \cap U_{i,k} \longrightarrow U_{j,i} \cap U_{j,k}$.

En appliquant ce lemme, on trouve alors un schéma $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$, appelé l'espace projectif de dimension n . Dans le cas $n = 1$, on retrouve la droite projective. En particulier, soit k un corps. On écrit

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n(k) = \text{Hom}(\text{Spec } k, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n) = \bigcup_{i=0}^n \text{Hom}(\text{Spec } k, U_i) \simeq \bigcup_{i=0}^n k \simeq \mathbf{P}^n(k).$$

Comment décrire les points $\mathbf{P}^n(R)$ pour un anneau quelconque R ?

Définition 3.39. Soit R un anneau. Un R -module M est *invertible* s'il existe un recouvrement ouverts $\text{Spec } R = \bigcup_i D(f_i)$ tel que, pour tout $i \in I$, on ait $M[f_i^{-1}] \simeq R[f_i^{-1}]$ en tant que $R[f_i^{-1}]$ -modules.

Remarque. Cette définition est équivalente à l'existence d'un R -module M' tel que $M \otimes_R M' \simeq R$ en tant que R -modules.

Théorème 3.40. Soit R un anneau. Alors il existe une bijection naturelle entre l'ensemble $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n(R)$ et l'ensemble des applications R -linéaire surjective $p : R^{n+1} \longrightarrow L$ où le R -module L est invertible modulo la relation \sim telle que $p \sim p'$ s'il existe un isomorphisme $\alpha : L \longrightarrow L'$ tel que $p' = \alpha \circ p$.

Exemple. Soit k un corps. Chaque k -module L est invertible. L'ensemble considéré dans le théorème est l'ensemble des formes linéaires surjective $k^{n+1} \longrightarrow k$ qui est en bijection avec l'ensemble $k^{n+1} \setminus \{0\}$ et la relation d'équivalence est l'action du groupe k^\times . On retrouve donc l'espace projectif $\mathbf{P}^n(k)$.

Démonstration. Soit $\phi : \text{Spec } R \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$ un point. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la préimage $\phi^{-1}(U_i)$ est recouvert par des ouverts principaux $D(f_{i,k})$ avec $f_{i,k} \in R$. On a des morphismes de schémas

$$\phi_{i,k} : \text{Spec } R[f_{i,k}^{-1}] \longrightarrow U_i$$

tels que $\phi_{i,k}^b : \mathbf{Z}[X_{i,j} : i \neq j] \longrightarrow R[f_{i,k}^{-1}]$. On pose $x_{i,j,k} := \phi_{i,k}^b(X_{i,j}) \in R[f_{i,k}^{-1}]$. Considérons la surjection $R[f_{i,k}^{-1}]$ -linéaire

$$p_{i,k} : R[f_{i,k}^{-1}]^{n+1} \longrightarrow R[f_{i,k}^{-1}]^{-1}$$

qui envoie un vecteur e_j de la base canonique sur $x_{i,j,k}$ si $j \neq i$ ou sur 1 si $j = i$. Alors les applications $p_{i,k}$ se recollent pour donner une surjection $R^{n+1} \longrightarrow L$ avec L inversible. Donnons la preuve dans le cas où $\phi^{-1}(U_i) = D(f_i) \subseteq \text{Spec } R$. Le cas général est similaire mais avec plus de notations. On a des surjections $p_i : R[f_i^{-1}]^{n+1} \longrightarrow R[f_i^{-1}]$. Pour $i \neq i'$, on a

$$\phi^{-1}(U_i \cap U_{i'}) = D(f_i f_{i'}^{-1}) = \text{Spec } R[(f_i f_{i'}^{-1})^{-1}]$$

et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & R[(f_i f_{i'}^{-1})^{-1}] \\ & \nearrow p_i[f_{i'}^{-1}] & \downarrow \\ R[(f_i f_{i'}^{-1})^{-1}]^{n+1} & & \\ & \searrow p_{i'}[f_i^{-1}] & \\ & & R[(f_i f_{i'}^{-1})^{-1}]. \end{array}$$

En plus, on a $X_{i,j} X_{i',j}^{-1} = X_{i',j}$ sur $U_i \cap U_{i'}$, donc ce diagramme commute car $p_i(e_j) x_{i',j}^{-1} = p_{i'}(e_j)$. On a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.41. Soit $\text{Spec } R = \bigcup_i D(f_i)$. Alors le foncteur $M \longmapsto (M[f_i^{-1}])_i$ de la catégorie des R -modules dans la catégories des familles de $R[f_i^{-1}]$ -modules $(N_i)_i$ avec des isomorphismes $R[(f_i f_j)^{-1}]$ -linéaires $\alpha_{j,i} : N_i[f_j^{-1}] \longrightarrow N_j[f_i^{-1}]$ tels que $\alpha_{k,j} \circ \alpha_{j,i} = \alpha_{k,i}$ sur $N_i[(f_j f_k)^{-1}]$ et des morphismes $N_i \longrightarrow N_{i'}$ compatibles avec les $\alpha_{i,j}$ est une équivalence de catégories.

En appliquant le lemme à $L_i := R[f_i^{-1}]$ avec

$$\alpha_{i,i'} : L_{i'}[f_i^{-1}] = R[(f_i f_{i'}^{-1})^{-1}] \longrightarrow R[(f_i f_{i'}^{-1})^{-1}] = L_i[f_{i'}^{-1}],$$

alors les applications $p_i : R[f_i^{-1}]^{n+1} \longrightarrow L_i$ se recollent et donne un morphisme de R -modules $p : R^{n+1} \longrightarrow L$ ayant les propriétés suivantes :

- L est localement libre de rang 1, c'est-à-dire $L[f_i^{-1}] \simeq L_i$ pour tout i ;
- l'application p est surjective. En effet, le morphisme d'anneaux $R \longrightarrow \prod_i R[f_i^{-1}]$ est plat (un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ est plat si le foncteur $B \otimes_A -$ est exact) et il est même fidèlement plat (avec les mêmes notations, cela signifie $B \otimes_A M = 0 \Rightarrow M = 0$). En effet, on écrit $\text{Spec } R = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$. Alors $R = \sum R f_i$, donc $(\prod R[f_i^{-1}]) \otimes_R M = 0$, donc $M = 0$. En prenant $K = \text{coker } p$, on trouve $\prod_i R[f_i^{-1}] \otimes K = \prod_i \text{coker } p_i = 0$, donc $K = 0$.

Réciproquement, soit $[p]$ avec $p : R^{n+1} \longrightarrow L$ et L localement libre de rang 1. Construisons un point $\phi : \text{Spec } R \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$. On peut travailler localement sur $\text{Spec } R$ et supposer donc que $L \simeq R$ comme R -module. Alors le morphisme p envoie e_j sur un élément x_j . Comme P est surjective, on peut écrire $\sum R x_i = R$, donc $\bigcap V(x_i) = \emptyset$, donc $\bigcup D(x_i) = \text{Spec } R$. Quitte à passer à un ouvert de $\text{Spec } R$, on peut suppose que $x_i \in R^\times$ pour un i . On peut alors remplace p par p' qui envoie e_j sur x_j/x_i . On obtient un morphisme $\text{Spec } R \longrightarrow U_i = \text{Spec } \mathbf{Z}[X_{i,j}, j \neq i] \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$. La construction de ce point est compatible sur les intersections. Cela nous donne un point $\phi \in \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n(R)$.

Finalement, on vérifie que les deux procédures sont mutuellement inverses. \diamond

3.6. Faisceaux quasi-cohérents et immersions fermées

3.6.1. Faisceaux quasi-cohérents

Définition 3.42. Soient A un anneau et M un A -module. On note \tilde{M} le préfaisceau sur la base des ouverts principaux de l'espace topologique $X = \text{Spec } A$ donné par l'égalité

$$\tilde{M}(D(f)) := M[f^{-1}], \quad f \in A.$$

Chaque objet $\tilde{M}(D(f))$ est un $A[f^{-1}]$ -module. De plus, remarquons que $\tilde{M}(X) = M$. On peut montrer qu'il s'agit d'un faisceau. Il se prolonge à l'espace X .

Proposition 3.43. Soit $x \in \text{Spec } A$ un point. Alors $\tilde{M}_x = M_x$.

Démonstration. On écrit

$$\tilde{M}_x = \lim_{x \in D(f)} M[f^{-1}] = \lim_{f \in x} M[f^{-1}] = M_x. \quad \diamond$$

Définition 3.44. Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Un faisceau de \mathcal{O}_X -modules est un faisceau de groupes abéliens M muni d'un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \times M \rightarrow M$ tel que, pour chaque ouvert $U \subseteq X$, le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \times M(U) \rightarrow M(U)$ munisse le groupe $M(U)$ d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules. Un morphisme de \mathcal{O}_X -modules est un morphisme de faisceaux $M \rightarrow M'$ compatible avec les morphismes $\mathcal{O}_X \times M \rightarrow M$ et $\mathcal{O}_X \times M' \rightarrow M'$.

Proposition 3.45. Le faisceau \tilde{M} est un $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -module.

Démonstration. Pour un élément $f \in A$, on définit l'application $A[f^{-1}] \times M[f^{-1}] \rightarrow M[f^{-1}]$. Cela donne un morphisme de préfaisceaux sur la base des ouverts principaux. On peut ainsi le prolonger en un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{\text{Spec } A} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$: on vérifie qu'il est compatible aux restrictions. \diamond

Théorème 3.46. Soit $X = \text{Spec } A$ un schéma affine. Alors

1. le foncteur $M \mapsto \tilde{M}$ de la catégorie des A -modules dans celle de \mathcal{O}_X -modules est pleinement fidèle ;
2. Soit \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module. S'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup_i D(f_i)$ tel que $\mathcal{M}|_{D(f_i)} \simeq \tilde{M}_i$ pour un $A[f_i^{-1}]$ -module M_i , alors il existe un A -module M tel que $\mathcal{M} = \tilde{M}$

On admet provisoirement ce théorème.

Définition 3.47. Soit X un schéma. Un *faisceau quasi-cohérent* sur X est un \mathcal{O}_X -module s'il existe un recouvrement ouvert affine $X = \bigcup_i U_i$ avec $U_i = \text{Spec } A_i$ tel que $\mathcal{M}|_{U_i} \simeq \tilde{M}_i$ pour un A_i -module. Un morphisme de faisceaux quasi-cohérents est un morphisme de \mathcal{O}_X -modules.

Corollaire 3.48. Soit $X = \text{Spec } A$ un schéma affine. Alors le foncteur $M \mapsto \tilde{M}$ est une équivalence de catégories abéliennes entre la catégorie des A -modules et celle $\mathbf{QCoh}(X)$ des faisceaux quasi-cohérents sur X .

Démonstration. Tout est clair sauf l'aspect abélien. Comme la catégorie des A -modules est abélienne, il suffit de montrer que ce foncteur est exact. Soit $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Soit $x \in X$. Il suffit de montrer que la suite

$$0 \rightarrow \tilde{N}_x \rightarrow \tilde{M}_x \rightarrow \tilde{Q}_x \rightarrow 0$$

est exacte. Mais cette suite est la suite de localisés

$$0 \rightarrow N_x \rightarrow M_x \rightarrow Q_x \rightarrow 0$$

qui est exacte. \diamond

Démonstration du théorème. 1. On va montrer un résultat plus général. Soient M un A -module et N un \mathcal{O}_X -module. Alors on trouve une bijection

$$\text{Hom}(\tilde{M}, N) \simeq \text{Hom}(M, N(X))$$

donnée par les sections globales. En effet, montrons son injectivité. Soient $\phi, \phi' : \tilde{M} \rightarrow N$ deux morphismes tels que $\phi(X) = \phi'(X) := \psi$. Pour un ouvert principal $U = D(f) \subseteq X$, on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M[f^{-1}] \\ \downarrow \psi & & \downarrow \phi, \phi' \\ N(X) & \longrightarrow & N(U). \end{array}$$

En général, si M est un A -module et N est un $A[f^{-1}]$, alors un morphisme A -linéaire $M \rightarrow N$ se factorise de manière unique en un morphisme $M[f^{-1}] \rightarrow N$. On en déduit ainsi l'égalité $\phi(U) = \phi'(U)$, donc $\phi = \phi'$. L'argument de factorisation utilise la propriété suivante :

Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme. Soient M un A -module et N un B -modules.

Alors il existe une bijection fonctorielle $\text{Hom}_A(M, N) \simeq \text{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$.

Dans notre cas, on prend $B = A[f^{-1}]$ et on remarque que $B \otimes_A M = M[f^{-1}]$.

Pour la surjectivité, soit $\psi: M \rightarrow N(X)$ un morphisme. Soit $U = D(f)$ un ouvert principal. Alors on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \tilde{M}(U) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi_U \\ N(X) & \longrightarrow & N(U). \end{array}$$

Par unicité, les morphismes ψ_U forment un morphisme de préfaisceaux $\psi: \tilde{M} \rightarrow N$ sur la base des ouverts principaux et donc un morphisme sur X .

2. On considère le A -module $M := \mathcal{M}(X)$. L'identité $M = \tilde{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ correspond, grâce au point 1, à un morphisme $\tilde{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme. Soit $U = D(g)$ un ouvert principal. Prenons le recouvrement $X = \bigcup U_i$ avec $U_i = D(f_i)$. Alors $D(g) = \bigcup U_i \cap D(g) = \bigcup D(gf_i)$. On suppose que $|I| < \infty$. Comme $\mathcal{M}|_{D(f_i)} \simeq \tilde{M}_i$, on trouve $\mathcal{M}(D(gf_i)) = M_i[g^{-1}]$ où on a encore noté g l'image de g dans $A[f_i^{-1}]$. Or

$$\begin{aligned} M = \mathcal{M}(X) &= eg\left(\bigoplus \mathcal{M}(D(f_i))\right) \simeq \bigoplus \mathcal{M}(D(f_i f_j)) \\ &= eg\left(\bigoplus M_i\right) \simeq \bigoplus M_i[f_j^{-1}]. \end{aligned}$$

Comme la localisation en g est exacte, on écrit

$$\begin{aligned} M[g^{-1}] &= eg\left(\bigoplus M_i[g^{-1}]\right) \simeq \bigoplus M_i[(gf_j)^{-1}] \\ &= eg\left(\bigoplus \mathcal{M}(U_i \cap D(g))\right) \simeq \bigoplus \mathcal{M}(U_{i,j} \cap D(g)) \quad \text{avec } U_{i,j} = D(f_i f_j) \\ &= \mathcal{M}(D(g)). \end{aligned} \quad \diamond$$

Corollaire 3.49. Soit $\text{Spec } A = \bigcup D(f_i)$ un schéma affine. Alors le fonction $M \mapsto (M[f_i^{-1}])_i$ de la catégorie des A -modules vers la catégories des familles $(M_i)_i$ des $A[f_i^{-1}]$ -modules et des isomorphismes $M_j[f_i^{-1}] \rightarrow M_i[f_j^{-1}]$ satisfaisant la condition de cocycle.

Démonstration. Par le corollaire précédente, on dispose d'une équivalence de catégorie

$$A\text{-Mod} \simeq \mathbf{QCoh}(\text{Spec } A)$$

qui est aussi équivalente à la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur les ouverts $D(f_i)$ munis des données de recollement. Cette dernière est équivalente à la catégorie annoncée. \diamond

3.6.2. Immersion fermés

Considérons une classe importante de morphismes entre des schémas : les immersions fermées.

Définition 3.50. Une *immersion fermée* entre deux schémas Z et X est un homéomorphisme $f: Z \rightarrow X$ où l'espace topologique $|Z|$ est un fermé de $|X|$ tel que le morphisme de faisceaux $f^b: \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Z$ soit surjectif.

Proposition 3.51. Soit $f: Z \rightarrow X$ un morphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le morphisme f est une immersion fermée ;
- (ii) pour tout ouvert affine $U = \text{Spec } A \subseteq X$, la pré-image $f^{-1}(U) = \text{Spec } B$ est un ouvert affine et le morphisme $A \rightarrow B$ est surjectif ;
- (iii) il existe un recouvrement ouvert affine $X = \bigcup_i U_i$ tel que tout ouvert affine U_i satisfait le point (ii).

Remarque. Soit X un schéma affine $\text{Spec } A$. Le point (iii) assure que les immersions fermées dans le schéma X sont en bijection avec les morphismes d'anneaux surjectifs dans l'anneau A .

Définition 3.52. Un espace topologique X est *quasi-séparé* si, pour tous ouverts quasi-compacts $U, V \subseteq X$, leur intersection $U \cap V$ est quasi-compacte.

Une application continue $f: X \rightarrow Y$ est *quasi-compacte* (respectivement *quasi-séparée*) si, pour tout ouvert quasi-compact (respectivement quasi-séparé) $U \subseteq X$, sa pré-image $f^{-1}(U)$ est quasi-compact (respectivement quasi-séparée).

Exemple. Un schéma affine $\text{Spec } A$ est quasi-séparé. En effet, soient $U, V \subseteq \text{Spec } A$ des ouverts quasi-compacts. Alors on peut les écrire sous la forme $U = \bigcup_{i=1}^m D(f_i)$ et $V = \bigcup_{j=1}^n D(g_j)$. Leur union $U \cap V = \bigcup_{i,j} D(f_i g_j)$ est alors quasi-compacte.

Remarque. Un fermé Z d'un quasi-compact X est quasi-compact. En particulier, une immersion topologique fermée est quasi-compacte. En effet, soit $Z = \bigcup_j V_j$. Choisissons un ouvert $U_j \subseteq X$ tel que $V_j = Z \cap U_j$. Alors $X = X \setminus Z \cup \bigcup_j U_j$. Par quasi-compactité, on peut écrire

$$X = X \setminus Z \cup \bigcup_{k=1}^n U_{j_k},$$

donc $Z = \bigcup_{k=1}^n V_{j_k}$.

Remarque. Soient X un espace topologique admettant une base de quasi-compact et $Z \subseteq X$ un fermé. Si X est quasi-séparé, alors Z est quasi-séparé. En particulier, une immersion topologique fermée est quasi-séparée. En effet, soit $V_i \subseteq Z$ des quasi-compact avec $i = 1, 2$. Choisissons un ouvert quasi-compact $U_i \subseteq X$ tel que $V_i = U_i \cap Z$. Alors l'intersection $V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ est fermée dans le quasi-compact $U_1 \cap U_2$. Avec le point précédent, on en déduit qu'elle est quasi-compacte.

Proposition 3.53. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas quasi-compact et quasi-séparé. Soit $N \in \mathbf{QCoh}(Y)$ un faisceau quasi-cohérent. Alors le faisceau $f_* N$ est quasi-cohérent.

Remarque. Le faisceau $f_* N$ est un \mathcal{O}_X -module par l'action $f^b: \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$.

Démonstration. On peut supposer que le schéma X est un schéma affine $\text{Spec } A$. Comme le schéma X est quasi-compact et quasi-séparé, la préimage $f^{-1}(X)$ est alors quasi-compacte et quasi-séparée. On peut supposer que $Y = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec } B_i$ et $N|_{\text{Spec } B_i} = \tilde{N}_i$ pour un B_i -module N_i . De plus, on peut supposer que $\text{Spec } B_i \cap \text{Spec } B_j = \bigcup_{k \in I_{i,j}} B_{i,j,k}$ pour des ensembles finis $I_{i,j}$. Soit $M := f_* N(X) = N(Y)$. Avec l'adjonction, il existe un morphisme de \mathcal{O}_X -module $\phi: \tilde{M} \rightarrow f_* N$. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme. Soit $g \in A$. Montrons que le morphisme

$$\phi(D(g)): M[g^{-1}] \rightarrow f_* N(D(g))$$

est un isomorphisme. Mais on peut montrer ça comme dans la preuve de la proposition 3.48. \diamond

Preuve de la proposition 3.51. L'implication de (ii) vers (iii) est claire. On suppose le point (iii). Montrons le point (i). On peut tester le caractère « immersion fermée » localement sur X . On peut donc supposer $X = \text{Spec } A$ et $Z = \text{Spec } B$. On a donc une surjection $p: A \rightarrow B$. Le noyau $I := \text{Ker } p$ est un idéal de A . On a alors un homéomorphisme

$$\text{Spec } p: \text{Spec } B \rightarrow V(I).$$

De plus, pour $g \in A$, on a un morphisme

$$A[g^{-1}] = \mathcal{O}_X(D(g)) \rightarrow f_* \mathcal{O}_Z(D(g)) = \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(D(p(g))) = B[p(g)^{-1}] = A[g^{-1}] \otimes_A B.$$

qui est surjectif car le foncteur $A[g^{-1}] \otimes_A -$ est exact. Soit $x \in X$ un point. Comme le foncteur $\lim_{x \in D(g)}$ est exact, les morphismes $f_x^b: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow (f_* \mathcal{O}_Z)_x$ sont surjectifs ce qui assure que le morphisme f^b est surjectif. D'où le point (i).

On suppose le point (i). Montrons le point (ii). On peut supposer $X = \text{Spec } A$. Alors $|Z| \subseteq |X|$ est un fermé. Comme X est quasi-compact et quasi-séparé, le fermé Z l'est aussi. Pour la même raison, si $U \subseteq X$ est un ouvert quasi-compact et quasi-séparé, alors $U \cap Z$ l'est, donc f l'est. Avec la proposition, on en déduit que le faisceau $f_* \mathcal{O}_Z$ est quasi-cohérent, donc $f_* \mathcal{O}_Z = \tilde{B}$ pour

le A -module $B := f_*\mathcal{O}_Z(X) = \mathcal{O}_Z(Z)$, donc B est une A -algèbre. On veut montrer que $Z = \text{Spec } B$. On a un morphisme surjectif $f^b: \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Z$ de faisceaux quasi-cohérents. Comme le foncteur section globale $\Gamma(X, -)$ est exact, on obtient un morphisme surjectif $p: A \rightarrow B$. Par adjonction appliquée à l'identité $B \rightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$, on obtient alors un morphisme de schémas $\phi: Z \rightarrow \text{Spec } B$ sur $\text{Spec } A$. L'application $|\phi|$ est injective. Montrons sa surjectivité. Si $x \in \text{Spec } B \setminus \phi(Z)$, alors

$$0 \neq A_{i(x)} \otimes_A B = B_{i(x)} = \tilde{B}_{i(x)}(f_*\mathcal{O}_Z)_{i(x)} = \lim_{i(x) \in V} \mathcal{O}_Z(V \cap Z) = \emptyset$$

avec $i := \text{Spec } p$ ce qui est impossible. D'où sa surjectivité. Comme l'application ϕ est fermé, il s'agit donc d'un homéomorphisme. Pour les faisceaux de fonctions, soit $g \in A$. On note $\bar{g} := p(g) \in B$. On calcule

$$\mathcal{O}_Z(D(\bar{g})) = f_*\mathcal{O}_Z(D(g)) = \tilde{B}(D(g)) = B[\bar{g}^{-1}] = \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(D(\bar{g})).$$

La bijection $\mathcal{O}_Z(D(\bar{g})) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } B}(D(\bar{g}))$ est compatible aux morphismes de restrictions ce qui montre que $\mathcal{O}_Z \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec } B}$. D'où $Z \simeq \text{Spec } B$ ce qui montre le point (ii). \diamond

3.7. Fibrés vectoriels et groupe de Picard

Définition 3.54. Soit X un espace annelé. Une \mathcal{O}_X -algèbre est un faisceau d'anneaux \mathcal{A} sur X muni d'un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$.

Exemple. Si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme d'espaces annelés, alors le morphisme f^b munit le faisceau $f_*\mathcal{O}_Y$ d'une structure d'un \mathcal{O}_X -algèbre.

Définition 3.55. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{O}_X -module. On définit le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ comme le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U).$$

Remarque. Le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ est un \mathcal{O}_X -module. Si $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ est un \mathcal{A} -module. Si $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{B}$, alors $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}$ est une \mathcal{O}_X -algèbre.

Remarque. Si $X = \text{Spec } A$ et $\mathcal{M} = \tilde{M}$ et $\mathcal{N} = \tilde{N}$ sont deux faisceaux quasi-cohérents, alors le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} = \widetilde{M \otimes_A N}$ est quasi-cohérent. En effet, soit $U = D(f)$. Alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{M}(D(f)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(f))} \mathcal{N}(D(f)) = M[f^{-1}] \otimes_{A[f^{-1}]} N[f^{-1}] \simeq (M \otimes_A N)[f^{-1}] = \widetilde{(M \otimes_A N)}(D(f)).$$

Corollaire 3.56. Soient X un schéma et $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbf{QCoh}(X)$ deux faisceaux quasi-cohérents. Alors le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ est quasi-cohérent.

Démonstration. On vérifie cela sur un recouvrement affine et on applique la remarque. \diamond

Définition 3.57. Soient $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module. Alors le faisceau $f^{-1}\mathcal{M}$ muni de l'application

$$f^{-1}\mathcal{O}_X \times f^{-1}\mathcal{M} \simeq f^{-1}(\mathcal{O}_X \times \mathcal{M}) \rightarrow f^{-1}\mathcal{M}$$

est un $f^{-1}\mathcal{O}_X$ -module. On définit le *module image inverse* comme le \mathcal{O}_Y -module

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}.$$

Proposition 3.58. Soient M un \mathcal{O}_X -module et N un \mathcal{O}_Y -module. Alors il existe une bijection fonctorielle

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^*M, N) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, f_*N).$$

Démonstration. On a déjà une bijection fonctorielle

$$\text{Hom}_{\text{ab}}(f^{-1}M, N) \simeq \text{Hom}_{\text{ab}}(M, f_*N) \supseteq \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, f_*N).$$

Le sous-ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(M, f_*N)$ est en correspondance avec l'ensemble $\text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{O}_X}(f^{-1}M, N)$ qui lui-même est en correspondance avec l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}M, N)$. \diamond

Proposition 3.59. Soient $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas et $\mathcal{M} \in \mathbf{QCoh}(X)$ un faisceau quasi-cohérent.

1. Alors le faisceau $f^*\mathcal{M}$ est quasi-cohérent.
2. Si $Y = \text{Spec } B$ et $X = \text{Spec } A$ et $\mathcal{M} = \tilde{M}$ pour un A -module M , alors $f^*\mathcal{M} = \widetilde{B \otimes_A M}$.

Démonstration. Pour le point 1, on peut utiliser un recouvrement affine $Y = \bigcup_i V_i$ avec $f(V_i) \subseteq U_i \subseteq X$ et U_i affine. Si $g = f|_{V_i}: V_i \rightarrow U_i$, alors $f^*\mathcal{M}|_{V_i} \simeq g^*(\mathcal{M}|_{U_i})$. Pour vérifier la quasi-cohérence sur Y , on peut la vérifier localement et supposons X et Y affines. Il suffit de montrer le point 2.

Soit N un \mathcal{O}_Y -module. Alors on a des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^*\mathcal{M}, N) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, f_*N) \\ &\simeq \text{Hom}_A(\mathcal{M}, f_*N(X)) \\ &\simeq \text{Hom}_A(\mathcal{M}, N(Y)) \\ &\simeq \text{Hom}_B(B \otimes_A M, N(Y)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\widetilde{B \otimes_A M}, N). \end{aligned}$$

Le lemme de Yoneda fournit alors $f^*\mathcal{M} \simeq \widetilde{B \otimes_A M}$. \diamond

Calculons les points de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$ à valeurs dans un schéma quelconque X .

Définition 3.60. Un faisceau quasi-cohérent L sur X est *inversible* s'il existe un faisceau quasi-cohérent L' sur X tel que $L \otimes_{\mathcal{O}_X} L' \simeq \mathcal{O}_X$.

On notera $L^{-1} = L'$.

Remarque. – Un faisceau quasi-cohérent L sur X est inversible si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup U_i$ tel que $L|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$ comme \mathcal{O}_{U_i} -module.

– Si $X = \text{Spec } A$ et $L = \tilde{L}$ pour un A -module L , alors L est inversible si et seulement si le A -module L est inversible.

Corollaire 3.61. Soit X un schéma. Alors

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n(X) \simeq \{\text{morphisms surjectifs } \mathcal{O}_X^{n+1} \rightarrow X \text{ avec } L \text{ inversible}\} / \sim.$$

Démonstration. On considère les deux préfaisceaux

$$F_1: U \mapsto \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n(U)$$

et

$$F_2: U \mapsto \{\text{morphisms surjectifs } \mathcal{O}_U^{n+1} \rightarrow X \text{ avec } L \text{ inversible}\} / \sim.$$

Si U est affine, on a une bijection

$$\Gamma(U, -): F_2(U) \rightarrow F_1(U)$$

dont la réciproque est $\tilde{\sim}$. Ces morphismes sont compatibles aux restrictions. En passant aux faisceaux associés et aux sections globales, on obtient une bijection $F_1 \simeq F_2$. \diamond

Prenons $X = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$ et considérons le morphisme $\text{id}: \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$. D'après le corollaire précédent, il existe un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}$ -module inversible L et une surjection $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}^{n+1} \rightarrow L$.

Définition 3.62. On pose $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}(1) := L$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}(m) := L^{\otimes m}$ pour $m \in \mathbf{Z}$. Ce sont des $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}$ -modules inversibles.

Définition 3.63. Le *groupe de Picard* d'un schéma X est le groupe abélien $\text{Pic}(X)$ pour le produit tensoriel des \mathcal{O}_X -modules inversibles à isomorphisme près.

Pour un corps k , on pose $\mathbf{P}_k^n := \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}} \text{Spec } k$. Ce schéma vient avec une projection $\pi_1: \mathbf{P}_k^n \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$. On pose $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(m) := \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n}(m)$ qui est un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}$ -module inversible.

Remarque. Pour un morphisme $f: Y \rightarrow X$ et un \mathcal{O}_X -module inversible M , le \mathcal{O}_Y -module f^*M est inversible.

Théorème 3.64. Soit k un corps. Alors le morphisme de groupes $\mathbf{Z} \longrightarrow \text{Pic}(\mathbf{P}_k^n)$ qui envoie tout entier $m \in \mathbf{Z}$ sur la classe de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(m)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Admise pour le moment. \diamond

Souvent, les \mathcal{O}_X -modules sont appelés *fibrés en droites algébriques* pour la raison suivante. Soient X un schéma et L un \mathcal{O}_X -module. On définit le foncteur

$$V(L): \begin{cases} \mathbf{Sch}/X \longrightarrow \mathbf{Ens}, \\ f: Y \longrightarrow X \longmapsto f^*L(Y). \end{cases}$$

Théorème 3.65. Il existe un schéma $\pi: V(L) \longrightarrow X$ sur X tel que

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sch}/X}(Y, V(L)) \simeq V(L)(Y), \quad \forall Y \in \mathbf{Sch}/X$$

et tel qu'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup U_i$ vérifiant que, pour tout i , le triangle suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^1 \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}} U_i \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & U_i \end{array}$$

Démonstration. On prouve le théorème localement, le cas général s'en déduit par recollement. Supposons donc $X = \text{Spec } A$ et $L = \tilde{L}$ pour un A -module inversible L . Quitte à passer à un ouvert principal, on peut supposer $L \simeq A$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} V(L)(Y) &= f^*L(Y) \simeq \mathcal{O}_Y(Y) = \text{Hom}(\mathbf{Z}[T], \mathcal{O}_Y(Y)) \\ &\simeq \text{Hom}(Y, \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^1) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Sch}/X}(Y, \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^1 \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}} X). \end{aligned}$$

Cela montre le théorème localement. \diamond

Soit k un corps. On pose $A := k[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} A_d$ où A_d est l'ensemble des polynômes homogènes de degré d . On a $1 \in A_0$ et $A_d A_e \subseteq A_{d+e}$. De plus, on a $\mathbf{P}_k^n = \bigcup_{i=1}^n U_i$ avec $U_i = \text{Spec } k[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i] \simeq \mathbf{A}_k^n$. On a

$$k[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i] = A[X_i^{-1}]_0 \quad \text{avec} \quad A[X_i^{-1}] = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} A[X_i^{-1}]_d$$

où $A[X_i^{-1}]_d = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} A[X]_{d+k}/(X_i^k)$. Soit M un A -module gradué, c'est-à-dire s'écrit $M = \bigoplus_{d \in \mathbf{Z}} M_d$ avec $A_d M_e \subseteq M_{d+e}$. Sur U_i , on considère le \mathcal{O}_{U_i} -module quasi-cohérent $\mathcal{M}_i := \widetilde{M}_i$ avec $M_i := M[X_i^{-1}]_0$. Soit $U_{i,j} := U_i \cap U_j$. On a des données de recollement

$$\alpha_{j,i}: \mathcal{M}_i|_{U_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{M}_j|_{U_{i,j}}$$

venant des isomorphismes canoniques

$$M_i[X_j^{-1}] \longrightarrow M_j[X_i^{-1}]$$

envoyant $m_k/X_i^k X_j^r$ sur $m_k/X_j^k X_i^r$. On obtient alors un faisceau \mathcal{M} sur \mathbf{P}_k^n qui est quasi-cohérent. Cela donne un foncteur $A\text{-Mod}_{\text{gr}} \longrightarrow \mathbf{QCoh}(\mathbf{P}_k^n)$, noté $M \longrightarrow \widetilde{M}$, qui permet d'étudier les modules inversibles sur \mathbf{P}_k^n . Soit M un A -module gradué. On fixe un entier $m \in \mathbf{Z}$. On définit le A -module gradué $M(m)$, appelé le m -tordu, par $M(m)_d = M_{d+m}$ pour $d \in \mathbf{Z}$. Le module $\widetilde{M(m)}$ est quasi-cohérent sur \mathbf{P}_k^n . On montre ensuite que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(m) = \widetilde{M(m)}$. Cela implique que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(m)|_{U_i} = A(m)[X_i^{-1}]_0$ où $A(m)[X_i^{-1}]_0 = A[X_i^{-1}]_m = A[X_i^{-1}]_0 X_i^m$ est de rang 1.

En particulier, pour $m = 1$, les monômes X_j donnent des générateurs locaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^n}(1)$. Cela donne la partie essentielle de la preuve du théorème.