Groupes et algèbres de Lie

François Maucourant & Barbara Schapira

Master 2 de mathématiques fondamentales · Université de Rennes 1
Notes prises par Téofil Adamski (version du 19 novembre 2022)

Sommaire

1 Groupes et algèbres de Lie

1.1 Groupes de Lie . . . 1
1.1.1 Définition et premiers exemples . . . 1
1.1.2 Morphismes, sous-groupes . . . 2
1.2 Algèbres de Lie . . . 3
1.2.1 Définition et premiers exemples . . . 3
1.2.2 Complexification d'une algèbre de Lie . . . 5
1.3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . 5
1.3.1 Algèbre de Lie associé à un groupe de Lie . . . 5
1.3.2 Morphismes de groupes de Lie et algèbre de Lie . . . 7

2 Représentations

2.1 Vocabulaire . . . 11
2.2 Représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . . . 12
2.3 Réductibilité . . . 13

3 Structure des algèbres de Lie

3.1 Algèbres de Lie résolubles . . . 15
3.2 Algèbres de Lie nilpotentes . . . 16
3.3 Formes de Killing . . . 18
3.4 Radical résoluble et algèbre de Lie semi-simple . . . 22
3.5 Compléments culturels : les facteurs de Levi . . . 23
3.6 Automorphismes et dérivations . . . 23

4 Sous-algèbres de Cartan, données radicielles

4.1 Sous-algèbres de Cartan . . . 25
4.2 Données radicielles . . . 30

5 Systèmes de racines

5.1 Système de racines dans une algèbre de Lie . . . 33
5.2 Systèmes de racines abstraits . . . 37
5.3 Données combinatoires associées à l'ensemble des racines simples . . . 40

6 Représentations d'algèbres de Lie semi-simples

6.1 Complète réductibilité . . . 43
6.2 Poids et réseau des poids . . . 43
6.3 Représentations irréductibles . . . 45

7 Groupes de Lie et exponentielle

7.1 Motivations . . . 49
7.2 Formule de Baker-Campbell-Haussdorff . . . 49
7.3 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie . . . 51
7.4 Revêtements et groupes de Lie . . . 52
7.5 Sous-groupes avec algèbre de Lie prescrite . . . 53

8 Groupes de Lie compacts

8.1 Motivations . . . 55
8.2 Formule de Baker-Campbell-Haussdorff . . . 55
8.3 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie . . . 57
8.4 Revêtements et groupes de Lie . . . 58
8.5 Sous-groupes avec algèbre de Lie prescrite . . . 59

Chapitre 1
Groupes et algèbres de Lie

1.1 Groupes de Lie . . . 1
1.1.1 Définition et premiers exemples . . . 1
1.1.2 Morphismes, sous-groupes . . . 2
1.2 Algèbres de Lie . . . 3
1.2.1 Définition et premiers exemples . . . 3
1.2.2 Complexification d'une algèbre de Lie . . . 5
1.3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . 5
1.3.1 Algèbre de Lie associé à un groupe de Lie . . . 5
1.3.2 Morphismes de groupes de Lie et algèbre de Lie . . . 7

1.1. Groupes de Lie

1.1.1. Définition et premiers exemples

Définition 1.1. Un *groupe de Lie (réel)* est un groupe G muni d'une structure de variété différentielle tel que la multiplication $G \times G \longrightarrow G$ et l'inversion $G \longrightarrow G$ soient de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Un *groupe de Lie linéaire* est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ pour un entier $n \geqslant 1$ qui est une sous-variété de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

Le théorème suivant permet de dire rapidement si un sous-groupe est un groupe de Lie linéaire. On admet ce résultat.

Théorème 1.2 *(Cartan).* Un sous-groupe $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ est un groupe de Lie linéaire si et seulement s'il est fermé dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$

Exemples. – Les sous-groupes discrets de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ sont de Lie et de dimension nulle.

- Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Q})$ muni de la topologie induite par $\mathscr{M}_n(\mathbf{Q})$ n'est pas de Lie.
- Les groupes $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ et $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ sont de Lie.
- Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont de Lie. On rappel que ce premier est le groupe des transformations qui préservent le produit hermitien standard. On peut dire également la même chose pour les groupes $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$.
- Soient $p, q \geqslant 1$ deux entiers. Le groupe $\mathrm{O}(p, q)$ est de Lie : il s'agit du groupe orthogonal de la forme quadratique associée à la forme bilinéaire canonique de signature (p, q), c'est-à-dire le groupe
$$\mathrm{O}(p, q, \mathbf{R}) \coloneqq \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}M I_{p,q} M = I_{p,q} \right\} \quad \text{avec} \quad I_{p,q} \coloneqq \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$
Cette dernière égalité permet aussi de définir son pendant complexe $\mathrm{O}(p, q, \mathbf{C})$ qui est aussi un groupe de Lie.
- Le groupe orthogonal de la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^{2n}$ définie par l'égalité
$$\mathfrak{o}(x, y) \coloneqq \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n+J} - x_{n+j} y_j, \qquad x = (x_1, \dots, x_{2n}),\ y = (y_1, \dots, y_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n}.$$

est de Lie, noté $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$ ou $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{C})$ selon qu'il soit réel ou complexe. On l'appel le *groupe symplectique*. Remarquons que la forme $\mathfrak{o}$ est antisymétrique. Le *groupe symplectique compact* $\mathrm{Sp}(n) := \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{C}) \cap \mathrm{U}(2n)$ est aussi un groupe de Lie.

- Le groupe des transformations affines $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^n) := \{y \longmapsto Ry + x \mid R \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}), x \in \mathbf{R}^n\}$ est de Lie. Il n'est pas linéaire, mais on peut l'identifier au groupe de Lie linéaire
$$\left\{ \begin{pmatrix} R & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; R \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}), x \in \mathbf{R}^n \right\} \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R}).$$
- En particulier, les groupes $\mathbf{R}^* \simeq \mathrm{GL}(1, \mathbf{R})$, $\mathbf{C}^* \simeq \mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ et $\mathbf{S}^1 := \mathrm{U}(1)$ sont de Lie.
- Le *groupe de Heisenberg*
$$\mathrm{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$
est de Lie.

1.1.2. Morphismes, sous-groupes

Définition 1.3. Un *morphisme de groupes de Lie* entre deux groupes de Lie G et H est un morphisme de groupes entre G et H qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

En fait, l'hypothèse de continuité suffit comme le fait observer le théorème suivant. Cependant, comme ce dernier est admis, on préfère mettre une hypothèse *a priori* plus forte pour ne pas y faire appel.

Théorème 1.4 *(admis).* Un morphisme continu de groupes entre deux groupes de Lie est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Définition 1.5. Un *sous-groupe de Lie* d'un groupe linéaire de Lie G est un sous-groupe fermé de G.

À présent, le but est de comprendre tous les morphismes de $\mathbf{R}$ dans un groupe de Lie. Pour cela, on va utiliser l'exponentielle matricielle. On rappel que, pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on définit son *exponentielle*
$$\exp X := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!}.$$
Dans la suite, on fixe une norme subordonnée sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Proposition 1.6. Le logarithme matriciel
$$\log X := \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(X-I)^k}{k}$$
converge uniformément sur l'ouvert $\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid \|X - I_n\| < 1\}$. De plus,
- si $\|A - I_n\| < 1$, alors $e^{\log A} = A$;
- si $\|X\| < \log 2$, alors $\|e^X - I_n\| < 1$ et $\log e^X = X$.

Idée de la preuve. La preuve du premier point se déroule en deux temps : on vérifie d'abord l'identité $e^{\log A} = A$ lorsque la matrice A est diagonalisable, puis on conclut par densité. Le second point se montre de la même manière. ◇

Théorème 1.7. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ deux matrices. Alors
$$(e^{X/m} e^{Y/m})^m \xrightarrow[m \longrightarrow +\infty]{} e^{X+Y}.$$

Démonstration. Un simple développement limité donné
$$e^{X/m} e^{Y/m} = I_n + \frac{X+Y}{m} + \mathrm{O}(1/m^2).$$

Pour un entier m assez grand, le logarithme de cette matrice est donc bien définie et on a

$$\log(e^{X/m}e^{Y/m}) = \frac{X+Y}{m} + \mathrm{O}(1/m^2).$$

Mais comme $e^{X/m}e^{Y/m} = \exp(\log(e^{X/m}e^{Y/m}))$ grâce à la proposition précédente pour ce même entier m, on obtient

$$(e^{X/m}e^{Y/m})^m = \exp(m\log(e^{X/m}e^{Y/m})) = \exp(X+Y+\mathrm{O}(1/m)) \longrightarrow \exp(X+Y). \qquad \diamond$$

Définition 1.8. Un *sous-groupe à un paramètre* de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ est un morphisme de groupes continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

Un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est donc une famille $(A(t))_{t\in\mathbf{R}}$ de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui est continue par rapport à la variable t et qui, de plus, vérifie la relation

$$A(s+t) = A(s)A(t), \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Théorème 1.9. Soit $A\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un sous-groupe à un paramètre. Alors il existe une unique matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad A(t) = e^{tX}.$$

De plus, la fonction A est dérivable et $X = A'(0)$.

Pour montrer ce théorème, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 1.10. Soit $\mathfrak{e} < \ln 2$ un réel strictement positif. On pose $U := \exp(\mathrm{B}(0, \mathfrak{e}/2))$ (1). Soit $B \in U$ une matrice. Alors il existe une unique matrice matrice $C \in U$ telle que $B = C^2$.

Démonstration. On vérifie d'abord que la matrice $C := \exp(\frac{1}{2}\log B)$ convient. Il reste à établir l'unicité. Soit $D \in U$ une matrice vérifiant $B = D^2$. La matrice $Y := \log D$ vérifie $\exp Y = D$ et donc

$$\exp(2Y) = D^2 = B = \exp(\log B).$$

Comme $\|2Y\| < \mathfrak{e}$ et $\|\log B\| < \mathfrak{e}/2 < \mathfrak{e}$, la proposition donne alors $2Y = \log B$. Dés lors, on obtient $D = \exp Y = \exp(\frac{1}{2}\log B) = C$ ce qui conclut. $\diamond$

Preuve du théorème. Comme l'application A est continue, il existe un réel $t_0 > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad |t| \leqslant t_0 \quad\Longrightarrow\quad A(t) \in U$$

avec $\mathfrak{e} = \frac{1}{2}\ln 2$. En particulier, comme l'application A est un morphisme, on a $A(t_0/2)^2 = A(t_0)$ avec $A(t_0/2), A(t_0) \in U$. Avec le lemme, on obtient alors $A(t_0/2) = \exp(\frac{1}{2}\log A(t_0))$ et donc

$$\log A(t_0/2) = \frac{1}{2}\log A(t_0).$$

De même, on obtient

$$\log A\Big(\frac{t_0}{2^k}\Big) = \frac{1}{2^k}\log A(t_0), \qquad k \geqslant 1.$$

Posons $X := \frac{1}{t_0}\log A(t_0)$. Soit t un réel s'écrivant sous la forme $t = nt_0/2^k$ avec $n, k \in \mathbf{Z}$ et $2 \nmid n$. Alors

$$A(t) = \Big(A\Big(\frac{t_0}{2^k}\Big)\Big)^n = \Big(\exp\Big(\log A\Big(\frac{t_0}{2^k}\Big)\Big)\Big)^n = \Big(\exp\Big(\frac{t_0}{2^k}X\Big)\Big)^n = \exp(tX).$$

La formule $A(t) = \exp(tX)$ est donc valable pour tout réel t de l'ensemble $\mathbf{Z}t_0/2^{\mathbf{N}}$ qui est dense ce qui permet de conclure par continuité. L'égalité $X = A'(0)$ est alors claire et l'unicité en découle. $\diamond$

1.2. Algèbres de Lie

1.2.1. Définition et premiers exemples

(1). La notation $\mathrm{B}(0, \mathfrak{e}/2)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\mathfrak{e}/2$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Définition 1.11. Une *algèbre de Lie réelle ou complexe* est un espace vectoriel réel ou complexe $\mathfrak{g}$ de dimension finie qui est muni d'une application bilinéaire antisymétrique

$$[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$$

vérifiant l'*identité de Jacobi*

$$\forall x,y,z\in\mathfrak{g},\qquad [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.$$

Exemple. Muni du crochet défini par la relation $[X,Y]\coloneqq XY-YX$, l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est une algèbre de Lie, noté $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$. En effet, le crochet est bien bilinéaire et antisymétrique et on vérifie l'identité de Jacobi par le calcul.

Ce crochet sera noté sous la forme $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})}$. De manière générale, on notera en indice du crochet l'espace sur lequel il est défini.

Définition 1.12. Une *sous-algèbre de Lie* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ qui est stable par le crochet $[\cdot,\cdot]$. Un *idéal* de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que

$$\forall x\in\mathfrak{g},\ \forall y\in\mathfrak{h},\qquad [x,y]\in\mathfrak{h}.$$

En particulier, les idéaux sont des sous-algèbres de Lie.

Définition 1.13. Un *morphisme d'algèbres de Lie* est une application linéaire entre deux algèbres de Lie qui préserve les crochets.

Exemples.

- L'espace $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})\coloneqq\{X\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})\mid \operatorname{tr}X=0\}$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$. En effet, la trace d'un commutateur est nulle.
- Donnons un exemple de morphisme. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On note $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{g}$ qu'on munit d'une structure d'algèbre de Lie par le crochet défini par la relation
$$[f,g]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}=f\circ g-g\circ f,\qquad f,g\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$
La *représentation adjointe*
$$\operatorname{ad}\colon\left|\begin{array}{l}\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\\ X\longmapsto(Y\longmapsto\operatorname{ad}_X(Y)\coloneqq[X,Y])\end{array}\right.$$
est morphisme d'algèbres de Lie. En effet, elle est linéaire. Il reste à montrer qu'elle préserve les crochets, c'est-à-dire que
$$\operatorname{ad}_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}=[\operatorname{ad}_X,\operatorname{ad}_Y]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})},\qquad X,Y\in\mathfrak{g}.$$
Pour trois éléments $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$, l'identité de Jacobi et le caractère antisymétrique donnent
$$\begin{aligned}\operatorname{ad}_{[X,Y]}(Z)&=[[X,Y],Z]\\&=-[[Y,Z],X]-[[Z,X],Y]\\&=[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Y]]\\&=\operatorname{ad}_X(\operatorname{ad}_Y(Z))-\operatorname{ad}_Y(\operatorname{ad}_X(Z))\\&=(\operatorname{ad}_X\circ\operatorname{ad}_Y-\operatorname{ad}_Y\circ\operatorname{ad}_X)(Z)\\&=[\operatorname{ad}_X,\operatorname{ad}_Y](Z)\end{aligned}$$
ce qui conclut.
- On considère l'ensemble $\mathfrak{su}(2)\coloneqq\{M\in\mathfrak{gl}(2)\mid X^*=-X,\operatorname{tr}X=0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix}ia&-b+ic\\b+ic&-ia\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad a,b,c\in\mathbf{R}.$$
C'est un espace vectoriel réel. Une base est donnée par les matrices
$$E_1\coloneqq\frac12\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\qquad E_2\coloneqq\frac12\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad E_3\coloneqq\frac12\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$
Grâce aux relations $[E_1,E_2]=E_3$, $[E_2,E_3]=E_1$ et $[E_3,E_1]=E_1$, il s'agit d'une algèbre de Lie réelle de dimension trois. De même, l'ensemble $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})\coloneqq\{X\in\mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})\mid\operatorname{tr}X=0\}$ est aussi une algèbre de Lie de dimension trois.

1.2.2. Complexification d'une algèbre de Lie

Définition-proposition 1.14. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. On introduit sa *complexification*, notée $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, comme la somme formelle $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ (2). Cette somme est naturellement munie d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel par les relations

$$i(v_1 + iv_2) = -v_2 + iv_1, \qquad v_1, v_2 \in \mathfrak{g}.$$

Alors le crochet sur l'algèbre $\mathfrak{g}$ admet une unique extension à l'espace $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ qui rend le crochet bilinéaire et qui donne à l'espace $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ une structure d'algèbre de Lie complexe.

Démonstration. Il suffit de poser

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] \coloneqq ([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) + i([X_2, Y_1] + [X_1, Y_2])$$

pour tous éléments $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$. ◇

Exercice 1. Montrer que $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})_{\mathbf{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{su}(2)_{\mathbf{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. On pourra montrer le résultat suivant : pour toute sous-algèbre réelle $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ vérifiant $\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g} = \emptyset$, il existe un isomorphisme

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \simeq \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$$

où, cette fois, la notation i est l'élément de $\mathbf{C}$ vérifiant $i^2 = -1$.

Proposition 1.15. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle et $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie complexe. Alors tout morphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ s'étend de manière unique en un morphisme $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathfrak{h}$.

1.3. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

1.3.1. Algèbre de Lie associé à un groupe de Lie

Rappel. Soit M une variété différentielle. Un *champ de vecteurs* est une application $X \colon M \longrightarrow \mathrm{T}M$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui à tout point $x \in M$ associe un vecteur $X_x \in \mathrm{T}_x M$. On note $\Gamma(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M.

Un champ de vecteurs sert à dériver des fonctions. Pour une fonction $f \colon M \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, sa *dérivée par rapport au champ* X est l'application

$$D_X f \colon \left| \begin{array}{l} M \longrightarrow \mathbf{R}, \\ \ x \longmapsto X \cdot f(x) \coloneqq df_x \cdot X_x. \end{array} \right.$$

Définition 1.16. Une *dérivation* est une application linéaire $D \colon \mathscr{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(M)$ vérifiant la *formule de Leibniz*

$$D(fg) = D(f)g + fD(g), \qquad f, g \in \mathscr{C}^\infty(M).$$

On note $\mathrm{Der}(M)$ l'espace vectoriel des dérivations sur M. L'application

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma(M) \longrightarrow \mathrm{Der}(M), \\ \quad X \longmapsto D_X \end{array} \right.$$

est alors une injection linéaire. On admet qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Proposition 1.17. L'espace $\mathrm{Der}(M)$ muni du crochet défini par l'égalité

$$[\gamma, \gamma'] \coloneqq \gamma \circ \gamma' - \gamma' \circ \gamma, \qquad \gamma, \gamma' \in \mathrm{Der}(M)$$

est une algèbre de Lie.

Démonstration. On vérifie facilement que l'application $[\gamma, \gamma']$ vérifie la formule de Leibniz. ◇

Corollaire 1.18. Pour deux champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(M)$, on note $[X, Y] \in \Gamma(M)$ l'unique champ de vecteurs vérifiant $D_{[X,Y]} = [D_X, D_Y]$. Alors l'espace $\Gamma(M)$ est une algèbre de Lie.

(2). L'ensemble $i\mathfrak{g}$ représente une copie de $\mathfrak{g}$, il ne s'agit pas de l'ensemble $\{iX \mid X \in \mathfrak{g}\}$ qui n'a aucun sens.

On a simplement transporté la structure d'algèbre de Lie de l'espace $\mathrm{Der}(M)$ sur l'espace $\Gamma(M)$ par l'isomorphisme exposé plus haut. Pour un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi\colon M \longrightarrow M$ et un champ de vecteurs $X \in \Gamma(M)$, on considère le champ de vecteurs

$$\varphi_* X : \left| \begin{aligned} M &\longrightarrow \mathrm{T}M, \\ x &\longmapsto d\varphi_x \cdot X_{\varphi^{-1}(x)}. \end{aligned} \right.$$

Définition 1.19. Soit G un groupe de Lie. Pour un élément $g \in G$, on définit le $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme

$$Lg : \left| \begin{aligned} G &\longrightarrow G, \\ h &\longmapsto gh. \end{aligned} \right.$$

L'*algèbre de Lie associée au groupe G* est l'ensemble $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs invariants à gauche, c'est-à-dire des champs de vecteurs $X \in \Gamma(G)$ vérifiant

$$\forall g \in G, \qquad (Lg)_* X = X.$$

Remarque. Un champ de vecteurs invariant à gauche X est déterminé par sa valeur en un point et l'application

$$\left| \begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{T}_e G, \\ X &\longmapsto X_e \end{aligned} \right.$$

est alors un isomorphisme linéaire. On peut donc penser l'algèbre $\mathfrak{g}$ comme l'espace tangent $\mathrm{T}_e G$ muni du crochet de dérivation.

Définition 1.20. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un groupe de Lie linéaire. L'*algèbre de Lie associée au groupe G* est l'ensemble $\mathfrak{g}$ des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad e^{tM} \in G.$$

On verra dans la suite que, dans le cas linéaire, les deux définitions coïncident : à l'instar du théorème de Cartan, cette seconde définition est bien plus facilement manipulable et elle a l'avantage de ne pas faire référence à la structure différentielle. Mais d'abord, on va vérifier que la définition précédente donne bien une algèbre de Lie.

Proposition 1.21. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un sous-groupe fermé. Alors l'ensemble $\mathfrak{g}$ de la définition précédente est une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Plus précisément, ce dernier vérifie les quatre points suivants :

(i) pour $A \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$, on a $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$;
(ii) pour $s \in \mathbf{R}$ et $X \in \mathfrak{g}$, on a $sX \in \mathfrak{g}$;
(iii) pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a $X + Y \in \mathfrak{g}$;
(iv) pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a $XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Les deux premiers points sont clairs. Le troisième découle du théorème 1.7 et du caractère fermé du groupe G. Pour la dernier point, on étudie les matrices $e^{tX} Y e^{-tX}$ qui appartiennent à l'algèbre $\mathfrak{g}$ d'après le point (i). En dérivant cette expression par rapport à la variable t, la dérivée à l'origine, qui est $YX - XY$, reste dans $\mathfrak{g}$. ◇

Exercice 2. Montrer que les groupes de Lie suivants sont bien associés à leurs algèbres de Lie.

$\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$
$\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$
$\mathrm{U}(n)$	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{u}(n) := \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid X^* = -X\}$
$\mathrm{SU}(n)$	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{su}(n) := \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid X^* = -X, \operatorname{tr} X = 0\}$
$\mathrm{O}(n)$	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{o}(n) := \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}A = -A\}$
$\mathrm{SO}(n)$	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{so}(n) := \mathfrak{o}(n)$
$\mathrm{O}(p, q)$	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{o}(p, q) := \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}X I_{p,q} = -I_{p,q} X\}$
H	$\rightsquigarrow$	$\mathfrak{h} := \{H(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$

Dans le dernier exemple, on a posé

$$H(a,b,c) \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.2. Morphismes de groupes de Lie et algèbre de Lie

Soit $\Phi\colon G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie linéaire. Soit $X \in \mathfrak{g}$. Alors l'application

$$t \in \mathbf{R} \longmapsto \Phi(e^{tX}) \in H.$$

est un sous-groupe à un paramètre de H. En particulier, il existe un élément $\varphi(X) \in \mathfrak{h}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \Phi(e^{tX}) = e^{t\varphi(X)}.$$

On observe alors que l'application $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbre de Lie, dit associé au morphisme Θ.

Proposition 1.22. (i) Pour $A \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$, on a

$$\varphi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\varphi(X)\Phi(A)^{-1}.$$

(ii) Pour $X \in \mathfrak{g}$, l'élément $\varphi(X)$ est la dérivée à l'origine de la fonction $t \longmapsto \Phi(e^{tX})$.

(iii) Le noyau $\operatorname{Ker}\Phi$ est un sous-groupe fermé de G et le noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ est une algèbre de Lie de $\operatorname{Ker}\Theta$.

Exemple. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ un groupe de Lie linéaire. Alors l'application

$$C_g\colon \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow G, \\ h \longmapsto ghg^{-1} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et il s'agit de la restriction à G d'un endomorphisme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Sa différentielle $d(C_g)_{I_n}$ induit une application linéaire $\mathrm{T}_{I_n}G \longrightarrow \mathrm{T}_{I_n}G$, c'est-à-dire $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. La *représentation adjointe* est alors l'application

$$\mathrm{Ad}\colon \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \\ H \longmapsto \mathrm{Ad}(g) \coloneqq [g \longmapsto gHg^{-1}]. \end{array} \right.$$

C'est un morphisme de groupes de Lie et il vérifie

$$\mathrm{Ad}(g)([X,Y]) = [\mathrm{Ad}(g)(X), \mathrm{Ad}(g)Y], \qquad g \in G,\ X,Y \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}).$$

En particulier, en notant $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$, la représentation adjoint donne un morphisme de groupes

$$\mathrm{Ad}\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Pour $Z \in \mathfrak{g}$, on définit $\mathrm{ad}_Z \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ comme la dérivée à l'origine de la fonction $t \longmapsto \mathrm{Ad}(e^{tZ}) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Autrement dit, pour $Z, Y \in \mathfrak{g}$, on retrouve bien la formule $\mathrm{ad}_Z(Y) = [Z,Y]$.

En fait, pour $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(X)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire que c'est une application linéaire $\delta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ vérifiant

$$\delta([Y,Z]) = [\delta(Y), Z] + [Y, \delta(Z)], \qquad Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Retour sur l'exponentielle. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ un sous-groupe fermé. Alors l'exponentielle

$$\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

n'est ni injective ni surjective dans le cas général. En effet, lorsque $G = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \mid \theta \in \mathbf{R}\}$, son algèbre de Lie est $\mathfrak{g} = \{\mathrm{diag}(i\theta, -i\theta) \mid \theta \in \mathbf{R}\}$ et l'exponentielle est surjective et non injective. Par ailleurs, lorsque $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, son algèbre de Lie est $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ et la matrice

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$$

est telle qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathfrak{g}$ vérifiant $e^X = A$ (3), c'est-à-dire qu'il l'exponentielle n'est pas surjective.

Théorème 1.23. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un groupe de Lie linéaire. On note $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ les algèbres de Lie des définitions 1.19 et 1.20. Alors $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$.

Pour montrer ce théorème, on aura besoin de résultats préliminaires.

Lemme 1.24. Soit $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite de G tendant vers l'identité. Pour chaque entier $m \in \mathbf{N}$, on note $B_m = \exp Y_m$ avec $Y_m \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Quitte à extraire, on peut supposer que $Y_m / \|Y_m\| \longrightarrow Y$. Alors $Y \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbf{R}$. Montrons que $\exp(tY) \in G$. Pour m assez grand, on a $tY \approx tY_m / \|Y_m\| \approx k_m Y_m$ avec $k_m := \lfloor t / \|Y_m\| \rfloor$, donc $\exp(tY) \approx \exp(k_m Y_m) = B_m^{k_m}$. On a donc $B_m^{k_m} \longrightarrow \exp(tY)$. Mais comme le groupe G est fermé, on obtient $\exp(tY) \in G$. D'où $Y \in \mathfrak{g}$. ◇

Théorème 1.25. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un sous-groupe fermé. Alors il existe un réel $\mathfrak{e} > 0$ un réel tel que les applications

$$\exp \colon \mathrm{B}(0, \mathfrak{e}) \longrightarrow \exp(\mathrm{B}(0, \mathfrak{e})) \qquad \text{et} \qquad \exp \colon \mathfrak{g} \cap \mathrm{B}(0, \mathfrak{e}) \longrightarrow G \cap \exp(\mathrm{B}(0, \mathfrak{e}))$$

soient des difféomorphismes locaux.

Démonstration. Pour la première application, il existe bien un tel réel $\mathfrak{e} > 0$. Maintenant, on regarde la restriction

$$\exp \colon \mathfrak{g} \cap \mathrm{B}(0, \mathfrak{e}) \longrightarrow V_\mathfrak{e} := G \cap V_\mathfrak{e} \quad \text{avec} \quad V_\mathfrak{e} := \exp(\mathrm{B}(0, \mathfrak{e}))$$

et il suffit de montrer qu'elle est surjective quitte à diminuer le réel $\mathfrak{e} > 0$. On raisonne par l'absurde. On suppose que, pour tout $\mathfrak{e} > 0$, il existe une matrice $B \in G \cap V_\mathfrak{e}$ telle que $\exp B \notin \mathfrak{g}$. Alors il existe une suite $A_m \longrightarrow I_n$ avec $A_m \notin \exp \mathfrak{g}$. On trouve une difféomorphisme local

$$\exp \times \exp \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^\perp \simeq \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}).$$

Pour $m \in \mathbf{N}$, on note alors $A_m = \exp X_n \exp Y_m$ avec $X_n \in \mathfrak{g}$ et $Y_m \in \mathfrak{g}^\perp$. Alors

$$A_m \notin \exp \mathfrak{g} \quad \Longleftrightarrow \quad Y_m \neq 0.$$

Quitte à extraire, on suppose $Y_m / \|Y_m\| \longrightarrow Y$. Alors $\exp Y_m = \exp(-X_m) A_m \in G$. Le lemme assure donc $Y \in \mathfrak{g}$ ce qui est faux car $Y \in \mathfrak{g}^\perp$. ◇

Corollaire 1.26. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un sous-groupe fermé. Alors c'est un groupe de Lie linéaire.

Preuve du théorème 1.23. Le théorème précédent implique le théorème 1.23. ◇

Corollaire 1.27. Soit G un groupe de Lie linéaire connexe. Alors tout élément $A \in G$ s'écrit sous la forme $A = e^{X_1} \cdots e^{X_n}$ pour des éléments $X_i \in \mathfrak{g}$.

Idée. Le groupe G est connexe par arcs. On prend donc un chemin reliant les matrices I_n et A, puis on applique le théorème pour créer une succession de boules bien choisies. ◇

Corollaire 1.28. Soit G un groupe de Lie linéaire connexe. Soient $\Phi_1, \Phi_2 \colon G \longrightarrow H$ deux morphismes de groupes de Lie. On note $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ les morphismes d'algèbres de Lie dérivés. Si $\varphi_1 = \varphi_2$, alors $\Theta_1 = \Theta_2$.

Idée. On utilise le corollaire précédent. ◇

Corollaire 1.29. Soit G un groupe de Lie linéaire connexe. Alors le groupe G est commutatif si et seulement si l'algèbre $\mathfrak{g}$ est abélienne, c'est-à-dire $[\cdot, \cdot] = 0$.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Le sens réciproque découle du corollaire 1.27. ◇

(3). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une matrice $X \in G$ vérifiant $e^X = A$. Comme la matrice A n'est pas diagonalisable, il en va de même pour la matrice X. Ainsi cette dernière admet une valeur propre double, notée $\lambda \in \mathbf{C}$. Mais comme $X \in \mathfrak{g}$, on doit alors avoir $\lambda + \lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$. Par conséquent, le nombre $e^0 = 1$ est une valeur propre double de la matrice A ce qui est faux.

Corollaire 1.30. Un groupe de Lie linéaire est un sous-groupe linéaire fermé.

Démonstration. Soit $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un groupe de Lie linéaire. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il ne soit pas fermé. On peut donc trouver une suite $(g_m)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un élément $h \notin G$. Soit $\mathfrak{e} > 0$ un réel donné par théorème 1.25. Alors il existe un entier $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant m_0, \qquad g_m^{-1}h \in V_{\mathfrak{e}} \coloneqq \exp(\mathrm{B}(0, \mathfrak{e})).$$

Quitte à augmenter l'entier 'n_0, on peut supposer que

$$\forall m \geqslant m_0, \qquad g'_n \coloneqq g_m^{-1} g_{m_0} \in V_{\mathfrak{e}}.$$

On obtient alors une suite $(g'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $G \cap V_{\mathfrak{e}}$ qui tend vers une matrice $h' \notin G$ ce qui est impossible car le groupe $\mathfrak{g}$ est fermé et l'application $\exp|_{\mathfrak{g}\cap\mathrm{B}(0,\mathfrak{e})}$ est un difféomorphisme. ◇

Chapitre 2

Représentations

2.1 Vocabulaire 11
2.2 Représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ 12
2.3 Réductibilité 13

2.1. Vocabulaire

À la manière des représentations linéaires d'un groupe, on définit la même notion pour un groupe de Lie.

Définition 2.1. – Soit G un groupe de Lie. Une *représentation linéaire* réelle ou complexe de G est la donnée d'un espace vectoriel réel ou complexe V de dimension finie et d'un morphisme de groupes de Lie $\Pi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$.

- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe (resp. réelle). Une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel complexe (resp. réel) V et un morphisme d'algèbres de Lie $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbf{C}}(V)$ (resp. $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbf{R}}(V)$).
- Une représentation est *fidèle* si le morphisme associé est surjectif.
- Un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est *invariant* si

$$\forall A \in G, \qquad \Pi(A)(W) \subset W.$$

- Une représentation est *irréductible* si elle n'admet pas de sous-espace vectoriel invariant non trivial.

Définition 2.2. Soit G un groupe de Lie. Soient $\Pi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\Sigma\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ deux représentations. Une application linéaire $\Phi\colon V \longrightarrow W$ *entrelace* les représentations Π et Σ si

$$\forall A \in G, \qquad \Phi \circ \Pi(A) = \Sigma(A) \circ \Phi.$$

Lorsque l'application Φ est un isomorphisme, on dit que les représentations Π et Σ sont isomorphes.

Proposition 2.3. Soient G un groupe de Lie linéaire et $\Pi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation. Alors il existe une unique représentation $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ telle que

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \qquad \pi(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Pi(\exp(tX)).$$

Question. Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie associée. Soit V un espace vectoriel fixé. Toutes les représentations de $\mathfrak{g}$ proviennent-elles de représentations de G ?

Proposition 2.4. Soit G un groupe de Lie connexe.

1. Soit $\Pi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation. Alors la représentation Π est irréductible si et seulement si la représentation π est irréductible.
2. Soient $\Pi_1\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_1)$ et $\Pi_2\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations. Alors l'égalité $\pi_1 = \pi_2$ implique $\Pi_1 = \Pi_2$.

Proposition 2.5. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle et $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation complexe. Alors cette dernière se prolonge de manière unique en une représentation complexe $\pi_{\mathbf{C}}\colon \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. De plus, la représentation π est irréductible si et seulement si la représentation $\pi_{\mathbf{C}}$ l'est.

Définition 2.6. Une représentation $\Pi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est *unitaire* si l'espace vectoriel V est euclidien ou hermitien et $\Pi(G) \subset \mathrm{O}(V)$ ou $\Pi(G) \subset \mathrm{U}(V)$.

Remarque. Soient $\Pi\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation unitaire unitaire et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel invariant. Alors le sous-espace vectoriel $W^{\perp}$ est aussi invariant. Ainsi la représentation Π se décompose en une somme directe de représentations irréductibles.

Théorème 2.7. Soit G un groupe de Lie compact. Alors ses représentations sont unitaires. De même pour les algèbres de Lie.

2.2. Représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$

On note V_m l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(Z_1^m, Z_1^{m-1}Z_2, \dots, Z_2^m)$ des polynômes homogènes à deux variables de degré m. Soit G un des trois groupes $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$ et $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. On définit la représentation $\Pi_m\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V_m)$ telle que

$$\Pi_m(U)(f)(Z_1, Z_2) = f(U^{-1}(Z_1, Z_2)).$$

Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et

$$\pi_m(X)(f)(Z) = -\,df_Z(XZ).$$

Une base de $\mathfrak{g}$ est donnée par les matrices

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\pi_m(H) = -Z_1 \frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2 \frac{\partial}{\partial Z_2}, \qquad \pi_m(X) = -Z_2 \frac{\partial}{\partial Z_1} \qquad \text{et} \qquad \pi_m(Y) = -Z_1 \frac{\partial}{\partial Z_2}.$$

La base $(Z_1^m, Z_1^{m-1}Z_2, \dots, Z_2^m)$ est une base de diagonalisation pour l'endomorphisme $\pi_m(H)$: pour tout entier $k \in [\![0, m]\!]$, on a

$$\pi_m(H)(Z_1^{m-k}Z_2^k) = (2k - m)Z_1^{m-k}Z_2^k.$$

Par ailleurs, on calcul

$$\pi_m(H)(Z_1^{m-k}Z_2^k) = (k - m)Z_1^{m-k-1}Z_2^{k+1} \qquad \text{et} \qquad \pi_m(Y)(Z_1^{m-k}Z_2^k) = -kZ_1^{m-k+1}Z_2^{k-1}$$

où la dernière égalité est vrai si $1 \leqslant k \leqslant m$ et vaut 0 sinon.

Proposition 2.8. La représentation π_m est irréductible.

Démonstration. Soit $W \subset V_m$ un sous-espace vectoriel invariant non trivial. Soit $u \in W$ un vecteur non nul. Soit k_0 le plus petit indice tel que $Z_1^{m-k_0}Z_1^{k_0}$ a un coefficient non nul dans u. Alors $\pi_m(X)^{m-k_0}u$ est une multiple non nul de z_2^m, donc $z_2^m \in W$. On fait maintenant agir successivement tous les endomorphismes $\pi_m(Y)^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant m$ ce qui donne que tous les vecteurs $Z_1^{m-k}Z_2^k$ appartiennent à W. D'où $W = V_m$. ◇

Théorème 2.9. Soit $m \geqslant 0$ un entier. Alors il existe un unique représentation de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ de dimension $n + 1$ à isomorphisme près.

Pour montrer ce théorème, on a besoin du lemmes suivants.

Lemme 2.10. Soient V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $A, B, C \in \mathscr{L}(V)$ trois endomorphismes vérifiant

$$[A, B] = 2B, \qquad [A, C] = -2C \qquad \text{et} \qquad [B, C] = A.$$

Alors il existe une unique représentation $\pi\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ envoyant les matrices H, X et Y sur les matrices A, B et C.

Lemme 2.11. Soient V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\pi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation. Soit $u \in V$ un vecteur propre de l'endomorphisme $\pi(M)$ associée à une valeur propre $\alpha \in \mathbf{C}$. Alors

$$\pi(H)\pi(X)u = (\alpha+2)\pi(X)u \qquad \text{et} \qquad \pi(H)\pi(Y)u = (\alpha-2)\pi(X)u.$$

Démonstration. On écrit d'abord

$$\pi(H)\pi(X) = \pi(HX) = \pi([H,X]+XH) = \pi(X)\pi(H) + \pi([H,X]),$$

donc

$$\pi(H)\pi(X)u = \pi(X)(\alpha u) + 2\pi(X)u = (\alpha+2)\pi(X)u. \qquad \diamond$$

Preuve du théorème. Soit $\pi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation irréductible. Soit $u \in V$ un vecteur propre de l'endomorphisme $\pi(H)$ associée à une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors pour tout entier $k \geqslant 0$, le lemme précédent assure que le vecteur $\pi(X)^k u$ est soit un vecteur propre pour l'endomorphisme $\pi(H)$ soit le vecteur nul. Comme l'espace vectoriel V est de dimension finie, il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que

$$u_0 \coloneqq \pi(X)^N u \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \pi(X)^{N+1}u = 0.$$

On remarque que u_0 est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda + 2N$, donc

$$\pi(X)^{N+1} = (\lambda + 2N + 2)u = 0,$$

donc $\lambda + 2N + 2 = 0$. Finalement, la valeur propre λ est un entier. Les vecteurs $u_k \coloneqq \pi(Y)^k u_0$ sont des vecteurs propres de $\pi(H)$ pour les valeurs propres $\mu - 2k$ avec $\mu \coloneqq \lambda + 2N$ ou des vecteurs nuls. Soit $m \geqslant 0$ le premier indice tel que

$$\pi(Y)^m u_0 = u_m \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \pi(Y)^{m+1}u_0 = 0.$$

En effectuant une récurrence sur l'entier $k \geqslant 1$, on trouve

$$\pi(X) = k(\mu-(k-1))u_{k-1} = k(m-(k-1))u_{k-1}.$$

Finalement, on a trouvé des vecteurs u_0, …, u_m vérifiant

$$\pi(H)u_k = (m-2k)u_k, \qquad \pi(X)u_k = \begin{cases} k(m-k+1)u_{k-1} & \text{si } k \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\pi(Y)u_k = \begin{cases} u_{k+1} & \text{si } k \leqslant m-1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observons que l'espace $W \coloneqq \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_m)$ est de dimension $m+1$, il est invariant et non nul. Comme la représentation π est irréductible, on en déduit $W = V$. L'application linéaire $V \longrightarrow V_m$ qui à tout vecteur u_k associe le vecteur $Z_2^{m-k}Z_1^k$ est alors un entrelacement bijectif entre les représentations π et π_m. $\diamond$

Théorème 2.12. Soit $\pi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation. Alors

1. toute valeur propre est entière ;
2. les endomorphismes $\pi(X)$ et $\pi(Y)$ sont nilpotents ;
3. si $S \coloneqq e^{\pi(X)}e^{-\pi(Y)}e^{\pi(X)}\colon V \longrightarrow V$, alors $S\pi(H)S^{-1} = -\pi(H)$;
4. si $k \in \mathbf{Z}$ est valeur propre de $\pi(H)$, alors $-|k|$, $-|k|+2$, …, $|k|$ sont encore des valeurs propres.

Démonstration. Lorsque la représentation est irréductible, ça découle de ce qui précède. Traitons le cas général. Le groupe $G \coloneqq \mathrm{SU}(2,\mathbf{C})$ est compact et son algèbre associée $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2,\mathbf{C})$ est de complexifié $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$. Ainsi d'après un résultat suivant, la représentation π est une somme directe de représentations irréductibles

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_L.$$

On se ramène alors au cas particulier. $\diamond$

2.3. Réductibilité

Définition 2.13. Une représentation de groupe ou d'algèbre de Lie est *complètement réductible* si elle est isomorphe à une somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles.

Exemple. La représentation

$$t \in \mathbf{R} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$$

n'est pas complètement réductible.

Proposition 2.14. Soit (Π, G) une représentation complètement irréductible. Alors

- si $U \subset V$ est invariant, alors la représentation restreinte à U est complètement invariant ;
- si $U \subset V$ est invariant, il existe un $W \subset U$ invariant tel que $U = V \oplus W$.

Faisons la remarque suivante. Soient V un espace euclidien ou hermitien et $\Pi \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation unitaire. Si $W \subset V$ est invariant, alors $W^{\perp}$ l'est encore.

Corollaire 2.15. Si Π est unitaire, alors elle est complètement irréductible.

Théorème 2.16. Si Π est une représentation d'un groupe de Lie compact G, alors il existe un produit scalaire sur V qui rend Π unitaire.

Corollaire 2.17. Avec les mêmes notations, la représentation Π est irréductible.

Pour cela, on utilise le théorème suivant.

Théorème 2.18. Soit G un groupe topologique compact. Alors il existe une mesure de probabilité sur G qui est invariante par multiplication à gauche, appelée la *mesure de Haar*.

Idée. On a un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{T}_e G$. Notons $d \coloneqq \dim G$. On choisit sur $\mathrm{T}_e G$ une d-forme linéaire alternée non nulle α_e. On définit sur chaque $\mathrm{T}_g G$ une forme linéaire alternée α_g par informellement l'égalité

$$\alpha_g(X_1, \dots, X_d) \coloneqq \alpha_e(X_1 g^{-1}, \dots, X_d g^{-1})$$

et plus formellement par l'égalité

$$\alpha_g(X_1, \dots, X_d) \coloneqq \alpha_e(d(R_{g^{-1}})_g \cdot X_1, \dots, d(R_{g^{-1}})_g \cdot X_d).$$

Alors l'application

$$\alpha \colon g \in G \longmapsto \alpha_g$$

est une d-forme différentielle non nulle. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(G, \mathbf{R})$, on pose alors

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \coloneqq \int_G f\alpha. \qquad \diamond$$

Preuve du théorème 2.16. On note μ la mesure de Haar sur G. Il suffit de considérer le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ définie par l'égalité

$$\langle u, v \rangle_G \coloneqq \int_G \langle g \cdot u, g \cdot v \rangle \, \mathrm{d}\mu(g). \qquad \diamond$$

Chapitre 3
Structure des algèbres de Lie

3.1	Algèbres de Lie résolubles	15
3.2	Algèbres de Lie nilpotentes	16
3.3	Formes de Killing	18
3.4	Radical résoluble et algèbre de Lie semi-simple	22
3.5	Compléments culturels : les facteurs de Levi	23
3.6	Automorphismes et dérivations	23

3.1. Algèbres de Lie résolubles

Définition 3.1. L'*algèbre de Lie dérivée* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'ensemble

$$\mathscr{D}(\mathfrak{g}) := \{(X, Y) \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

C'est un idéal de l'algèbre $\mathfrak{g}$. On définit les ensembles $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g})$ avec $n \in \mathbf{N}$ en posant

$$\mathscr{D}^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}^n(\mathfrak{g}) := \mathscr{D}(\mathscr{D}^{n-1}(\mathfrak{g})).$$

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Exemples. Une algèbre de Lie abélienne est résoluble. L'algèbre des matrices triangulaires supérieures est résoluble.

Proposition 3.2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors l'ensemble '$\mathscr{D}^n(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'identité de Jacobi. ◇

Remarque. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble. On note $n \geqslant 1$ le plus petit entier tel que $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Alors l'algèbre $\mathscr{D}^{n-1}(\mathfrak{g})$ est abélienne.

Théorème 3.3 *(Lie).* Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie non nulle et $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation complexe. Alors il existe un vecteur $v \in V \setminus \{0\}$ qui soit un vecteur propre des endomorphismes $\pi(X)$ avec $X \in \mathfrak{g}$.

Corollaire 3.4. Sous les mêmes hypothèses, il existe une base de V dans laquelle tous les endomorphismes $\pi(X)$ avec $X \in \mathfrak{g}$ ont une matrice triangulaire supérieure.

Lemme 3.5. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si, pour tout idéal non nul $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, il existe un idéal $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ de codimension 1.

Démonstration. On suppose d'abord que l'algèbre non nulle $\mathfrak{g}$ est résoluble. Soit $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel de codimension 1 qui contient $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) \subsetneq \mathfrak{g}$. Alors c'est un idéal puisque

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall Y \in \mathfrak{g}_1, \qquad [X, Y] \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_1.$$

Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un idéal non nul. Alors l'algèbre $\mathfrak{h}$ est résoluble puisque l'algèbre $\mathfrak{g}$ l'est. On applique la remarque précédente pour trouver un tel idéal $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$.

Réciproque, on suppose que, pour tout idéal non nul $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, il existe un idéal $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$ de codimension 1. On peut alors construire une suite d'idéal

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{d-1} \supset \{0\}$$

avec $d \coloneqq \dim \mathfrak{g}$. Il suffit alors de montrer que

$$\mathscr{D}(\mathfrak{g}_k) \subset \mathfrak{g}_{k+1}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant d-2.$$

On sait déjà que $\mathscr{D}(\mathfrak{g}_k) \subset \mathfrak{g}_k$. On note $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k+1} \oplus \mathbf{C}X$ puisqu'il est de codimension 1. Soient $U, V \in \mathfrak{g}_k$ deux éléments qu'on écrit sous la forme

$$U = U_{k+1} + Xu \qquad \text{et} \qquad V = V_{k+1} + Xv.$$

Alors on montre que $[U, V] \in \mathfrak{g}_{k+1}$. ◇

Preuve du théorème 3.3. On procède par récurrence sur la dimension d de l'algèbre $\mathfrak{g}$. Lorsque $d = 1$, c'est clair. On suppose que $d > 1$ et on suppose le résultat pour les algèbres de Lie de dimension $< d$. D'après le lemme, il existe un idéal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimension 1 qu'on écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{C}X$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un vecteur $e_0 \in V$ tel que

$$\forall H \in \mathfrak{h},\ \exists \lambda(H) \in \mathbf{C}, \qquad \pi(H)e_0 = \lambda(H)e_0.$$

Si le vecteur e_0 est propre pour l'endomorphisme $\pi(X)$, c'est fini. Sinon on pose

$$W \coloneqq \operatorname{Vect}(\pi(X)^n e_0)_{n\in\mathbf{N}} = \operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_p) \quad \text{avec} \quad e_k \coloneqq \pi(X)^k e_0.$$

Alors c'est un sous-espace vectoriel stable par l'endomorphisme $\pi(X)$, donc ce dernier admet une valeur propre dans W. Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\forall H \in \mathfrak{h},\ \forall w \in W, \qquad \pi(H)w = \lambda(H)w.$$

Soit $H \in \mathfrak{h}$. On sait que $\pi(H)e_0 = \lambda(H)e_0$, donc

$$\begin{aligned} \pi(H)e_1 = \pi(H)\pi(X)e_0 &= \pi(X)\pi(H)e_0 + \pi([H, X])e_0 \quad \text{avec} \quad [H, X] \in \mathfrak{h} \\ &= \lambda(H)e_1 + \lambda([H, X])e_0. \end{aligned}$$

En effectuant une récurrence immédiate, on montre que

$$\forall k \{0, \dots, p\}, \qquad \pi(H)e_k = \lambda(H)e_k + \lambda([H, X])e_{k-1}.$$

Ainsi la matrice de l'endomorphisme $\pi(H)|_W$ dans la base $(e_0, \dots, e_p)$ est triangulaire supérieure ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{tr}(\pi(H)) = p\lambda(H).$$

Comme $\operatorname{tr}([\pi(H), \pi(X)]) = 0$ et $[H, X] \in \mathfrak{h}$, on trouve $\lambda([H, X]) = 0$ ce qui conclut. ◇

Lemme 3.6. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Si les algèbres $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont résolubles, alors l'algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Démonstration. On utilise le lemme précédent. ◇

Lemme 3.7. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ deux idéaux résolubles. Alors l'algèbre $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ est un idéal résoluble de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Démonstration. On vérifie d'abord que l'algèbre $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ est un idéal de l'algèbre $\mathfrak{g}$. Ensuite, montrons qu'il est résoluble. En effectuant une récurrence, on montre que

$$\mathscr{D}(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) = \mathscr{D}(\mathfrak{h}_1) + \mathscr{D}(\mathfrak{h}_2) \mod \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2,$$

puis

$$\mathscr{D}^n(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) = \mathscr{D}^n(\mathfrak{h}_1) + \mathscr{D}^n(\mathfrak{h}_2) \mod \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

Ceci implique que le quotient $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ est résoluble. Mais comme l'algèbre $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ est résoluble, le lemme précédente montrer que l'algèbre $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ est résoluble. ◇

Corollaire 3.8. On peut définir le plus grand idéal résoluble d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on l'appelle le *radical résoluble* de l'algèbre $\mathfrak{g}$ et on le note $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$.

3.2. Algèbres de Lie nilpotentes

Théorème 3.9 *(Engel).* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors les points suivants sont équivalents :

(i) pour tout élément $Z \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme ad_Z est nilpotent ;

(ii) il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que $\mathscr{C}^0(\mathfrak{g}) = \{0\}$ avec

$$\mathscr{C}^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathscr{C}^k(\mathfrak{g})].$$

(iii) il existe une base de l'espace $\mathfrak{g}$ dans laquelle les matrices des endomorphismes ad_Z avec $Z \in \mathfrak{g}$ sont triangulaires supérieures.

Dans ce cas, on dit que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est *nilpotente.*

Remarque. Une algèbre de Lie abélienne est nilpotente.

Remarque. Pour tout endomorphisme nilpotent $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$, l'endomorphisme ad_X est aussi nilpotent. Ainsi une algèbre de Lie constituée de matrices nilpotentes est elle-même nilpotente, mais la réciproque est fausse : l'algèbre des matrices diagonales est abélienne et donc nilpotente, mais ses éléments ne sont pas nilpotent.

Corollaire 3.10. Une algèbre de Lie résoluble est nilpotente.

Preuve du théorème. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est claire. On vérifie aisément l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii). Par ailleurs, l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i est aussi facile en montrant

$$\forall Z, X \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{ad}_Z^k(X) \in \mathscr{C}^k(\mathfrak{g}).$$

Il reste à montrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii). Pour cela, on utilise le lemme suivant : on l'applique avec $\mathfrak{g}' = \mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$ et on fait ensuite une récurrence. ◇

Lemme 3.11. Soit $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(V)$ une algèbre de Lie dont tous les éléments sont nilpotents. Alors il existe un vecteur $v \in V$ tel que

$$\forall X \in \mathfrak{g}', \qquad Xv = 0.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension d de l'espace $\mathfrak{g}'$. Lorsque $d = 1$, le résultat est clair. On suppose $d > 1$ et le résultat pour des algèbres de dimension $< d$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$ une sous-algèbre de Lie stricte maximale. Montrons qu'elle est de codimension 1. Les éléments de $\mathfrak{h}$ sont nilpotents. Soit $H \in \mathfrak{h}$. Alors l'endomorphisme ad_H induit un endomorphisme nilpotent H^* de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Alors l'ensemble $\{H^* \mid H \in \mathfrak{h}\}$ est une sous-algèbre de Lie et $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ constituée d'éléments nilpotents. Comme $\dim \mathfrak{h} \geqslant 1$, on a $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} < d$. En utilisant l'hypothèse de récurrence sur l'algèbre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, il existe un élément $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ tel que

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \qquad H^*(X \mod \mathfrak{h}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \qquad \mathrm{ad}_X(H) = [X, H] \in \mathfrak{h}$$

Donc l'algèbre $\mathfrak{h} \oplus \mathbf{C}X$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Par maximalité, on en déduit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{C}X$. Finalement, la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de codimension 1 et c'est un idéal.

Notons $W := \{e \in V \mid \forall H \in \mathfrak{h},\ He = 0\}$. Ce sous-espace vectoriel n'est pas nul par hypothèse de récurrence. De plus, il est stable par l'endomorphisme X toujours grâce à l'hypothèse de récurrence. Il existe donc une vecteur propre $w \in W$ de l'endomorphisme X. Mais ce dernier étant nilpotente, la valeur propre associée est nulle, donc $Xw = 0$. Comme $Hw = 0$ pour $H \in \mathfrak{h}$, on en déduit le résultat. ◇

Théorème 3.12 *(représentation d'algèbre nilpotente).* Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\rho\colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation complexe de dimension finie. Alors il existe des formes linéaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathfrak{h}^*$ et des sous-espaces vectoriels invariants $V_1, \dots, V_k \subset V$ tels que

- $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$;
- pour tout élément $H \in \mathfrak{h}$, l'endomorphisme induit $\rho(H)|_{V_i}$ admet pour valeur propre $\lambda_i(H)$.

Démonstration. On effectue une récurrence sur la dimension d de l'espace V.

- Soit, pour tout $H \in \mathfrak{h}$, l'endomorphisme $\rho(H)$ admet une seule valeur propre $\lambda(H)$ ce cela conclut.

- Soit il existe un élément $H_0 \in \mathfrak{h}$ tel que l'endomorphisme $\rho(H)$ admette au moins deux valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbf{C}$. Alors on pose $V_i := \operatorname{Ker}(\rho(H) - \mu_i \operatorname{Id})^{k_i}$ les sous-espaces caractéristiques. Alors $V = \bigoplus V_i$ et les espaces V_i sont invariants par les endomorphismes $\rho(H)$. On vérifie alors le reste. ◇

3.3. Formes de Killing

Définition 3.13. Soit $\mathfrak{g}$ une algébre de Lie. Sa *forme de Killing* est la forme bilinéaire

$$B_{\mathfrak{g}} \colon \left| \begin{array}{l} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbf{K}, \\ (X, Y) \longmapsto \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y)). \end{array} \right.$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera B la forme de Killing.

Lemme 3.14. La forme B est ad-alternée, c'est-à-dire

$$B(\operatorname{ad}(X)(Y), Z) = -B(Y, \operatorname{ad}(X)(Z)), \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Démonstration. Pour trois éléments $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, on calcul

$$\begin{aligned} B(\operatorname{ad}(X)(Y), Z) &= \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(\operatorname{ad}(X)(Y)) \circ \operatorname{ad}(Z)) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}([X, Y]) \circ \operatorname{ad}(Z)) \\ &= \operatorname{tr}([\operatorname{ad}(X), \operatorname{ad}(Y)] \circ \operatorname{ad}(Z)) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y) \circ \operatorname{ad}(Z) - \operatorname{ad}(Y) \circ \operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Z)) \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(Y) \circ (\operatorname{ad}(Z) \circ \operatorname{ad}(X) - \operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Z))) \\ &= -B(Y, \operatorname{ad}(X)(Z)). \end{aligned}$$

◇

Lemme 3.15. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

1. Soit $\alpha \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Alors l'orthogonal $\alpha^\perp$ pour la forme $B_{\mathfrak{g}}$ est un idéal de l'algèbre $\mathfrak{g}$ et il vérifie $[\alpha, \alpha^\perp] \subset \mathfrak{g}^\perp$. En particulier, l'orthogonal $\mathfrak{g}^\perp$ est un idéal.
2. Soit $\alpha \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Alors $B_\alpha = B_{\mathfrak{g}}|_{\alpha \times \alpha}$.
3. Soit $\alpha \subset \mathfrak{g}$ un idéal abélien. Alors $\alpha \subset \mathfrak{g}^\perp$.

Démonstration. 1. L'orthogonal $\alpha^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathfrak{g}$. Montrons que c'est un idéal. Soient $Z \in \alpha^\perp$ et $Y \in \mathfrak{g}$. On veut montrer que $[Y, Z] \in \alpha^\perp$. Pour tout élément $X \in \alpha$, comme $[X, Y] \in \alpha$ et $Z \in \alpha^\perp$, on trouve

$$B([Y, Z], X) = B([X, Y], Z) = 0.$$

D'où $[Y, Z] \in \alpha^\perp$. De la même manière, on montre que $[\alpha, \alpha^\perp] \subset \mathfrak{g}^\perp$.

2. Choisissons une base de l'espace α qu'on complète en une base de l'espace $\mathfrak{g}$. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme $\operatorname{ad}(X)$ avec $X \in \alpha$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le produit de deux telles matrices est encore de cette forme. Par conséquent, pour deux éléments $X, Y \in \alpha$, on obtient

$$B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} *_1 & *_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(*_1) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_\alpha(X) \circ \operatorname{ad}_\alpha(Y)) = B_\alpha(X, Y).$$

3. Soit $X \in \alpha$. La matrice de l'endomorphisme $\operatorname{ad}(X)$ est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $Y \in \mathfrak{g}$. Alors la matrice de l'endomorphisme $\operatorname{ad}(Y)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

donc la matrice de l'endomorphisme $\mathrm{ad}(Y) \circ \mathrm{ad}(X)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc sa trace est nulle, c'est-à-dire $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0$. D'où $\alpha \subset \mathfrak{g}^{\perp}$. ◇

Corollaire 3.16. On suppose que la forme $B_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée. Soit $\alpha \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Alors la forme B_α est non dégénérée et

$$\mathfrak{g} = \alpha \oplus \alpha^{\perp}.$$

Démonstration. D'abord, montrer que

$$\dim \alpha + \dim \alpha^{\perp} = \dim \mathfrak{g}. \tag{$*$}$$

Considérons l'application linéaire

$$\Psi : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^*, \\ X & \longmapsto & (Y \longmapsto B(X, Y)) \end{array} \right. .$$

Comme la forme B est non dégénérée, son noyau est nul. L'application Ψ est donc un isomorphisme. Par ailleurs, la restriction

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \alpha^* \\ \ell & \longmapsto & \ell|_\alpha \end{array} \right.$$

est surjective. Ainsi la composition

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \alpha^*, \\ X & \longmapsto & (Y \longmapsto B(X, Y)) \end{array} \right.$$

est surjective. Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg} \Phi + \dim \operatorname{Ker} \Phi = \dim \mathfrak{g}$. Mais comme

$$\operatorname{rg} \Phi = \dim \alpha^* = \dim \alpha \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} \Phi = \alpha^{\perp},$$

cela conclut l'égalité $(*)$.

Il reste à montrer que $\alpha \cap \alpha^{\perp} = \{0\}$. L'intersection $\mathfrak{b} := \alpha \cap \alpha^{\perp}$ est un idéal. Montrons qu'il est abélien. Soient $X, Y \in \alpha \cap \alpha^{\perp}$. Alors $[X, Y] \in [\alpha, \alpha^{\perp}] \subset \mathfrak{g} = \{0\}$. Donc il est abélien. Ainsi la proposition précédente assure que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$. D'où $\mathfrak{b} = \{0\}$. Finalement, avec le précédent paraphe, on arrive à l'égalité $\alpha \oplus \alpha^{\perp} = \mathfrak{g}$.

Terminons la preuve en montrant que la forme $B_\alpha = B_{\mathfrak{g}}|_{\alpha \times \alpha}$ est non dégénérée. Si un élément $X \in \alpha$ est orthogonal à toute l'algèbre α, alors $X \in \mathfrak{g}^{\perp}$, donc $X = 0$. ◇

À présent, on souhaite montrer le théorème suivant.

Théorème 3.17 *(critère de résolubilité de Cartan).* Une algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si

$$B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}.$$

Pour cela, on va utiliser les lemmes qui suivent.

Lemme 3.18. Soient V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $X \in \mathfrak{gl}(V)$ un endomorphisme. Notons $D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors l'expression $\operatorname{ad} D + \operatorname{ad} N$ est la décomposition de Dunford de l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$.

Démonstration. Vérifions que les endomorphismes $\operatorname{ad} D$ et $\operatorname{ad} N$ commute. Pour tout élément $Y \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} D \circ \operatorname{ad} N(Y) &= [D, [N, Y]] \\ &= [D, [N, Y]] \\ &= D(NY - YN) - (NY - YN)D \\ &= DNY - DYN - NYD + YND \\ &= NDY - DYN - NYD + YDN \\ &= \operatorname{ad} D \circ \operatorname{ad} D(Y). \end{aligned}$$

Vérifions que l'endomorphisme $\operatorname{ad} N$ est nilpotent. Notons k l'indice de nilpotence de l'endomorphisme N. Alors pour tout élément $Z \in \mathfrak{g}$, on a

$$(\operatorname{ad} N)^k Z = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} N^i Z^{2k-i} = 0.$$

Il reste à voir que l'endomorphisme $\operatorname{ad} D$ est diagonalisable. Comme l'endomorphisme D est diagonalisable, on peut supposer que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Pour tous indices $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\operatorname{ad} D \cdot E_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j}.$$

Ainsi la famille $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de diagonalisable de l'endomorphisme $\operatorname{ad} D$ ◇

Lemme 3.19. Soit $A \in \mathfrak{gl}(V)$ un endomorphisme. Notons $D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que

$$P(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad D = P(A).$$

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{C}$ les valeurs propres de l'endomorphisme A dont on note $n_1, \dots, n_k \geqslant 1$ leurs multiplicités. Soit $i \in [\![1, k]\!]$. On pose

$$Q_i \coloneqq \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{n_j}.$$

Par le théorème de Bézout, il existe des polynômes $R_i, S_i \in \mathbf{C}[X]$ tels que

$$R_i Q_i + S_i (X - \lambda_i)^{n_i} = 1.$$

L'endomorphisme $\pi_i \coloneqq R_i(A) Q_i(A)$ est le projecteur sur l'espace caractéristique $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{n_i}$ parallèlement à la somme des autres. Dans ce cas, l'endomorphisme $D = \sum_{i=1}^k \lambda_i \pi_i$ est un polynôme en la matrice A. En posant $P \coloneqq \sum_{i=1}^n \lambda_i R_i Q_i$, il reste à montrer que $P(0) = 0$. Distinguons deux cas.

- On suppose que 0 est une valeur propre de A. Alors il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $Av = 0$. En notant $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, on obtient $0 = Dv = P(A)v = a_0 v$, donc $a_0 = 0$, donc $P(0) = 0$.
- On suppose que 0 n'est pas une valeur propre de A. Alors on remplace le polynôme P par le polynôme $P - P(0)/\chi_A(0) \times \chi_A$ et on se ramène au cas précédent. ◇

Proposition 3.20. La forme de Killing d'une algèbre de Lie nilpotente est nulle.

Attention, la réciproque est fausse. En effet, considérons l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & ix & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbf{C} \right\}.$$

On peut vérifier qu'il est résoluble, non nilpotente et $B_{\mathfrak{g}} = 0$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. D'après le théorème d'Engel, il existe une base de l'algèbre $\mathfrak{g}$ dans laquelle les matrices des endomorphismes $\operatorname{ad} X$ avec $X \in \mathfrak{g}$ sont triangulaires supérieures de diagonales nulles. Dans ce cas, la forme de Killing est nulle. ◇

Proposition 3.21. Une algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si l'algèbre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente.

Démonstration. On suppose que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble. Alors on peut trigonaliser simultanément tous les endomorphismes $\operatorname{ad} X$ avec $X \in \mathfrak{g}$. Alors pour deux éléments $X, Y \in \mathfrak{g}$, la matrice de l'endomorphisme $\operatorname{ad}[X, Y]$ est le crochet de deux matrices triangulaires supérieures, donc c'est une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc l'endomorphisme $\operatorname{ad}[X, Y]$ est nilpotent. Le théorème d'Engel assure alors que l'algèbre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente.

Réciproquement, on suppose que l'algèbre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\mathscr{D}^{k+1}(\mathfrak{g}) = \mathscr{D}^k([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset \mathscr{C}^k([g, \mathfrak{g}]).$$

À partir d'un certain rang $k \geqslant 1$, on peut écrire $\mathscr{C}^k([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$, donc $\mathscr{D}^{k+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Ainsi l'algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble. ◇

Preuve du théorème de Cartan. On suppose que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble. D'après le théorème de Lie, il existe une base de l'algèbre $\mathfrak{g}$ qui trigonalise simultanément les endomorphismes $\operatorname{ad} X$ avec $X \in \mathfrak{g}$. Alors la matrice de l'endomorphisme $\operatorname{ad} Y$ avec $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est triangulaire supérieure de diagonale nulle. En particulier, la matrice $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y$ avec $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est triangulaire supérieure de diagonale nulle, donc $B(X, Y) = 0$. Cela conclure le sens direct.

Réciproquement, on suppose que $B(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$. Par la proposition précédente, il suffit de montrer que l'algèbre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente. D'après le théorème d'Engel, il suffit d'établir que les endomorphismes $\operatorname{ad} X$ avec $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ sont nilpotents. Posons

$$\mathfrak{n} \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \mid [A, \operatorname{ad} \mathfrak{g}] \subset \operatorname{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

Vérifions que, pour tous éléments $A \in \mathfrak{n}$ et $Z \in \operatorname{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a $\operatorname{tr}(A \circ Z) = 0$. En effet, on calcul

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A \circ \operatorname{ad}[X, Y]) &= \operatorname{tr}(A \circ [\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y]) \\
&= \operatorname{tr}(A \circ \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) - \operatorname{tr}(A \circ \operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad} X) \\
&= \operatorname{tr}(A \circ \operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ A \circ \operatorname{ad} Y) \\
&= \operatorname{tr}([A, \operatorname{ad} X] \circ \operatorname{ad} Y) \quad \text{avec} \quad [A, \operatorname{ad} X] \in \operatorname{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, on admet provisoirement le lemme suivant. Dans ce dernier, on prend

$$V = \mathfrak{g}, \qquad E = \operatorname{ad} \mathfrak{g} \qquad \text{et} \qquad F = \operatorname{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Alors $T = \mathfrak{n}$. En appliquant le lemme, on trouve que l'endomorphisme $x = \operatorname{ad} X$, en vertu du précédent paragraphe, est nilpotent ce qui conclut la preuve. ◇

Lemme 3.22. Soient V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $E, F \subset \mathfrak{gl}(V)$ des sous-espaces vectoriels tels que $F \subset E$. On pose

$$T \coloneqq \{u \in \mathfrak{gl}(V) \mid [u, E] \subset F\}.$$

Soit $x \in T$ un endomorphisme tel que

$$\forall y \in T, \qquad \operatorname{tr}(x \circ y) = 0.$$

Alors ce dernier est nilpotent.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ les valeurs propres de l'endomorphisme x. On pose

$$H \coloneqq \operatorname{Vect}_{\mathbf{R}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathbf{C}.$$

Le but est de montrer que $H = \{0\}$ ce qui conclura que l'endomorphisme x est nilpotent. Pour cela, on va vérifier que $H^* = \{0\}$. Soit $\chi \in H^*$. Montrons que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \chi(\lambda_i) = 0.$$

On note $D + N$ la décomposition de Dunford de l'endomorphisme x. Soit $\mathscr{B}$ une base de diagonalisation de l'endomorphisme D. Dans cette base, on considère l'endomorphisme $y \in \mathfrak{gl}(V)$ de matrice

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \coloneqq \operatorname{diag}(\chi(\lambda_1), \dots, \chi(\lambda_n)).$$

Montrons qu'alors l'endomorphisme $\operatorname{ad} Y$ est un polynôme en l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ sans terme constante. On sait qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que

$$P(\lambda_i - \lambda_j) = \chi(\lambda_i - \lambda_j), \qquad i, j \in [\![1, n]\!].$$

En particulier, le polynôme P n'a pas de terme constant puisque $P(0) = \chi(0) = 0$. Par ailleurs, pour tous indices $i, j \in [\![1, n]\!]$, on obtient

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} y) E_{i,j} &= (\chi(\lambda_i) - \chi(\lambda_j)) E_{i,j} \\
&= P(\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j} \\
&= P(\operatorname{ad} D) E_{i,j}.
\end{aligned}$$

D'où $\operatorname{ad} Y = P(\operatorname{ad} D)$. Or on a déjà vu qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ sans terme constant tel que $\operatorname{ad} D = Q(\operatorname{ad} x)$. Ainsi $\operatorname{ad} Y = P \circ Q \circ \operatorname{ad} x$ avec $P \circ Q(0) = 0$. On écrit alors

$$\operatorname{ad} y = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (\operatorname{ad} x)^i.$$

Comme $x \in T$, on a $[x, E) \subset F]$, donc $(\operatorname{ad} x)E \subset E$. De proche en proche, on obtient alors
$$(\operatorname{ad} x)^k E \subset F, \qquad \forall k \geqslant 1.$$
Ainsi $(\operatorname{ad} y)E \subset F$, donc $y \in T$. Or
$$0 = \operatorname{tr}(x \circ y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi(\lambda_i),$$
donc la $\mathbf{R}$-linéarité de l'application χ donne
$$0 = \sum_{i=1}^{n} \chi(\lambda_i)^2 = 0$$
ce qui conclut $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. ◇

3.4. Radical résoluble et algèbre de Lie semi-simple

On rappel les résultats suivants.

Lemme 3.23. 1. Toute sous-algèbre et image par homomorphisme d'une algèbre de Lie résoluble est résoluble.
2. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un idéal. Si les algèbres $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont résolubles, alors l'algèbre $\mathfrak{g}$ est résoluble.
3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ deux idéaux résolubles. Alors l'algèbre $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ est un idéal résoluble de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Définition-proposition 3.24. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Alors il existe un unique idéal résoluble maximal pour l'inclusion de l'algèbre $\mathfrak{g}$, noté $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ et appelée le *radical résoluble* de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Définition 3.25. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *simple* si elle n'est pas abélienne et elle n'a aucun idéal non trivial.

Remarque. Une algèbre de Lie ne peut être à la fois résoluble et simple.

Théorème 3.26. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie est *semi-simple* si les conditions équivalentes suivants sont vérifiées :

(i) $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \{0\}$;
(ii) la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée ;
(iii) il existe des idéaux simples $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$.

Démonstration. On suppose que $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \{0\}$. On sait que l'orthogonal $\mathfrak{g}^{\perp}$ est un idéal, donc
$$B_{\mathfrak{g}^{\perp}} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}^{\perp} \times \mathfrak{g}^{\perp}} = 0.$$
D'après le critère de résolubilité de Cartan, l'algèbre $\mathfrak{g}^{\perp}$ est résoluble, donc $g^{\perp} \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, donc $g^{\perp} = \{0\}$. Ainsi la forme de Killing est non dégénérée.

On suppose que la forme de Killing est non dégénérée. On effectue une récurrence sur la dimension de l'algèbre $\mathfrak{g}$. L'initialisation est claire. Si l'algèbre $\mathfrak{g}$ est simple, c'est terminé. Sinon elle est soit abélienne soit un idéal non triviale. Le premier cas étant impossible, elle admet alors un idéal non trivial $\alpha \subset \mathfrak{g}$. On a vu $\mathfrak{g} = \alpha \oplus \alpha^{\perp}$ où les formes B_{α} et $B_{\alpha^{\perp}}$ sont non dégénérées. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux algèbres α et $\alpha^{\perp}$ pour conclure le point (iii).

Enfin, on suppose qu'il existe des idéaux simples $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$. Soit $\pi_i \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_i$ la projection sur le i-ième facteur. L'image $\pi_i(\operatorname{rad} \mathfrak{g})$ est un idéal résoluble de l'algèbre simple $\mathfrak{g}_i$, donc $\pi_i(\operatorname{rad} \mathfrak{g}) = \{0\}$. D'où $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \{0\}$ ◇

Exercice 3. 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Il existe des idéaux simples $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$. Montrer que tout idéal de l'algèbre $\mathfrak{g}$ est de la forme $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ pour une partie $I \subset [\![1, k]\!]$.
2. Montrer que les idéaux simples $\mathfrak{g}_i$ sont uniquement déterminés, à l'ordre près, comme les idéaux minimaux.

Proposition 3.27. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors le quotient $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Démonstration. Notons $\pi_i \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ le morphisme canonique. Alors il fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}\mathfrak{g} \longrightarrow \pi^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g})) \longrightarrow \operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}) \longrightarrow 0.$$

Comme les algèbres $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ et $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ sont résolubles, donc l'idéal $\pi^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}))$ est résoluble, donc il est inclus dans $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$, donc

$$\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \pi^{-1}(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g})),$$

donc $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}) = \{0\}$. ◇

3.5. Compléments culturels : les facteurs de Levi

Définition-proposition 3.28. Soient α et $\mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie et $\sigma \colon \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\alpha)$ une représentation telle que $\sigma(\mathfrak{b}) \subset \operatorname{Der}(\alpha)$. Pour $(X, X') \in \alpha^2$ et $(Y, Y') \in \mathfrak{b}^2$, on pose

$$[(X, X'), (Y, Y')] \coloneqq ([X, X'] - \sigma(Y)X' - \sigma(Y')X, [Y, Y']) \in \alpha \times \mathfrak{b}.$$

Ce crochet définit une structure d'algèbre de Lie sur le produit $\alpha \times \mathfrak{b}$, notée $\alpha \rtimes_\sigma \mathfrak{b}$. L'ensemble $\alpha \times \{0\}$ en est un idéal et l'ensemble $\{0\} \times \mathfrak{b}$ une sous-algèbre.

Définition 3.29. Un *facteur de Levi* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ telle que

$$\mathfrak{m} \oplus \operatorname{rad}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}.$$

Soit $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ un facteur de Levi. Alors l'application

$$\sigma \colon \left| \begin{array}{l} \mathfrak{m} \longrightarrow \operatorname{Der}(\operatorname{rad}\mathfrak{g}), \\ Y \longmapsto (X \longmapsto -[X, Y]) \end{array} \right.$$

est une représentation et l'application

$$\tau \colon \left| \begin{array}{c} \operatorname{rad}\mathfrak{g} \rtimes_\sigma \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}, \\ (X, Y) \longmapsto X + Y \end{array} \right.$$

est alors un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Théorème 3.30. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Alors elle admet au moins un facteur de Levi.

3.6. Automorphismes et dérivations

Rappel. L'ensemble $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. L'ensemble $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, appelée l'*ensemble des dérivations intérieures*, est un idéal de l'algèbre $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$.

Proposition 3.31. L'ensemble $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ des automorphismes est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est l'ensemble $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$.

Démonstration. L'ensemble $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ est bien un sous-groupe du groupe $\operatorname{GL}(\mathfrak{g})$. De plus, il est fermé en utilisant la continuité du crochet.

Soit $U \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ un endomorphisme tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad e^{tU} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Soient $t \in \mathbf{R}$ et $Y, Z \in \mathfrak{g}$ Alors

$$e^{tU}[X, Y] = [e^{tU}X, e^{tU}Y].$$

En dérivant et en évaluant à l'origine, on obtient

$$U[X, Y] = [UX, Y] + [X, UY].$$

Ainsi l'endomorphisme U est bien une dérivation. Réciproquement, soit $\delta \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ une dérivation. Soient $t \in \mathbf{R}$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$. Alors

$$e^{t\delta}[X, Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \delta^n}{n!}[X, Y].$$

Or pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, une simple récurrence permet d'écrire

$$\delta^n[X,Y] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\delta^k X, \delta^{n-k} Y].$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} e^{t\delta}[X,Y] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} [\delta^k X, \delta^{n-k} X] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{\delta^k X}{k!}, \frac{\delta^{n-k} X}{(n-k)!} \right] \\ &= [e^{t\delta} X, e^{t\delta} Y]. \end{aligned}$$

◇

Théorème 3.32. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Alors $\operatorname{ad} \mathfrak{g} = \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire que toutes les dérivations sont intérieures.

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathfrak{g} \simeq \operatorname{ad} \mathfrak{g}$. Si $X \in \operatorname{Ker}(\operatorname{ad})$, alors $B(X,Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) = 0$, donc $X \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$. D'où $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}) = \{0\}$.

Soit $\mathfrak{p} \coloneqq (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$ l'orthogonal pour $B_{\operatorname{Der}(\mathfrak{g})}$. La forme de Killing $B_{\operatorname{Der}(\mathfrak{g})}$ restreinte à $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ est $B_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} \simeq B_{\mathfrak{g}}$ qui est non dégénérée, donc

$$(\operatorname{ad} \mathfrak{g}) \cup (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp = \{0\}\,.$$

On considère l'application

$$\varphi \colon \left| \begin{array}{rcl} \operatorname{Der}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^*, \\ \delta & \longmapsto & B_{\operatorname{Der}(\mathfrak{g})}(\delta, \cdot) \end{array} \right. .$$

Son noyau est $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$. D'après le théorème du rang, on a donc

$$\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp = \dim \operatorname{Der}(\mathfrak{g}),$$

donc

$$\dim(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp \geqslant \operatorname{codim}(\operatorname{ad} \mathfrak{g}),$$

donc

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} \oplus (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp = \operatorname{Der}(\mathfrak{g}).$$

Comme $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ et $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$ sont deux idéaux, pour tout élément $\delta \in (\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp$, on a

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \qquad [\delta, \operatorname{ad} X] = 0,$$

donc

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \qquad \operatorname{ad}(\delta X) = 0.$$

Comme $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}) = \{0\}$, on en déduit $\forall X \in \mathfrak{g}, \delta X = 0$, donc $\delta = 0$. D'où $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})^\perp = 0$. ◇

Corollaire 3.33. Toute algèbre de Lie semi-simple est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe de ses automorphismes.

Théorème 3.34. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. Alors il existe un groupe de Lie linéaire dont l'algèbre $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie.

Théorème 3.35. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps k de caractéristique nulle. Alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que l'algèbre $\mathfrak{g}$ soit isomorphe à une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(n,k)$.

Chapitre 4
Sous-algèbres de Cartan, données radicielles

4.1 Sous-algèbres de Cartan 25
4.2 Données radicielles 30

4.1. Sous-algèbres de Cartan

Définition 4.1. Le *rang* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est le nombre

$$\operatorname{rg} \mathfrak{g} := \min\{n \in \mathbf{N} \mid \exists X \in \mathfrak{g},\ \dim \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X) = n\}$$

où la notation $\mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$ désigne le sous-espace caractéristique de l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ associé à la valeur propre 0.

Remarques. – Le rang est le plus grand entier $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \qquad \dim \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X) \geqslant n.$$

- Comme $\operatorname{ad}(X)X = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on obtient $\operatorname{rg} \mathfrak{g} \geqslant 1$. Par ailleurs, on a $\operatorname{rg} \mathfrak{g} \leqslant \dim \mathfrak{g}$.
- L'algèbre $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si $\dim \mathfrak{g} = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$.

Lemme 4.2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. Alors $\operatorname{rg} \mathfrak{g} = \operatorname{rg} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

Démonstration. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \\ X & \longmapsto & \operatorname{ad} X \end{array} \right.$$

est linéaire et donc polynomiale. Par ailleurs, l'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbf{R}[T], \\ M & \longmapsto & \chi_M(T) := \det(T \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}} - M) \end{array} \right.$$

est polynomiale. Ainsi leur composée est encore polynomiale. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on écrit

$$\chi_{\operatorname{ad} X}(T) = \sum_{i=0}^{\dim \mathfrak{g}} p_i(X) T^i.$$

Or une fonction polynomiales en plusieurs variables $X_1, \ldots, X_k$ qui s'annule sur $\mathbf{R}^k$ est nulle. Mais l'entier $\operatorname{rg} \mathfrak{g}$ est le plus grand entier $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall X \in G,\ \forall i \leqslant \dim \mathfrak{g}, \qquad p_i(X) = 0$$

et de même pour l'entier $\operatorname{rg} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Les polynômes p_i ne changeant pas lorsqu'on est sur l'algèbre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, on en déduit le lemme. ◇

Définition-proposition 4.3. Un élément $X \in \mathfrak{g}$ est *régulier* si

$$\dim \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X) = \operatorname{rg} \mathfrak{g}.$$

Sinon il est singulier. Alors l'ensemble $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ des éléments singuliers est un ouvert dense n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes si $k = \mathbf{R}$ et étant connexe sur $k = \mathbf{C}$.

Avec les notations de la preuve précédente, on a $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g}) = p_{\operatorname{rg}\mathfrak{g}}^{-1}(k^\times)$ à moins que $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ auquel cas tout élément est régulier. L'ensemble $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ est donc un ouvert de Zariski. On peut alors en déduire la proposition (cf. cours de géométrie algébrique).

Exemple. Prenons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$. Montrons que $\operatorname{rg}\mathfrak{g} = n$. Soit $X \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ avec $\sum \lambda_i = 0$. Les matrices $\operatorname{diag}(1, -1, 0, \dots, 0)$, …, $\operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0, -1)$ et $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ forment une base de $\mathfrak{g}$. L'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ a pour valeurs propres correspondantes 0, …, 0. Comme $[X, E_{i,j}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$, donc si $\lambda_i \neq \lambda_j$, les valeurs propres est de multiplicité n. L'ensemble $\operatorname{Reg}\mathfrak{g}$ étant une ouvert dense, il existe un élément diagonalisable $X \in \operatorname{Reg}\mathfrak{g}$. À une conjugaison près, on peut donc se ramener au cas diagonal. D'où $\operatorname{rg}\mathfrak{g} = n$.

Définition 4.4. Une sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est *de Cartan* si

– c'est une algèbre nilpotente ;

– $\mathfrak{h} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [Y, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

Théorème 4.5. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

1. Alors ses sous-algèbres de Cartan sont précisément les ensemble de la forme $\mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$ avec $X \in \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$. Elles sont donc de dimension $\operatorname{rg}\mathfrak{g}$.
2. L'action du groupe $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan est transitive si $k = \mathbf{C}$ et n'a qu'un nombre fini d'orbites si $k = \mathbf{R}$.
3. On suppose que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Alors une sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est de Cartan si et seulement si elle est abélienne maximal et tout endomorphisme $\operatorname{ad} X$ avec $X \in \mathfrak{h}$ est semi-simple. Si plus, si $X \in \mathfrak{h} \cap \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$, alors
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(\operatorname{ad} X) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}$$
où la notation $\mathfrak{g}_0(\operatorname{ad} X)$ désigne le sous-espace propre de l'endomorphisme $\operatorname{ad} X$ associé à la valeur propre 0.

Pour montrer ce théorème, on aura besoin de résultats intermédiaires.

Lemme 4.6. Soient $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Alors

1. l'algèbre $\mathfrak{h}$ est nilpotente maximal ;
2. si $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre contenant $\mathfrak{h}$, alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$;
3. si $k = \mathbf{R}$, alors $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.
4. Pour $X \in \mathfrak{h}$, posons $S_{\mathfrak{h}}(X) \coloneqq \det((\operatorname{ad} X)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}})$. C'est un polynôme non nul sur $\mathfrak{h}$.

Démonstration. 1. Soit $\varphi \supset \mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{p}/\mathfrak{h} \neq \{0\}$. Regardons
$$\varphi \colon \left| \begin{array}{l} \mathfrak{h} \longrightarrow \operatorname{End}(\mathfrak{p}/\mathfrak{h}), \\ H \longmapsto (\operatorname{ad} H)|_{\mathfrak{p}} \mod \mathfrak{h}. \end{array} \right.$$
qui est bien défini et c'est une représentation de $\mathfrak{h}$. Mais l'algèbre φ est nilpotente, donc l'endomorphisme $(\operatorname{ad} H)|_\varphi$ avec $H \in \mathfrak{h}$ est nilpotent. Ainsi l'image $\varphi(\mathfrak{h})$ est constituée d'éléments nilpotents. Par le théorème de Lie, les éléments de $\varphi(\mathfrak{h})$ admettent un vecteur propre commun, donc il existe un vecteur $v \in \mathfrak{p}/\mathfrak{h} \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(H)v = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. Soit $V \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ un élément relevant v. Alors $[H, V] = 0 \mod \mathfrak{h}$, donc V normalise $\mathfrak{h}$, donc $V \in \mathfrak{h}$ ce qui est absurde.

3. On a $[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, [\dots, \mathfrak{h}]] = \{0\}$ et c'est encore vrai pour $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ est nilpotente.
4. Si $H \in \mathfrak{h}$, alors $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\operatorname{ad} X \cdot H) = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}([x, H]) = 0$, donc l'endomorphisme $(\operatorname{ad} X)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ induit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est bien définie. Alors l'application
$$\rho \coloneqq (\operatorname{ad} \cdot)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$
est une représentation d'une algèbre de Lie nilpotente. D'après le théorème sur les représentations d'algèbres de Lie nilpotentes, on peut trouver une base de triangulation tel que les

endomorphismes $\rho(H)$ avec $H \in \mathfrak{h}$ sont triangulaires par blocs où les blocs sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i(H) \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$. Donc

$$S_{\mathfrak{h}}(H) = \det \rho(H) = \prod \lambda_i^{d_i} \quad \text{avec} \quad d_i \in \mathbf{N}^*.$$

Si ce polynôme était nul, alors une des formes linéaires λ_i serait nulles et on aurait un bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

donc il existerait une vecteur propre commun $v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \setminus \{0\}$. Comme précédemment, on aurait alors un relevé V qui est dans le normalisation de $\mathfrak{h}$ ce qui est impossible. ◇

Proposition 4.7. Soit $X \in \mathfrak{g}$ un élément régulier. Alors

$$\mathfrak{h} \coloneqq \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid \exists k \geqslant 1,\ (\operatorname{ad} X)^k Y = 0\}$$

est une sous-algèbre de Cartan.

Lemme 4.8. Soient λ et μ deux valeurs propres de $\operatorname{ad} X$. Notons $\mathfrak{g}^\lambda \coloneqq \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} X - \lambda \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^{\dim \mathfrak{g}}$. Alors

$$[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}.$$

Démonstration. La preuve est basée sur la forme

$$(\operatorname{ad} X - (\lambda+\mu)\operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^k [Y, Z] = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} [(\operatorname{ad} X - \lambda \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^i Y, (\operatorname{ad} X - \mu \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^{k-i} Z]$$

qui s'obtient à partir de l'identité de Jacobi. Soient $Y \in \mathfrak{g}^\lambda$ et $Z \in \mathfrak{g}^\mu$. Alors

$$(\operatorname{ad} X - (\lambda+\mu)\operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^{2\dim \mathfrak{g}} [Y, Z] = \sum_{i=1}^{2\dim \mathfrak{g}} \binom{k}{i} [(\operatorname{ad} X - \lambda \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^i Y, (\operatorname{ad} X - \mu \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^{2\dim \mathfrak{g} - i} Z] = 0$$

car

- si $i \geqslant \dim \mathfrak{g}$, alors $(\operatorname{ad} X - \lambda \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^i Y = 0$;
- si $i < \dim \mathfrak{g}$, alors $(\operatorname{ad} X - \mu \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}})^{2\dim \mathfrak{g} - i} Z = 0$. ◇

Preuve de la proposition 4.7. On pose $\mathfrak{h} \coloneqq \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$. Avec le lemme, on a $[\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^0] \subset \mathfrak{g}^0$, donc $\mathfrak{h}$ est bien une sous-algèbre. On suppose $k = \mathbf{C}$. Alors on peut décomposer l'algèbre $\mathfrak{g}$ est sous-espaces caractéristiques

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}^\lambda(\operatorname{ad} X) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}' \quad \text{avec} \quad \mathfrak{g}' \coloneqq \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}^\lambda(\operatorname{ad} X).$$

Regardons l'application

$$\varphi \colon \left| \begin{aligned} \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathbf{C}, \\ Y &\longmapsto \det((\operatorname{ad} Y)|_{\mathfrak{g}'}) \end{aligned} \right.$$

qui est bien définie car $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^\lambda] = [\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^\lambda] \subset \mathfrak{g}^\lambda$, donc $\mathfrak{g}'$ est stable par les adjoints de $\mathfrak{h}$. Cette application φ est un polynôme non nul car $\varphi(X) \neq 0$ puisque les valeurs propres de $(\operatorname{ad} X)|_{\mathfrak{g}'}$ sont non nulles. Soit $S \coloneqq \{Y \in \mathfrak{h} \mid \varphi(Y) \neq 0\}$. C'est un ouvert dense. Si $Y \in S$, alors $(\operatorname{ad} X)|_{\mathfrak{g}'}$ n'a pas 0 comme valeur propre. Mais pas définition du rang, l'endomorphisme $\operatorname{ad} Y$ a au moins $\operatorname{rg} \mathfrak{g}$ fois la valeur propre 0. Comme $X \in \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$, on a donc $\dim \mathfrak{h} = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$, donc l'endomorphisme $(\operatorname{ad} Y)|_{\mathfrak{h}}$ n'a que la valeur propre 0, donc il est nilpotent. Ceci étant vrai pour tout $Y \in S$, comme être nilpotent est une propriété fermée, tous les endomorphismes $\operatorname{ad} Y$ avec $Y \in \mathfrak{h}$ sont nilpotents. Donc l'algèbre $\mathfrak{h}$ est nilpotente par le théorème d'Engel.

Il reste à montrer que $\mathfrak{h}$ est son propre normalisateur. Soit $Y \in g$ un élément normalisant $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $[\mathfrak{h}, Y] \subset \mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$, pour k assez grand, on a $(\operatorname{ad} X)^k[X, Y] = 0$, donc $(\operatorname{ad} X)^{k+1} Y = 0$, donc $Y \in \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$. ◇

Proposition 4.9. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan.

1. Si $X \in \mathfrak{h} \cap \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$, alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$.
2. Il existe un élément $X \in \mathfrak{h} \cap \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$.

Démonstration.

1. On suppose $X \in \mathfrak{h} \cap \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$. On veut montrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$. Pour l'inclusion $\subset$, soit $Y \in \mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{h}$ est nilpotente, pour k assez grand, on a $(\operatorname{ad} X)^k Y = 0$, donc $Y \in \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$. D'où $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$. Mais comme ces deux algèbres sont nilpotentes avec $\mathfrak{h}$ maximales, on en déduit l'égalité.
2. On avait une application $S_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbf{C}$ qui était non nulle. Fixons un élément $b_0 \in \mathfrak{h}$ tel que $S_{\mathfrak{h}}(b_0) \neq 0$. En écrivant $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus V$, alors la matrice de l'endomorphisme $\operatorname{ad} b_0$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} \text{nil.} & * \\ 0 & U(b_0) \end{pmatrix}$$
où $U(b_0)$ est inversible. Regardons l'application
$$\Psi : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}, \\ (a, b) \longmapsto \exp(\operatorname{ad} a) b. \end{array} \right.$$
Alors
$$d\Psi_{(0,b_0)}(v, w) = (\operatorname{ad} v) b_0 + w, \qquad v \in \mathfrak{g},\ w \in \mathfrak{h}.$$
En faisant varier w, on voit $\operatorname{Im}(d\Psi_{(0,b_0)}) \supset \mathfrak{h}$. Par ailleurs, si $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est la projection, alors
$$\begin{aligned} \pi \circ d\Psi_{(0,b_0)}(v, w) &= (\operatorname{ad} v) b_0 \mod \mathfrak{h} \\ &= [v, b_0] \mod \mathfrak{h} \\ &= -U(b_0) v \mod \mathfrak{h}, \end{aligned}$$
donc on a une surjection $\operatorname{Im}(d\Psi_{(0,b_0)}) \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, donc $\operatorname{Im}(d\Psi_{(0,b_0)}) = \mathfrak{g}$. Ainsi la différentielle $d\Psi_{(0,b_0)}$ est surjective, donc l'image de Ψ contient un voisinage ouvert U du point $\Psi(0, b_0) = b_0$. Comme $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ est dense, il existe un élément $Y \in \operatorname{Reg}(\mathfrak{g}) \cap U$. Ce dernier s'écrit $Y = \exp(\operatorname{ad} a) b$ avec $a \in \mathfrak{g}$ et $b \in \mathfrak{h}$, donc $b = \exp(-\operatorname{ad} a) Y \in \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ car les éléments réguliers sont préservés par automorphisme, donc $b \in \operatorname{Reg}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h}$. ◇

Preuve du point 2 du théorème 4.5. On introduit sur l'ensemble $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $\operatorname{Aut}^0(\mathfrak{g})$, la composante connexe de l'identité, et l'appartenance à une même sous-algèbre de Cartan. Autrement dit, on a $X \sim Y$ si et seulement s'il existe un automorphisme $\varphi \in \operatorname{Aut}^0(\mathfrak{g})$ tel que $X \in \varphi(\mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} Y))$. Les classes d'équivalences sont ouvertes. En effet, soient $X \in \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ un élément et $U \subset \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} X)$ un voisinage ouvert de X. On peut supposer que $U \subset \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$. On regarde l'application
$$\Psi : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{g} \times U \longrightarrow \mathfrak{g}, \\ (a, b) \longmapsto \exp(\operatorname{ad} a) b. \end{array} \right.$$
Pour les mêmes raisons que précédemment, sa différentielle $d\Psi_{(0,X)}$ est surjective, donc l'image de Ψ contient un voisinage ouvert V de $\Psi(0, X) = X$. Or tout élément $Y \in \operatorname{Im} \Psi$ vérifie $Y \sim X$. Ceci montre que les classes sont ouvertes.

Soit W une composante connexe de $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$. Alors on peut l'écrire comme une réunion disjointe d'ensemble $C \cap W$ où C est une classe. Comme W est connexe, il est donc recouvert par une unique classe. Si $k = \mathbf{C}$, alors $\operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$ est connexe et il n'y a qu'une classe d'équivalence. ◇

Proposition 4.10. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan.

1. La forme de Killing restreinte à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée.
2. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est abélienne maximale.
3. Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, l'endomorphisme $\operatorname{ad} H$ est semi-simple.

Démonstration. On suppose $k = \mathbf{C}$. Comme $\mathfrak{h}$ est nilpotente, la restriction $\operatorname{ad}|_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est une représentation d'une algèbre de Lie nilpotente, donc les éléments $\operatorname{ad} H$ avec $H \in \mathfrak{h}$ s'écrivent par blocs où chaque bloc est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i(H) \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$. Ainsi on peut écrire

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}^{\lambda_i}$$

où on a noté $\mathfrak{g}^{\lambda_i}$ le sous-espace caractéristiques à tous les endomorphismes $\operatorname{ad} H$. Comme précédemment, on a $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$.

Montrons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$. En effet, soit $H \in \mathfrak{h}$. Alors l'endomorphisme $\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}}$ est nilpotente puisque l'algèbre $\mathfrak{h}$ est nilpotente, donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} H)$. Ainsi

$$\mathfrak{h} \subset \bigcap_{H \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} H) = \mathfrak{g}^0.$$

Soit $H \in \mathfrak{h} \cap \operatorname{Reg}(\mathfrak{g})$. On a déjà vu que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\operatorname{ad} H)$, donc $\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{h}$.

Montrons que, pour toutes formes linéaires $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ telles que $\lambda + \mu \neq 0$, on a $\mathfrak{g}^\lambda \perp \mathfrak{g}^\mu$. Soient $X \in \mathfrak{g}^\lambda$ et $Y \in \mathfrak{g}^\mu$. Soit $Z \in \mathfrak{g}^\nu$ pour un certain ν. Alors

$$(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y)Z = [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{g}^{\nu+(\lambda+\mu)}.$$

La matrice de l'endomorphisme $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y)$ à une diagonale par blocs nuls car cet endomorphisme permute les sous-espaces $\mathfrak{g}^\nu$. Ainsi cette matrice est de trace nulle, donc $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0$.

Maintenant, montrons le premier point. On pose $E \coloneqq \bigoplus_{\lambda\neq 0} \mathfrak{g}^\lambda$. Le dernier paragraphe donne $E \perp \mathfrak{g}^0$, donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_\perp E$. Comme la forme $B_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée, la forme $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est donc non dégénérée. En effet, si $x \in \mathfrak{h}$ vérifie $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0$ pour $Y \in \mathfrak{h}$, alors c'est vrai pour tout élément $Y + Z \in \mathfrak{h} \oplus E$ car $X \in E^\perp = \mathfrak{h}$, donc $X \in \mathfrak{h}^\perp = \{0\}$.

Montrons que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}^\perp = E$. Cela impliquera que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ puisque $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Comme l'algèbre $\mathfrak{h}$ est résoluble, il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle tous les matrices des endomorphismes $\operatorname{ad} H$ avec $H \in \mathfrak{h}$ soient triangulaires supérieures. Pour trois matrices triangulaires supérieures A, B et C, on a

$$\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} BAC, \quad \text{donc} \quad \operatorname{tr}[A, B]C = 0.$$

Soient $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$. Alors

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}[X, Y] \circ \operatorname{ad} Z) = \operatorname{tr}([\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y] \circ \operatorname{ad} Z) = 0,$$

donc $[X, Y] \perp Z$. D'où $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}^\perp$. Finalement, l'algèbre $\mathfrak{h}$ est abélienne. Mais comme l'algèbre $\mathfrak{h}$ est nilpotente maximale, elle est abélienne maximale.

Il reste à montrer le dernier point. Soit $H \in \mathfrak{h}$. Montrons que l'endomorphisme $\operatorname{ad} H$ est diagonalisable. Pour cela, utilisons la décomposition de Dunford. On l'écrit $\operatorname{ad} H = S + N$. On peut écrire la matrice de $\operatorname{ad} H$ diagonales par blocs triangulaires. On note $\lambda(H)$ la diagonale d'un bloc. Pour $X \in \mathfrak{g}^\lambda$, on pose $S(X) \coloneqq \lambda(H)X$. Alors S est une dérivation. En effet, si $X \in \mathfrak{g}^\lambda$ et $Y \in \mathfrak{g}^\mu$, on a

$$S[X, Y] = (\lambda + \mu)[X, Y] = \lambda[X, Y] + \mu[X, Y] = [SX, Y] + [Y, SY].$$

Comme l'algèbre $\mathfrak{g}$ est semi-simple, les dérivations sont intérieures, donc il existe un élément $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $S = \operatorname{ad} Z$. Alors $(\operatorname{ad} Z)\mathfrak{h} = S\mathfrak{g}^0 = \{0\}$, donc Z normalise $\mathfrak{h}$. Or $\mathfrak{h}$ est de Cartan, donc $Z \in \mathfrak{h}$. La matrice de $\operatorname{ad}(H - Z)$ est diagonale par blocs triangulaires de diagonales nulles. Si $Y \in \mathfrak{h}$, alors $\operatorname{ad} Y \circ \operatorname{ad}(H - Z)$ a donc sa diagramme nulle, donc $B(Y, H - Z) = 0$. Comme la forme $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non dégénérée, on en déduit $H - Z = 0$, donc $S = \operatorname{ad} H$ ce qui conclut. ◇

4.2. Données radicielles

Définition 4.11. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$\mathfrak{g}_\lambda \coloneqq \{Y \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{h},\ [H, Y] = \lambda(H)Y\}.$$

Une *racine* de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}$. Notons Δ l'ensemble des racines non nulles. On peut alors écrire la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda$$

où les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{g}_\lambda$ sont appelés les *espaces radiciels*. Ils vérifient $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$.

Remarque. Comme les endomorphismes $\operatorname{ad} H$ avec $H \in \mathfrak{h}$ sont simultanément diagonalisables, on a $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}^\lambda$.

Lemme 4.12. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre abélienne. Si on peut écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}^\lambda$$

où les espaces g_λ vérifient

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \qquad (\operatorname{ad} H)|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda(H) \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}_\lambda},$$

alors la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de Cartan.

Exemples.

- Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ et la sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ des matrices diagonales de trace nulle. Cette dernière est abélienne. Notons λ_i la forme linéaire donnant le i-ième terme diagonal. Comme

  $$\forall H \in \mathfrak{h}, \qquad [H, E_{i,j}] = (\lambda_i - \lambda_j)(H)E_{i,j},$$

  on obtient

  $$\Delta = \{\lambda_i - \lambda_j \mid i \neq j\}$$

  et la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est bien de Cartan.
- Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère l'algèbre de Lie

  $$\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{so}(2n+1, \mathbf{C}) = \{X \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbf{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}X = -X\}$$

  et la sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ des matrices de la forme

  $$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_n \\ -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}, 0\right) \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbf{C}.$$

  C'est une sous-algèbre de Cartan.
- Soit $n \geqslant 3$ un entier. On considère l'algèbre de Lie

  $$\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{sp}(2n, \mathbf{C}) = \{X \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}X\Omega + \Omega X = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^{\mathrm{t}}A \end{pmatrix} \,\middle|\, {}^{\mathrm{t}}B = B, {}^{\mathrm{t}}C = C \right\}$$

  avec

  $$\Omega \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

  et la sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ des matrices de la forme

  $$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n) \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbf{C}.$$

  Les valeurs propres pour $\operatorname{ad} H$ avec $H \in \mathfrak{h}$ sont
  - si $i \neq j$, le nombre $\lambda_i + \lambda_j$ avec $\begin{pmatrix} 0 & E_{j,i} + E_{i,j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
  - si $i \neq j$, le nombre $-\lambda_i - \lambda_j$ avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,j} + E_{j,i} & 0 \end{pmatrix}$;

- le nombre $2\lambda_i$ avec $\begin{pmatrix} 0 & E_{i,i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- le nombre $-2\lambda_i$ avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i,i} & 0 \end{pmatrix}$;
- si $j \neq k$, le nombre $\lambda_j - \lambda_k$ avec $\begin{pmatrix} E_{j,k} & 0 & \\ 0 & -E_{k,j} & 0 \end{pmatrix}$.

D'où

$$\Delta = \{\pm\lambda_i \pm \lambda_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm 2\lambda_i \mid i\}.$$

Remarquons que $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{sp}(4, \mathbf{C}) \simeq \mathfrak{so}(5, \mathbf{C})$.

– Soit $n \geqslant 4$ un entier. On considère l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{so}(2n, \mathbf{C}) = \{X \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}X = -X\}$$

et la sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ des matrices de la forme

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \lambda_n \\ -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbf{C}.$$

De même, on trouve

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & \\ -\lambda_1 & 0 & & \\ & & 0 & \lambda_2 \\ & & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & C \\ {}^{\mathrm{t}}C & 0 \end{pmatrix}\right] = \mu C$$

pour une des quatre matrices $C =?$. On trouve alors les valeurs propres $\mu = i(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2)$. D'où

$$\Delta = \{i(\pm\lambda_\ell \pm \lambda_n) \mid n \neq \ell\}.$$

Remarquons qu'on a des isomorphismes exceptionnels

$$\mathfrak{so}(4, \mathbf{C}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{so}(6, \mathbf{C}) \simeq \mathfrak{sl}(4, \mathbf{C}).$$

Théorème 4.13 *(Killing, Cartan).* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe simple. Alors elle est isomorphe à l'un des quatre exemples précédents ou à l'une des cinq algèbres de Lie exceptionnelles que sont $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_5$ et $\mathfrak{g}_2$.

L'idée est que le système de racines Δ a une structure très contraignante. Ensuite, on utilise le théorème suivant.

Théorème 4.14. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie complexes simples et $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}' \in \mathfrak{g}$ deux sous-algèbres de Cartan. Notons Δ et Δ' leurs systèmes de racines respectifs. On suppose qu'il existe un isomorphisme $\varphi \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}'$ tel que ${}^{\mathrm{t}}\varphi(\Delta') = \Delta$. Alors on peut prolonger cet isomorphisme en une isomorphisme d'algèbres de Lie $\tilde{\varphi} \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$.

Exemple. On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sp}(4, \mathbf{C})$ et on prend les sous-algèbres $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ comme dans l'exemple précédents, c'est-à-dire

$$\mathfrak{h} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & \\ & & -\lambda_2 & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}' = \left\{\begin{pmatrix} \lambda_1' & & & \\ & \lambda_2' & & \\ & & -\lambda_1' & \\ & & & -\lambda_2' \end{pmatrix}\right\}.$$

On considère que $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ et $\lambda_i' \in \mathfrak{h}'^*$. Alors

$$\Delta = \{i(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2), \pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2\} \qquad \text{et} \qquad \Delta' = \{\pm\lambda_1' \pm \lambda_2', \pm 2\lambda_1, \pm 2\lambda_2\}.$$

En faisant un dessin, il existe une transformation linéaire $\mathfrak{h}'^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ qui envoie l'ensemble Δ' sur l'ensemble Δ (on peut la chercher comme la composée d'une rotation et d'une homothétie)

Chapitre 5
Systèmes de racines

5.1 Système de racines dans une algèbre de Lie 33
5.2 Systèmes de racines abstraits 37
5.3 Données combinatoires associées à l'ensemble des racines simples 40

5.1. Système de racines dans une algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. On écrit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$$

pour un système de racine $\Sigma \subset \mathfrak{h}^*$. Comme la forme $B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non dégénérée, il existe une bijection canonique

$$\mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{h}$$

qui à une forme $\beta \in \mathfrak{h}^*$ associe l'unique élément $\check{\beta} \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \qquad \beta(H) = B_\mathfrak{g}(\check{\beta}, H).$$

Par transport de structure, on définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{h}^*$ par

$$\langle \alpha, \beta \rangle := B_\mathfrak{g}(\check{\alpha}, \check{\beta}).$$

Théorème 5.1. 1. On a $\mathrm{Vect}_\mathbf{C}(\Sigma) = \mathfrak{h}^*$.
2. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, on a $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.
3. Pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma \cup \{0\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$, on a $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$.
4. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, on a $-\alpha \in \Sigma$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbf{C}\check{\alpha}$ et $\alpha(\check{\alpha}) = B_\mathfrak{g}(\check{\alpha}, \check{\alpha}) \neq 0$.

Démonstration. 1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathrm{Vect}_\mathbf{C}(\Sigma) \neq \mathfrak{h}^*$. Alors l'espace $\mathrm{Vect}_\mathbf{C}(\Sigma)$ est inclu dans un hyperplan, c'est-à-dire qu'il existe élément non nul $H \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\forall \alpha \in \Sigma, \qquad \alpha(H) = 0.$$

Or $\mathrm{ad}\, H = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, (\alpha(H))_{\alpha\in\Sigma}) = 0$, donc

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{ad}\, H \circ \mathrm{ad}\, X = 0,$$

donc

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \qquad B(H, X) = 0,$$

donc $H \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ ce qui est impossible.

4. On va montrer la formule intermédiaire

$$\forall Y \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall Z \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, \qquad [Y, Z] = B_\mathfrak{g}(Y, Z)\check{\alpha}.$$

En effet, soit $X \in \mathfrak{h}$. On a $B(X, [Y, Z]) = B(Y, [Z, X])$. Or $[Z, X] = -[X, Z] = -(-\alpha(X)Z)$ car $Z \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, donc

$$B(X, [Y, Z]) = \alpha(X)B(Y, Z)$$

$$\begin{aligned} &= B(\check{\alpha}, X)B(Y, Z) \\ &= B(X, B(Y, Z)\check{\alpha}). \end{aligned}$$

Or $[Y, Z] \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Comme la forme $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non dégénérée, on obtient

$$[Y, Z] = B(Y, Z)\check{\alpha}.$$

Ceci montre que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathbf{C}\check{\alpha}$. Si on avait $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \{0\}$, alors on aurait

$$\forall X \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, \qquad B(Y, Z) = 0,$$

donc $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ pour $\beta \neq -\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$, donc $Y \perp \mathfrak{g}$ pour $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$, donc $Y = 0$ pour $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$, donc $\mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$ ce qui est impossible car la forme α est une racine. D'où

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbf{C}\check{\alpha}.$$

En particulier, on a $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$, donc $-\alpha \in \Sigma$.

Il reste à voir que $\alpha(\check{\alpha}) \neq 0$. Raisonnons par l'absurde. Avec ce qu'on vient de montrer, on peut écrire $\check{\alpha} = [X, Y]$ avec $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Comme $\check{\alpha} \neq 0$, il existe une forme $\beta \in \Sigma$ telle que $\beta(\check{\alpha}) \neq 0$ grâce au premier point. On va regarder la « α-chaîne à travers β »

$$E \coloneqq \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}.$$

Or $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(n+1)\alpha}$ et $[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(n-1)\alpha}$. On considère la sous-algèbre

$$A \coloneqq \operatorname{Vect}_{\mathbf{C}}(\check{\alpha}, X, Y).$$

Alors E est A-invariant à cause du dessin. Si $v \in E$ qu'on note $v = \sum_n v_{\beta+n\alpha}$, alors

$$\operatorname{ad}(\check{\alpha})v = \sum_n (\beta + n\alpha)(\check{\alpha})v_{\beta+n\alpha}.$$

Supposons que $\alpha(\check{\alpha}) = 0$. Alors $\operatorname{ad}(\check{\alpha})v = \beta(\check{\alpha})v$ pour tout $v \in E$, donc

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}\check{\alpha}) = (\dim E)\beta(\check{\alpha}) \neq 0.$$

Or

$$\operatorname{ad}\check{\alpha}|_E = [\operatorname{ad}X|_E, \operatorname{ad}Y|_E]$$

et la trace d'un commutateur est nulle ce qui est absurde.

2. On écrit $\check{\alpha} = [X, Y]$ avec $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\dim \mathfrak{g}_\alpha \geqslant 2$. Comme $Y^\perp$ est un hyperplan, il existe un élément $X_0 \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ orthogonal à l'élément Y, c'est-à-dire $B(X_0, Y) = 0$, donc

$$[X_0, Y] = B(X_0, Y)\check{\alpha} = 0.$$

On définit la suite

$$\begin{aligned} X_{-1} &= 0, \\ X_n &= [X, X_{n-1}] \quad \text{avec} \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Alors $X_n \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$. Comme $|\Sigma| < \infty$, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $X_n = 0$. Or on a la formule

$$[Y, X_n] = -\frac{n(n+1)}{2}\alpha(\check{\alpha})X_{n-1}.$$

En effet, on procède par récurrence. On a $[Y, X_0] = 0$ ce qui est bien la formule annoncée pour $n = 0$. On suppose la formule vraie rang n. On a

$$\begin{aligned} [Y, X_{n+1}] &= [Y, [X, X_n]] \\ &= -[X, [X_n, Y]] - [X_n, [Y, X]] \\ &= [X, [Y, X_n]] - [X_n, [Y, X]] \\ &= \left[X, -\frac{n(n+1)}{2}\alpha(\check{\alpha})X_{n-1}\right] + [X_n, \check{\alpha}] \quad \text{avec} \quad X_n \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha} \\ &= -\frac{n(n+1)}{2}\alpha(\check{\alpha})X_n - (n+1)\alpha(\check{\alpha})X_n \end{aligned}$$

$$= -\frac{n+1}{2}\alpha(\check{\alpha})X_n(n+2)$$

ce qui conclut la récurrence. D'après cette formule, si $X_n = 0$ avec $n \geqslant 1$, alors $X_{n-1} = 0$. Comme la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ finit par s'annuler, on en déduit $X_0 = 0$ ce qui est impossible. Finalement, on a montré $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. ◇

Définition 5.2. Pour une racine $\alpha \in \Sigma$, sa *coracine* est la forme

$$H_\alpha \coloneqq \frac{2\check{\alpha}}{\alpha(\check{\alpha})}$$

Lemme 5.3. La somme $A \coloneqq \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbf{C}H_\alpha$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$.

Démonstration. Comme $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbf{C}\hat{\alpha} = \mathbf{C}H_\alpha$, on peut trouver des éléments $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ vérifiant $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$. Alors

$$[H_\alpha, Y_\alpha] = 2X_\alpha \qquad \text{et} \qquad [H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha.$$

Ce sont les trois relations de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$. ◇

Lemme 5.4. Soient $\alpha \in \Sigma$ et $\beta \in \Sigma \cup \{0\}$ deux racines. Alors l'ensemble $\{k \in \mathbf{Z} \mid \beta + k\alpha \in \Sigma \cup \{0\}\}$ est un intervalle entier $[\![p, q]\!]$ et

$$-\frac{2\beta(\check{\alpha})}{\alpha(\check{\alpha})} = -\beta(H_\alpha) = p + q,$$

c'est-à-dire

$$p + q = -\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}.$$

Démonstration. Écrivons l'ensemble $\{k \in \mathbf{Z} \mid \beta + k\alpha \in \Sigma \cup \{0\}\}$ comme une union d'intervalles « bien disjoints » $\bigcup [\![p_i, q_i]\!]$ telle qu'il y ait un espace d'au moins 2 entre deux intervalles $[\![p_i, q_i]\!]$. Soit $[\![r, s]\!]$ un tel intervalle maximal. Soit $A \coloneqq \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbf{C}H_\alpha$ la copie de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ associée à α. Comme les bouts de termine par zéro, l'espace

$$V \coloneqq \bigoplus_{k=r}^{s} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$$

est A-invariant. Alors

$$\operatorname{ad} H_\alpha|_V = \operatorname{diag}((\beta + k\alpha)(H_\alpha))_{r\leqslant k\leqslant s}$$

sur V pour une base correspondante à la décomposition précédente, donc

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} H_\alpha|_V) &= \sum_{k=r}^{s} (\beta + k\alpha)(H_\alpha) \\ &= (s - r + 1)\beta(H_\alpha) + \Big(\sum_{k=r}^{s} k\Big)\alpha(H_\alpha).\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=r}^{s} k = \frac{s(s+1)}{2} - \frac{(r-1)r}{2} = \frac{1}{2}(s^2 + s - r^2 + r) = \frac{1}{2}(s+r)(s-r+1),$$

donc

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} H_\alpha|_V) = (s - r + 1)\left(\beta(H_\alpha) + \frac{\alpha(H_\alpha)}{2}(s+r)\right).$$

Or l'adjoint $\operatorname{ad} H_\alpha|_V$ est une commutateur car l'espace V est A-stable, donc sa trace est nulle. Comme $s - r + 1 \neq 0$, on en déduit que

$$\beta(H_\alpha) + \frac{\alpha(H_\alpha)}{2}(s+r) = 0.$$

Or $H_\alpha = 2\check{\alpha}/\alpha(\check{\alpha})$, donc $\alpha(H_\alpha) = 2$, donc $\beta(H_\alpha) = -(s+r)$.

S'il y avait un autre intervalle $[\![r', s']\!]$ avec par exemple $r' + s' > r + s$, alors ce serait impossible car le terme de gauche de la formule précédente ne bouge pas en changeant d'intervalle. ◇

Corollaire 5.5. Soit $V \coloneqq \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\{\check{\alpha} \mid \alpha \in \Sigma\}$. Alors

$$\dim_{\mathbf{R}} V = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{h} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h} = V + iV.$$

De plus, la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}^*}$ est réelle et définie positive sur V et $V = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$.

Démonstration. Tout d'abord, si $H, H' \in \mathfrak{h}$, alors dans une base adaptée à la décomposition $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$ on a

$$\operatorname{ad} H = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \{\alpha(H)\}_{\alpha \in \Sigma}) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ad} H' = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \{\alpha(H')\}_{\alpha \in \Sigma}),$$

donc

$$\operatorname{ad} H \circ \operatorname{ad} H' = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \{\alpha(H)\alpha(H')\}_{\alpha \in \Sigma}),$$

donc

$$B(H, H') = \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha(H)\alpha(H').$$

Soit $\alpha \in \Sigma$. Montrons que $\alpha(\check{\alpha}) = B(\check{\alpha}, \check{\alpha}) = \langle \alpha, \alpha \rangle$ est un réel positif non nul. Par la formule précédente, on trouve

$$B(\check{\alpha}, \check{\alpha}) = \sum_{\beta \in \Sigma} \beta(\check{\alpha})^2.$$

Or le lemme donne

$$\beta(\check{\alpha}) = -\frac{p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta}}{2} \alpha(\check{\alpha}),$$

c'est-à-dire

$$\langle \alpha, \beta \rangle = -\frac{p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta}}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle \tag{$*$}$$

où $[\![p_{\alpha,\beta}, q_{\alpha,\beta}]\!]$ est l'intervalle correspondant. Alors

$$B(\check{\alpha}, \check{\alpha}) = \langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{\beta \in \Sigma} \left(-\frac{p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta}}{2} \right)^2 \langle \alpha, \alpha \rangle^2.$$

Comme $\alpha(\check{\alpha}) = \langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$, on obtient

$$\frac{1}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sum_{\beta \in \Sigma} \left(\frac{p_{\alpha,\beta} + q_{\alpha,\beta}}{2} \right)^2 \in \frac{1}{4} \mathbf{N}^*,$$

donc $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$.

Ainsi la formule $(*)$ assure que $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{R}$, donc la formule bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ne prend que des valeurs réelles sur $\Sigma \times \Sigma$ et donc sur $V \times V$. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'elle est définie positive. Soit $\gamma \in V$. La quantité

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = B(\check{\gamma}, \check{\gamma}) = \sum_{\beta \in \Sigma} \beta(\check{\gamma})^2$$

est nulle si et seulement si $\gamma = 0$.

Il reste à montrer que $\mathfrak{h} = V \oplus iV$ et $\dim_{\mathbf{R}} V = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{h}$. Montrons que $V \cap iV = \{0\}$. Soit $X \in V \cap iV$. Comme $X, iX \in V$, on a $B(X, X) \geqslant 0$ et $-B(X, X) = B(iX, iX) \geqslant 0$, donc $B(X, X) = 0$, donc $X = 0$. Donc $\dim_{\mathbf{R}} V \leqslant \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{h}$. Comme il existe $\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{h}$ racines linéaires indépendantes, on obtient $\dim_{\mathbf{R}} V \geqslant \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{h}$. Ainsi on trouve $\dim_{\mathbf{R}} V = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{h}$ puis $\mathfrak{h} = V \oplus iV$. ◇

Exemple. On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{h} = \{\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0\}$. Alors $\Sigma = \{\lambda_i - \lambda_j\}_{i \neq j}$. Pour tous éléments $H, H' \in \mathfrak{g}$, on a alors

$$\begin{aligned} B(H, H') &= \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)(H)(\lambda_i - \lambda_j)(H') \\ &= 2 \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)(H)(\lambda_i - \lambda_j)(H'). \end{aligned}$$

Posons $X_1 \coloneqq \operatorname{diag} n - 1, -1, \dots, -1) \in \mathfrak{h}$. Alors

$$B(X_1, H) = 2 \sum_{j > 2} (\lambda_1 - \lambda_j)(X_1)(\lambda_1 - \lambda_j)(H)$$

$$\begin{aligned}
&= 2n \sum_{j\geqslant 2} \lambda_1 - \lambda_j)(H) \\
&= 2n(n-1)\lambda_1(H) - 2n \sum_{j\geqslant 2} \lambda_j(H) \\
&= 2n(n-1)\lambda_1(H) + 2n\lambda_1(H) \\
&= 2n^2\lambda_1(H),
\end{aligned}$$

donc

$$\lambda_1(H) = B\left(H, \frac{X_1}{2n^2}\right), \quad \text{donc} \quad \check{\lambda}_1 = \frac{X_1}{2n^2}.$$

Théorème 5.6. Pour toute racine $\alpha \in \Sigma$, on a $\mathbf{R}\alpha \cap \Sigma = \{\pm\alpha\}$.

Démonstration. L'inclusion $\supset$ est clair. Réciproquement, soit $\beta \in \mathbf{R}\alpha \cap \Sigma \setminus \{\alpha, -\alpha, 0\}$ une racine. On note $\beta = \lambda\alpha$. On sait que

$$p + q = -\frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

où l'intervalle $[\![p, q]\!]$ paramètre la α-chaîne à travers β, donc $p+q = -2\lambda$, donc on peut écrire $\lambda = n/2$ avec $n \in \mathbf{Z}$. Échangeant les rôles de α et β, on peut écrire $1/\lambda = k/2$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Alors $nk = 4$, donc $n \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, donc $\lambda \in \{\pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$. Or les cas $\lambda = \pm 1$ sont exclus car $\beta \neq \pm\alpha$. Quitter à changer les rôles de α et β, on suppose $\beta = 2\alpha$. On considère $A_\alpha \coloneqq \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)$ avec

- $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$;
- $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$;
- $[H_\alpha, Y_\alpha] - 2Y_\alpha$;
- $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{Vect}(X_\alpha)$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathrm{Vect}(Y_\alpha)$.

Alors $A_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. On regarde l'espace

$$V \coloneqq \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}.$$

Il est stable par A_α. Ceci ne peut pas se produire car les poids d'une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ doivent être symétrique par rapport à 0. ◇

Notons s_α la symétrie orthogonale de $E \coloneqq \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(\Sigma)$ par rapport à $\alpha^\perp$, c'est-à-dire

$$s_\alpha(v) = v - \frac{2\langle v, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Définition-proposition 5.7. Le *groupe de Weyl* est le groupe W engendré par les symétries s_α avec $\alpha \in \Sigma$. Il préserve le produit scalaire, il est fini et vérifie $W\Sigma = \Sigma$.

Démonstration. Montrons que $s_\alpha(\Sigma) = \Sigma$. Soit $\beta \in \Sigma$. On regarde la α-chaîne à travers β. Comme elle passe par β, on a $p \leqslant 0$ et $q \geqslant 0$. D'après le lemme précédent, on a

$$s_\alpha(\beta) = \beta + (p+q)\alpha$$

avec $p \leqslant p + q \leqslant q$, donc $s_\alpha(\beta)$ est dans la α-chaîne et ce n'est pas zéro car une symétrie est injectif, donc $s_\alpha(\beta) \in \Sigma$. D'où $s_\alpha(\Sigma) \subset \Sigma$. De plus, le morphisme $W \longrightarrow \mathfrak{S}(\Sigma)$ est injectif, donc le groupe W est fini. Enfin, il préserve le produit scalaire car les symétries s_α sont orthogonales. ◇

5.2. Systèmes de racines abstraits

Définition 5.8. Soit E un espace euclidien. Un *système de racines* sur E est une partie $\Sigma \subset E \setminus \{0\}$ telle que

- $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(\Sigma) = E$;
- pour tout $\alpha \in \Sigma$, on ait $\mathbf{R}\alpha \cap \Sigma = \{\pm\alpha\}$;
- pour tout $\alpha \in \Sigma$, la symétrie orthogonal s_α par rapport à $\alpha^\perp$ préserve Σ ;
- pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma$, le nombre $n_{\alpha,\beta} = 2\langle\beta, \alpha\rangle / \langle\alpha, \alpha\rangle$ est entier.

On dit que le couple (E, Σ) est un *système de racines réduit*. On dit que le système de racines est non réduit si on enlève le deuxième point.

Avec ce qu'on a vu, les racines d'une algèbre de Lie forment un système de racine. De même, on définit le groupe de Weyl $W \subset \mathrm{O}(E)$ comme le groupe engendré par les symétries s_α avec $\alpha \in \Sigma$.

Remarque. Pour deux systèmes de racines réduits (E, Σ_E) et (F, Σ_F), le couple $(E \oplus_\perp F, \Sigma_E \cap \Sigma_F)$ est encore un système de racines réduit.

Définition 5.9. Un système de racine est *irréductible* s'il ne s'écrit pas comme une somme directe orthogonale non triviale.

Lemme 5.10. Soient $\alpha, \beta \in \Sigma$ deux racines telles que $\alpha \neq \pm\beta$. Supposons que $\|\alpha\| \geqslant \|\beta\|$. Alors on est dans une des sept possibilités suivantes.

cas	$n_{\alpha,\beta}$	$n_{\beta,\alpha}$	$\angle(\alpha,\beta)$	$\|\alpha\|^2/\|\beta\|^2$
1	0	0	$\pi/2$	?
2	1	1	$\pi/3$	1
3	-1	-1	$2\pi/3$	1
4	1	2	$\pi/4$	2
5	-1	-2	$3\pi/4$	2
6	1	3	$\pi/6$	3
7	-1	-3	$5\pi/6$	3

Démonstration. Après calcul, on trouve $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 4\cos^2 \angle(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}$, donc $4\cos^2 \angle(\alpha, \beta) \in [\![0, 4]\!]$, donc

$$\cos^2 \angle(\alpha, \beta) \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}.$$

Le cas $\cos^2 \angle(\alpha, \beta)$ est exclus car $a \not\parallel \beta$. Comme $\|\alpha\|^2 \geqslant \|\beta\|^2$ par hypothèse, on en déduit que $|n_{\alpha,\beta}| \leqslant |n_{\beta,\alpha}|$ et les entiers $n_{\alpha,\beta}$ et $n_{\beta,\alpha}$ ont le même signe.

- Si $\cos^2 \angle = 0$, alors on est dans le premier cas.
- Si $\cos^2 \angle = 1/4$, alors $\angle \in \{\pi/3, 2\pi/3\}$ et $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 1$, donc on est dans les cas 2 et 3.
- Si $\cos^2 \angle = 1/2$, alors $\angle \in \{\pi/4, 3\pi/4\}$ et $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 2$, donc on est dans les cas 4 et 5.
- Si $\cos^2 \angle = 3/4$, alors $\angle \in \{\pi/6, 5\pi/6\}$ et $n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} = 3$, donc on est dans les cas 6 et 7. ◇

Lemme 5.11. Soient $\alpha, \beta \in \Sigma$ deux racines non colinéaires telles que l'angle $\angle(\alpha, \beta)$ soit aigu, c'est-à-dire $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. Alors le vecteur $\alpha - \beta$ est encore une racine.

Démonstration. Supposons d'abord que $\|\alpha\| \geqslant \|\beta\|$. D'après le lemme précédent, on a $n_{\alpha,\beta} = 1$, donc on peut écrire $s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = \beta - \alpha$, donc $\beta - \alpha \in \Sigma$. On a aussi $\alpha - \beta \in \Sigma$. L'autre cas donne la même chose. ◇

Définition 5.12. Le complémentaire de l'union $\bigcup_{\alpha \in \Sigma} \alpha^\perp$ a un nombre fini de composantes connexes qui sont des ouverts convexes, appelés *chambres de Weyl*.

Théorème 5.13.

1. Le groupe W agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl.
2. Fixons une chambre de Weyl K. Alors le groupe W est engendré par les symétries s_α où $\alpha^\perp$ est un mur de K, c'est-à-dire $\overline{K} \cap \alpha^\perp \neq \{0\}$.

Démonstration. Notons W' le groupe engendré par les symétries s_α où $\alpha^\perp$ est un mur de K. On veut déjà montrer qu'il agit transitivement sur les chambres. Soit L une autre chambre. Soient $x \in K$ et $y \in L$. On choisit $w \in W'$ qui minimise $\|w(y) - x\|$. Si $w(y) \notin K$, cela signifie que, pour aller de x et $w(y)$, il faut traverser un mur ce qui est absurde car $S_\alpha(w(y))$ est plus proche de x où $\alpha^\perp$ est un mur de K traversé. Donc $w(y) \in K$. D'où $wL = K$, donc W' agit transitivement sur les chambres.

Montrons que $s_\alpha \in W'$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ ce qui montrera $W = W'$. Or $\alpha^\perp$ est le mur d'une chambre L. Par transitive, il existe w tel que $wL = K$. Alors $w^{-1}s_\beta w = s_\alpha$ avec $\beta^\perp$ un mur de K, donc $s_\alpha \in W'$.

Montrons que, si $x, y \in K$ et $w = s_1 \cdots s_n$ avec s_i des réflexions par rapport à des murs de K tels que $x = wy$, alors $w = e$. On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ ne peut jamais arriver. On suppose que c'est vrai pour $n-1$. On écrit $x = wy$ avec $w = ss_1 \cdots s_{n-1}$ où s est une réflexion d'hyperplan H. Distinguons deux cas.

– Si K et wK sont de deux côtés différents de H, alors ceci est impossible car $K = wK$ et $wy = x \in K$.
– Donc $K = wK$ sont du même côté de H. Notons $w' := s_1 \cdots s_{n-1}K$. Il existe un plus petit entier $\ell \geqslant 1$ tel que $ss_1 \cdots s_\ell K$ est du même côté que K par rapport de H. Alors sK n'est pas du même côté. On pose $u := ss_1 \cdots s_{\ell-1}$. Alors uK et $us_\ell K$ ne sont pas du même côté de H, donc K et $s_\ell K$ ne sont pas du même côté de $u^{-1}H$, donc s_ℓ est la symétrie par rapport à $u^{-1}H$, donc $s_\ell = u^{-1}su$. Maintenant, on écrit
$$\begin{aligned} w &= us_\ell \cdots s_{n-1} \\ &= u(u^{-1}su)s_{\ell+1} \cdots s_{n-1} \\ &= ss s_1 \cdots s_{\ell-1}s_{\ell+1} \cdots s_{n-1} \\ &= s_1 \cdots s_{\ell-1}s_{\ell+1} \cdots s_{n-1}. \end{aligned}$$
On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence. ◇

Définition 5.14. Une *base* d'un système de racines réduit (E, Σ) est une partie $\Delta \subset \Sigma$ telle que

– elle soit une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E ;
– pour tout $\alpha \in \Sigma$, il existe une famille d'entiers $(n_\beta)_{\beta\in\Delta}$ de même signe tel que $\alpha = \sum_{\beta\in\Delta} n_\beta \beta$.

Si les entiers n_β sont positifs (resp. négatifs), on dit que la racine α est positive (resp. négative). On note Σ^+ et Σ^- les ensembles des racines positives et négatives.

Étant donnée une chambre de Weyl K, prenons $x_0 \in K$ et décrétons que $\Sigma^+ = \{\alpha \mid \langle \alpha, x_0\rangle > 0\}$ et $\Sigma^- = \{\alpha \mid \langle \alpha, x_0\rangle < 0\}$. Ces deux ensembles forment une partition puisque x_0 n'est pas sur un mer, donc $x_0 \notin \alpha^\perp$. On dit qu'une racine $\alpha \in \Sigma^+$ est *décomposable* si on peut l'écrire sous la forme $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \in \Sigma^+$. On note Δ les racines positives indécomposables, dites *simples*.

Théorème 5.15. L'application
$$\left| \begin{array}{ccc} \{\text{chambres de Weyl}\} & \longrightarrow & \{\text{bases de } \Sigma\}, \\ K & \longmapsto & \Delta \end{array} \right.$$
est bien définie et bijective. De plus, l'ensemble des racines α avec $\alpha^\perp$ est un mur de K est l'ensemble Δ.

Démonstration. Montrons que l'application est bien définie, c'est-à-dire que l'ensemble Δ obtenu est bien une base.

1. Montrons que $\Sigma^+ \subset \sum_{\beta\in\Delta} \mathbf{N}\beta$. Si ce n'est pas le cas, on regarde l'ensemble fini $A := \Sigma^+ \setminus \sum_{\beta\in\Delta} \mathbf{N}\beta$. On choisit un $\alpha \in A$ avec $\langle \alpha, x_0\rangle$ minimum > 0. Comme $\alpha \notin \Delta$, la racine α est décomposable qu'on écrit $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \in \Sigma^+$. En particulier, on obtient
$$\langle \alpha, x_0\rangle = \langle \beta, x_0\rangle + \langle \gamma, x_0\rangle,$$
donc $\langle \beta, x_0\rangle < \langle \alpha, x_0\rangle$ et $\langle \gamma, x_0\rangle < \langle \alpha, x_0\rangle$ et au moins un des deux β et γ n'appartient par à $\sum_{\delta\in\Delta} \mathbf{N}\delta$ ce qui contredit la définition de α.
2. Montrons que, si $\alpha, \beta \in \Delta$ avec $\alpha \neq \beta$, alors $\langle \alpha, \beta\rangle \leqslant 0$. Sinon $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$ sont racines d'après le lemme précédent. L'un des deux, disons $\alpha - \beta$, est positive. Alors $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ est décomposable ce qui est impossible.
3. Montrons que les éléments de Δ sont linéairement indépendants. Soit $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ une famille réelle telle que $\sum_{\alpha\in\Delta} \mu_\alpha \alpha = 0$. On pose $\Delta^+ := \{\alpha \in \Delta \mid \mu_\alpha \geqslant 0\}$ et $\Delta^- := \{\alpha \in \Delta \mid \mu_\alpha < 0\}$. Alors
$$\sum_{\alpha\in\Delta^+} \mu_\alpha \alpha = \sum_{\beta\in\Delta^-} -\mu_\beta \beta =: w.$$

On a

$$\langle w, w\rangle = \sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{\beta\in\Delta^-} -\mu_\alpha\mu_\beta\langle\alpha,\beta\rangle \leqslant 0,$$

donc $w = 0$, donc

$$\sum_{\beta\in\Delta^-} -\mu_\beta\langle\beta, x_0\rangle = \langle w, x_0\rangle = 0,$$

donc $\mu_\beta = 0$ pour tout $\beta \in \Delta^-$. De même pour les μ_α. Ainsi Δ est bien une base au sens des systèmes de racines.

Étant donnée une base Δ du système de racines, on pose $K(\Delta) \coloneqq \{x \in E \mid \forall\alpha \in \Delta, \langle\alpha, x\rangle > 0\}$. Si $\beta^\perp$ est un mur, alors $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha\alpha$ avec les n_α de même signe. On peut supposer qu'ils sont positifs. Alors pour tout $x \in K(\Delta)$, on a $\langle\beta, x\rangle > 0$, donc $K \cap \beta^\perp = \emptyset$, c'est bien une chambre et son bord est bien les $\alpha^\perp$ avec $\alpha \in \Delta$. Il s'avère que l'application $\Delta \longmapsto K(\Delta)$ est l'inverse. ◇

Corollaire 5.16. Soit Σ un système de racines.

- Alors le groupe de Weyl agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases de Σ.
- Si le système de racines est réduit, alors $W\Delta = \Sigma$.

Remarque. Une base est un ensemble et pas un uplet.

Démonstration. Le premier point est une simple reformulation du théorème. Pour le second, on trouver un hyperplan qui passe à côté de α et assez loi des autres racines sauf $-\alpha$. On peut trouver x_0 et l'hyperplan $H \coloneqq \operatorname{Ker}(\langle\cdot, x_0\rangle)$ et, quitte à prendre $-x_0$, on peut supposer que $\langle\alpha, x_0\rangle > 0$. Si on a bien fait les choses, avec $\Sigma^+ = \{\langle\beta, x_0\rangle > 0\}$, on obtient

$$\min\{\langle\beta, x_0\rangle \mid \beta \in \Sigma^+\} = \langle\alpha, x_0\rangle$$

ce qui fait de la racine α une racine indécomposable ce qui est impossible. ◇

En conclusion, étant donnée une algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{g}$, on choisit une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Cela nous donne un système de racines Σ et on choisit une base Δ de Σ. Pour remonter en arrière, on sait que $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\rangle$. Alors la base Δ détermine W et donc détermine $\Sigma = W\Delta$.

5.3. Données combinatoires associées à l'ensemble des racines simples

Étant donné un ordre sur l'ensemble Δ, la *matrice de Cartan* est la matrice $(n_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\Delta}$.

Remarque. On a vu que, pour deux racines simples distinctes α et β, l'angle $\angle(\alpha, \beta)$ est obtus, donc $n_{\alpha,\beta} \in \{0, -1, -2, -3\}$ et $n_{\alpha,\alpha} = 2$.

Exemple. En dimension 2, les seules matrices de Cartan sont

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il existe une autre façon d'encoder l'ensemble des racines simples, ce sont les diagrammes de Dynkin. C'est un graphe où les sommets, correspondant à chacune des racines simples, sont reliés par

1. 0 trait sur les deux racines sont orthogonales ;
2. 1 trait si l'angle entre les deux racines est $2\pi/3$;
3. 2 traits si l'angle entre les deux racines est $3\pi/4$;
4. 3 traits si l'angle entre les deux racines est $5\pi/6$

où l'on rajoute une flèche sur les traits si une racine est plus longue.

Exemple. On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre des matrices diagonales. Un système de racines est $\Sigma = \{\lambda_i - \lambda_j\}_{i \neq j}$. On fixe $H_0 \coloneqq \operatorname{diag}(2, 1, 0, -3)$ et on décrète que $\Sigma^+ = \{\alpha(H_0) > 0\}$. Alors $\Delta = \{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$ est une base avec $\alpha_i \coloneqq \lambda_i - \lambda_{i+1}$. On calcul

$$\angle(\alpha_1, \alpha_2) = 2\pi/3, \qquad \angle(\alpha_2, \alpha_3) = 2\pi/3 \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 \perp \alpha_3.$$

Remarque. Comme W agit transitivement sur les bases, le diagramme de Dynkin ne dépend pas du choix de la base. Par ailleurs, le diagramme est connexe si et seulement si le système de racines est irréductible.

Théorème 5.17 *(Killing, Cartan).* Les seuls diagrammes de Dynkin (irréductible) connexes sont du type A_n avec $n \geqslant 1$, B_n avec $n \geqslant 2$, C_n avec $n \geqslant 3$, D_n avec $n \geqslant 4$, G_2, F_4, E_6, E_7 ou E_8. De plus, tous ces diagrammes sont réalisées comme un système de racines d'une algèbre de Lie simple complexe.

Démonstration. On admet la forme de ces diagrammes. Donnons une idée de la preuve de la classification. On oublie les normes, on enlève les flèches. À une base Δ d'un système de racines, on associe $n = |\Delta|$ vecteurs unitaires e_i d'un espace euclidien qui sont les vecteurs $\alpha/\|\alpha\|$ avec $\alpha \in \Delta$. Les diagrammes sans les flèches reflète les relations d'angles entre ces vecteurs. On dit qu'un graphe est admissible s'il existe un espace euclidien et des vecteurs unitaires linéairement indépendants ayant les angles prescrits par le graphe. La classification découle du fait suivant : les seuls graphes connexes admissibles sont les neufs de la liste.

Lemme 5.18. Tout sous-graphe d'un graphe admissible obtenu en effaçant certains nœuds et les arêtes y menant est encore admissible.

Lemme 5.19. Dans un diagramme admissible à n sommets, il y a au plus $n-1$ liens entre sommets distincts.

Démonstration. On regarde $v = \sum_{i=1}^n e_i$. Comme les e_i sont linéairement indépendants, on a $v \neq 0$. On a $\langle e_i, e_j \rangle = \cos \angle(e_i, e_j) \in \{0, -1/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{3}/2\}$. Si e_i et e_j sont reliés, alors $2\langle e_i, e_j \rangle \leqslant -1$. On calcule

$$0 < \langle v, v \rangle = \sum_i \langle e_i, e_i \rangle + 2 \sum_{i<j} \langle e_i, e_j \rangle,$$

donc

$$0 < n + (-\text{nombre de paires } (e_i, e_j) \text{ non orthogonales}),$$

donc nombres de paires liées $< n$. ◇

Lemme 5.20. Il n'y a pas de cycle dans un graphe admissible.

Démonstration. Sinon on peut effacer les sommets en dehors du cycle. Par le lemme 1, le graphe reste admissible. Mais dans un cycle de longueur n, il y a n liens ce qui contredit le lemme 3. ◇

Lemme 5.21. Aucun sommet n'est attaché à plus de 3 lignes.

Démonstration. Notons e_1 le sommet en question. Élaguons en enlevant tous les sommets non reliés à e_1. Il nous reste e_1 et ses voisins e_2, …, e_k. Or $e_i \perp e_j$ pour $i \neq j$ et $i, j \geqslant 2$ car sinon on aurait un cycle de longueur 3. Regardons $H \coloneqq \operatorname{Vect}(e_2, \dots, e_k)$. Comme $e_1 \notin H$ par indépendance linéaire des e_i, on a $\|e_1\|^2 > \|\text{proj. orth. de } e_1 \text{ sur } H\|^2$, donc $1 > \|\sum_{i=2}^k \langle e_1, e_i \rangle e_i\|$, donc $1 > \sum_{i=2}^k \langle e_1, e_i \rangle^2$. Or $4\langle e_1, e_i \rangle^2 = 4\cos^2 \angle(e_1, e_i) =$ nombre de traits entre e_1 et e_i, donc $1 > \frac{1}{4} \sharp\{\text{lignes arrivant en } e_1\}$. ◇

Corollaire 5.22. Pour un diagramme admissible connexe, s'il y a un lien triple, c'est G_2.

Lemme 5.23. Si un diagramme admissible contient une « ligne simple » où seules les extrémités sont reliées à d'autres sommets, alors on peut fusionner la ligne en un seule sommet et le diagramme obtenu est encore admissible.

Démonstration. Posons $v \coloneqq \sum_{i=1}^k e_i$. Alors $\langle v, v\rangle = \sum_i \langle e_i, e_i\rangle - 2\sum_{i<j}\langle e_i, e_j\rangle = k-(k-1) = 1$, donc v est unitaire. Si on remplace les e_i par v, soit e_j un autre vecteur. Si e_j est relié à aucun e_1, …, e_k, alors $e_j \perp v$, donc il n'y a toujours pas de lien. Si e_j est relié à l'un d'eux, c'est soit e_1 soit e_k car il n'y a pas de cycle, donc $\langle e_j, v\rangle = \langle e_j, e_1\rangle$, donc le nombre de liens est le même. ◇

Corollaire 5.24. Il y a au plus un double lien dans un graphe admissible connexe.

Démonstration. Si on en avait deux, alors on en prend deux plus proche. On peut alors enlever des sommets pour n'avoir qu'une ligne simple entre les deux. On fusionne ensuite les lignes simples et on se retrouve avec un sommet avec 4 liens ce qui est impossible. ◇

Corollaire 5.25. Il y a au plus 1 sommet de valence 3.

Lemme 5.26. Les diagrammes suivants sont non admissibles.

Démonstration. Montrons-le pour le deuxième diagramme. On pose

$$u = \frac{2e_2+e_3}{\sqrt{3}}, \qquad v = \frac{2e_4+e_5}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad w = \frac{2e_6+e_7}{\sqrt{3}}.$$

Alors les vecteurs u, v et w sont orthogonaux et unitaires. Or $e_1 \notin \mathrm{Vect}(u,v,w)$ car $(e_1, \dots, e_7)$ est libre, donc

$$\begin{aligned} 1 = \|e_1\|^2 &> \|\text{proj. orth de } e_1 \text{ sur } \mathrm{Vect}(u,v,w)\|^2 \\ &> \langle e_1, u\rangle^2 + \langle e_1, u\rangle^2 + \langle e_1, u\rangle^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. ◇

Avec ces lemmes, on peut alors montrer le théorème (cf. dessins). ◇

Chapitre 6

Représentations d'algèbres de Lie semi-simples

6.1 Complète réductibilité 43
6.2 Poids et réseau des poids 43
6.3 Représentations irréductibles 45

6.1. Complète réductibilité

Définition 6.1. Une représentation $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ d'une algèbre de Lie est *complètement irréductible* s'il existe des sous-espaces π-stable V_i qui soient irréductibles tels que $V = \bigoplus V_i$.

Théorème 6.2 *(Weyl).* Toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple est complètement réductible.

Par exemple, partons d'une représentation de groupe $\rho\colon \mathrm{SL}(n, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ où V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Alors elle nous donne une représentation $d\rho\colon \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ et, en la complexifiant, une représentation $\tilde{d\rho}\colon \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Finalement, on trouve une représentation $\tilde{d\rho}_{\mathfrak{su}(n)}\colon \mathfrak{su}(n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Pour la suite, on admet le théorème suivante.

Théorème 6.3. Si $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbres de Lie associées à des groupes de Lie G et H. On suppose que le groupe G est simplement connexe. Alors φ est réalisée par un morphisme de groupes $G \longrightarrow H$.

Comme $\mathrm{SU}(n)$ est simplement connexe, il existe un morphisme $\Psi\colon \mathrm{SU}(n) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ tel que $d\Psi = d\tilde{\rho}|_{\mathfrak{su}(n)}$. Comme $\mathrm{SU}(n)$ est un groupe compact, il existe un produit hermitien invariant par V qui rend la représentation $\tilde{d\rho}$ unitaire. Si W est un espace ρ-invariant, alors il est $\tilde{d\rho}$-invariant, donc son orthogonal $W^\perp$ est $\tilde{d\rho}_{\mathfrak{su}(n)}$-invariant, donc il est $\tilde{d\rho}$-invariant, donc il est $d\rho$-invariant, donc il est ρ-invariant car $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ est connexe.

On effectue de même pour chaque algèbre de Lie semi-simple complexe : il existe un groupe compact simplement connexe dont le complexifié de l'algèbre de Lie est l'algèbre de Lie de départ.

6.2. Poids et réseau des poids

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan. Soit Σ une système de racines avec H_α les coracines. Soit Δ une base de Σ. On note $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}} \Sigma$.

Définition-proposition 6.4. Un élément $\chi \in E$ est un *poids entier* si, pour tout racine $\alpha \in \Delta$, le nombre $\chi(H_\alpha)$ est un entier. Le *poids fondamental* relativement à la base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est un élément de la base duale $(\chi_1, \dots, \chi_n)$ de la base $(H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n})$. L'ensemble des poids entiers est un réseau de E, c'est-à-dire un $\mathbf{Z}$-module libre de rang n qui engendre l'espace vectoriel E, dont une $\mathbf{Z}$-base est $(\chi_1, \dots, \chi_n)$. On le note Λ_{W} et on l'appelle le *réseau des poids*.

Démonstration. Soit $\chi \in E$ qu'on écrit $\chi = \sum_{\alpha\in\Delta} \lambda_\alpha \chi_\alpha$. Alors pour tout $\alpha \in \Delta$, on a $\lambda_\alpha = \chi(H_\alpha)$. Donc $\Lambda_{\mathrm{W}} = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbf{Z}\chi_\alpha$. ◇

Exemple. On prend $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$. Les racines sont les $\lambda_i - \lambda_j$ pour $i \neq j$ et une base est $\Delta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3\}$. Pour $H, H' \in \mathfrak{h}$, on a

$$B_{\mathfrak{g}}(H, H') = 2\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)(H)(\lambda_i - \lambda_j)(H').$$

On peut vérifier

$$\check{\lambda}_1 = \frac{1}{18}\,\mathrm{diag}(2, -1, -1) \qquad \text{et} \qquad \check{\lambda}_2 = \frac{1}{18}\,\mathrm{diag}(-1, 2, -1).$$

Pour $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, on a

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = B(\check{\lambda}_1 - \check{\lambda}_2, \check{\lambda}_1 - \check{\lambda}_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\check{\lambda}_1 - \check{\lambda}_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\left(\frac{1}{18}\,\mathrm{diag}(3, -3, 0)\right) = \frac{1}{3}.$$

On trouve

$$H_{\alpha_1} = \mathrm{diag}(1, -1, 0).$$

Avec $\alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3$, on trouve

$$H_{\alpha_2} = \mathrm{diag}(0, 1, -1).$$

La base duale de $(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2})$ est alors $(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$. Ainsi le réseau des points est

$$\Lambda_{\mathrm{W}} = \mathbf{Z}\lambda_1 \oplus \mathbf{Z}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Théorème 6.5. Soit $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie. Alors il existe une base de V qui diagonalise simultanément les éléments de $\mathfrak{h}$. Plus précisément, on peut écrire

$$V = \bigoplus_{\chi \in \Phi} V_\chi$$

avec

$$V_\chi \coloneqq \{v \in V \mid \forall H \in \mathfrak{h},\ \pi(H)v = \chi(H)v\}$$

et

$$\Phi \coloneqq \{\chi \in E \mid V_\chi \neq 0\} \subset \Lambda_{\mathrm{W}}.$$

On appelle $\dim V_\chi$ la multiplicité de χ.

Démonstration. Soit $\alpha \in \Delta$. On regarde l'algèbre $S_\alpha \coloneqq \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}\,(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. On regarde π restreinte à S_α. C'est une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, donc H_α est diagonalisable et ses valeurs propres sont entières. Comme $[\pi(H_\alpha), \pi(H_\beta)] = \pi([H_\alpha, H_\beta]) = 0$, les $\pi(H_\alpha)$ commutent deux à deux et sont diagonalisables, donc ils sont codiagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base qui diagonalise les $\pi(H_\alpha)$ avec $\alpha \in \Delta$. Or $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}\,(H_\alpha) = \mathfrak{h}$, donc les éléments de $\pi(\mathfrak{h})$ sont diagonaux dans cette base. On écrit

$$\pi(H) = \mathrm{diag}(\chi_1(H), \dots, \chi_p(H)), \qquad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

On vérifie que les fonctions χ_i sont linéaires. Or les valeurs propres de $\pi(H_\alpha)$ sont des entiers, donc $\chi(H_\alpha) \in \mathbf{Z}$ pour tout $\chi \in \Psi$, donc $\chi \in \Lambda_{\mathrm{W}}$. ◇

Le *diagramme des poids* est la représentation graphique de l'ensemble Ψ où les multiplicités sont notées.

Exemple. On considère la représentation standard $\rho\colon \mathrm{SL}(3, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{R}^3)$. Il y a 3 poids λ_1, λ_2 et λ_3. Les espaces de poids sont $\mathrm{Vect}\, e_1$, $\mathrm{Vect}\, e_2$ et $\mathrm{Vect}\, e_3$.

Exemple. On considère la représentation adjoint $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. On écrit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{avec} \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0.$$

Exemple. On considère la représentation duale de la représentation standard

$$\pi\colon \left| \begin{aligned} \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C}) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbf{C}^3), \\ X &\longmapsto -{}^{\mathrm{t}}X. \end{aligned} \right.$$

Alors $\Phi = \{-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3\}$.

Proposition 6.6 *(calcul fondamental).* Soit $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de dimension finie. Soient $\alpha \in \Sigma$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$. Soit $\chi \in \Phi$. Alors $\pi(X)V_\chi \subset V_{\chi+\alpha}$.

Démonstration. Soit $v \in V_\chi$ et $H \in \mathfrak{h}$. Alors

$$\begin{aligned}\pi(H)\pi(X)v &= (\pi(H)\pi(X) - \pi(X)\pi(H) + \pi(X)\pi(H))V \\ &= (\pi([H,X]) - \pi(X)\pi(H))v \\ &= \pi(\alpha(H)X) + \pi(X)\chi(H)v \\ &= (\alpha+\chi)(H)(\pi(H)v),\end{aligned}$$

donc $\pi(X)v \in V_{\chi+\alpha}$. ◇

Attention, contrairement aux systèmes de racines, les poids Φ de la représentation ρ ne sont pas symétrique par rapport à 0.

Théorème 6.7. Les poids et leurs multiplicités sont invariants par le groupe de Weyl.

Démonstration. Pour $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$, le théorème est vrai pour les représentations irréductibles et donc aussi vraie pour des sommes directes.

Pour une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$, il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in \Sigma$, on a $s_\alpha\Phi \subset \Phi$. Soit $\chi \in \Phi$. On a la sous-algèbre $M_\alpha \coloneqq \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$. On regarde la α-chaîne à travers χ

$$V_0 \coloneqq \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} V_{\chi+k\alpha}$$

qui est stable par M_α grâce à la proposition précédente. Les poids de cette représentations sont

$$(\chi+k\alpha)(H_\alpha) = \frac{2\langle \chi+k\alpha, \alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}.$$

Ce sont des entiers symétriques par rapport à 0. La symétrie s_α correspond à $x \longmapsto -x$ sur la ligne parallèle à α passant par χ. ◇

6.3. Représentations irréductibles

Définition 6.8.
1. Soient χ et χ' deux points entiers. On écrit $\chi \leqslant \chi'$ si $\chi' - \chi = \sum_{\alpha\in\Delta} \lambda_\alpha \alpha$ avec $\lambda_\alpha \geqslant 0$.
2. Le représentation π a *un plus haut poids* s'il existe $\chi_0 \in \Phi$ telle que
   - pour tout $\chi \in \Phi$, on ait $\chi \leqslant \chi_0$;
   - il existe un vecteur $v \in V_{\chi_0} \setminus \{0\}$ tel que la représentation V soit la plus petite sous-représentation contenant le vecteur v.

Définition-proposition 6.9. Soient $\chi_0 \in \Phi$ et $v \in V_{\chi_0} \setminus \{0\}$. On suppose que

$$v \in \bigcap_{\alpha\in\Sigma^+} \operatorname{Ker} \pi(X_\alpha) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(X_\alpha).$$

On note V_0 le plus petit sous-espace π-invariant contenant v. Alors $\pi|_{V_0}$ est une représentation irréductible de plus haut poids χ_0 et les poids de cette représentation sont de la forme

$$\chi_0 - \sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha \alpha \quad \text{avec} \quad m_\alpha \in \mathbf{N}.$$

Si χ_0 est maximal, alors $\chi_0 + \alpha$ n'est pas un poids pour tout $\alpha \in \Sigma^+$.

Exemple. On fait agir $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ sur $\mathbf{R}^3 \oplus (\mathbf{R}^3)^*$.

Lemme 6.10. Soit $\pi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation. Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Alors toute combinaison linéaire de compositions du type

$$\pi(Z_1)\circ\cdots\circ\pi(Z_k) \quad \text{avec} \quad Z_i \in \mathfrak{g}$$

est une combinaison linéaire d'opérateurs de la forme

$$\pi(X_1)^{m_1} \circ \cdots \circ \pi(X_n)^{m_n} \quad \text{avec} \quad m_i \in \mathbf{N}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 1$, un élément $Z_1 \in \mathfrak{g}$ s'écrit $Z_1 = \sum \lambda_i X_i$ et alors $\pi(Z_1)$ est une combinaison linéaire des $\pi(X_i)$. On suppose le résultat établi pour des compositions de longueurs $< k$. Chaque Z_i s'écrit $\sum \lambda_{i,j} X_j$. Par multilinéaire, le terme

$$\pi(Z_1) \circ \cdots \circ \pi(Z_k)$$

est une combinaison linéaires de compositions de la forme

$$\pi(X_{i_1}) \circ \cdots \circ \pi(X_{i_k}), \qquad i_j \in [\![1, n]\!].$$

Mais comme $\pi([X_i, X_j]) = \pi(X_i) \circ \pi(X_j) - \pi(X_j) \circ \pi(X_i)$, on peut réarranger ces derniers termes. ◇

Démonstration de la définition-proposition. On a

$$V_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}} \{\pi(Z_1) \oplus \cdots \oplus \pi(Z_k) v \mid Z_i \in \mathfrak{g}\}.$$

On choisit, pour tout $\alpha \in \Sigma^+$, des éléments $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ et $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. On prend une base $(H_1, \dots, H_n)$ de $\mathfrak{h}$. On note $\Sigma^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$. On prend la base de $\mathfrak{g}$

$$(Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_p}, X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_p}, H_1, \dots, H_n).$$

D'après le lemme, on a

$$V_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}} \{\pi(Y_{\alpha_1})^{m_1} \circ \cdots \circ \pi(Y_{\alpha_p})^{m_p} \circ \pi(X_{\alpha_1})^{n_1} \circ \dots \pi(X_{\alpha_p})^{n_p} \circ \pi(H_1) \circ \cdots \circ \pi(H_n)^{q_n} v \mid m_i, n_i, q_i \in \mathbf{N}\}.$$

Or $v \in \bigcap_{\alpha \in \Sigma^+} \operatorname{Ker} \pi(X_\alpha)$, donc si $n_p \neq 0$, ca fait 0. On peut donc supposer $n_1 = \cdots = n_p$. Donc

$$V_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}} \{\pi(Y_{\alpha_1})^{m_1} \circ \cdots \circ \pi(Y_{\alpha_p})^{m_p} v \mid m_i \in \mathbf{N}\} \subset \bigoplus_{m_\alpha} V_{\chi_0 - \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha}.$$

Comme $\Sigma^+ \subset \sum_{\beta \in \Delta} \mathbf{N}\beta$, on obtient

$$V_0 \subset \bigoplus_{m_\beta} V_{\chi_0 - \sum_{\beta \in \Delta} m_\beta \beta} \quad \text{avec} \quad \chi_0 - \sum_{\beta \in \Delta} m_\beta \beta \leqslant \chi_0.$$

Par construction, V_0 est le plus petit espace π-invariant contenant v, donc $\pi|_{V_0}$ est une représentation de plus haut poids. Il reste à montrer qu'elle est irréductible. Sinon le théorème de Weyl fournirait $V_0 = V_1 \oplus V_2$ pour deux sous-espaces invariants V_1 et V_2. Remarquons que $(V_0)_{\chi_0} = \mathbf{C}v$. On peut décomposer chaque V_i en espace de poids

$$V_i = \bigoplus_{\chi \in \Phi_{V_1}} (V_1)_\chi.$$

On a $\Phi_{V_0} = \Phi_{V_1} \cup \Phi_{V_2}$. Alors $\chi_0 \in \Phi_{V_1}$ ou $\chi_0 \in \Phi_{V_2}$, donc $v \in V_1$ ou $v \in V_2$ car $(V_0)_{\chi_0}$ est de dimension 1. Or V_0 est le plus petit espace π-invariant contenant v ce qui est impossible. ◇

Corollaire 6.11. Toute représentation irréductible est une représentation de plus haut poids et réciproquement.

Démonstration. Si π est irréductible, on choisit $\chi_0 \in \Phi_V$ maximal, $v \in V_{\chi_0}$ et on applique la proposition. Par irréductibilité, le V_0 construit est V. ◇

Définition-proposition 6.12. Un élément $\chi_0 \in \Lambda_{\mathrm{W}}$ est *dominant* si les conditions équivalents suivants sont vérifiées :

1. χ_0 appartient à la chambre de Weyl fermée $\overline{\mathscr{C}} := \{\lambda \in E \mid \forall \alpha \in \Delta,\ \langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0\}$;
2. si ω_1, …, ω_n sont les poids fondamentaux, alors $\chi_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ avec $\lambda_i \in \mathbf{N}$.

Démonstration. En notant $\chi_0 = \sum \lambda_i \omega_i$, il suffit de remarquer que

$$\frac{2\langle \chi_0, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \chi_0(H_{\alpha_i}) = \lambda_i. \qquad ◇$$

Lemme 6.13. Le plus haut poids d'une représentation irréductible est dominant.

Démonstration. Soit χ_0 le plus haut poids. Soit $\alpha \in \Delta$. On veut montrer que $\langle \chi_0, \alpha \rangle \geqslant 0$. Or les poids sont invariants par le groupe de Weyl. En particulier, on a $s_\alpha(\chi_0) \leqslant \chi_0$, c'est-à-dire

$$\chi_0 - \frac{2\langle \chi_0, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \leqslant \chi_0,$$

donc $\langle \chi_0, \alpha \rangle \geqslant 0$. ◇

Proposition 6.14. Deux représentations irréductibles de même plus haut poids sont isomorphes.

Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme 6.15 *(Schur).*
1. Si V_1 et V_2 sont des représentations irréductibles d'un groupe ou d'une algèbre de Lie complexe et $\phi\colon V_1 \longrightarrow V_2$ un entrelacement, alors $\phi = 0$ ou ϕ est un isomorphisme.
2. Si V_1 et V_2 sont des représentations irréductibles d'un groupe ou d'une algèbre de Lie complexe et $\phi_1, \phi_2\colon V_1 \longrightarrow V_2$ deux entrelacements avec $\phi_1 \neq 0$, alors $\phi_2 = \lambda\phi_1$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$.
3. Si V est une représentation irréductible d'un groupe ou d'une algèbre de Lie et $\phi\colon V \longrightarrow V$ un entrelacement, alors $\phi = \lambda \operatorname{Id}_V$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$.

Démonstration de la proposition. Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations irréductibles de plus haut poids χ_0. On choisit $v_1 \in (V_1)_{\chi_0}$ et $v_2 \in (V_2)_{\chi_0}$ non nuls. On prend $v := (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$. Il est de poids χ_0 qui est un poids maximal pour la représentation $V_1 \oplus V_2$. On applique la proposition clef à χ_0 et v. On obtient $V_0 \subset V_1 \oplus V_2$ tel que $\pi_1 \oplus \pi_2|_{V_0}$ soit irréductible. On considère les projections $p_i\colon V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_i$. Alors $p_1|_{V_0}$ et $p_2|_{V_0}$ nne sont pas nuls car $p_i(v) = v_i \neq 0$. Ce sont des entrelacements entre des représentations irréductibles. Par le lemme de Schur, ce sont des isomorphismes, c'est-à-dire $V_1 \simeq V_0 \simeq V_2$. ◇

Théorème 6.16 *(classification des représentations irréductibles).* Soit $\chi_0 \in \Lambda_{\mathrm{W}} \cap \overline{\mathscr{C}}$ un poids entier dominant. Alors il existe une unique représentation à isomorphisme près qui soit irréductible et de plus haut poids χ_0.

Démonstration. L'unicité a déjà été vue. Pour l'existence, montrons qu'il suffit de montrer que c'est vrai pour les poids fondamentaux. Supposons qu'on dispose de $n = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$ représentations (π_1, V_1), …, (π_n, V_n), dites représentations fondamentales, de plus haut poids les poids fondamentaux ω_1, …, ω_n. Soit χ_0 un entier dominant. On l'écrit $\chi_0 = \sum_{i=1}^n m_i\omega_i$ avec $m_i \in \mathbf{N}$.

Remarquons que $\pi_1 \otimes \pi_2$ a pour poids les sommes $\Phi_{V_1} + \Phi_{V_2}$. En effet, soit $(e_1^1, \dots, e_k^1)$ une base de diagonalisable de $\mathfrak{h}$ pour V_1 et $(e_1^2, \dots, e_p^2)$ la même pour V_2. Alors pour tout $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$\pi_1(H)e_i^1 = \chi_i^1(H)e_i^1 \qquad \text{et} \qquad \pi_2(H)e_j^2 = \chi_j^2(H)e_j^2,$$

donc

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(H)(e_i^1 \otimes e_j^2) = (\chi_i^1 + \chi_j^2)(H)e_i^1 \otimes e_j^2.$$

Les poids de $\pi_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \pi_n^{\otimes m_n}$ sont les sommes de m_1 poids de π_1, …, m_n poids de π_n. Donc le plus haut poids de cette représentation est $\sum m_i\omega_i$ avec ω_i le plus haut poids de π. On peut appliquer la proposition clef et le produit tensoriel contient donc une représentation irréductible de plus haut poids χ_0. Donc il suffit de construire les représentations fondamentales. ◇

Théorème 6.17 *(admis).* Les poids d'une représentation irréductible de plus haut poids χ_0 sont précisément les poids $\chi \in \Lambda_{\mathrm{W}}$ tels que

$$\chi \in \operatorname{Conv}(W\chi_0) \qquad \text{et} \qquad \chi - \chi_0 \in \Lambda_\Sigma := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{Z}\alpha.$$

Le réseau Λ_Σ engendré par les racines est, en général, d'indice fini dans Λ_{W}.

Chapitre 7
Groupes de Lie et exponentielle

7.1 Motivations 49
7.2 Formule de Baker-Campbell-Haussdorff 49
7.3 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie 51
7.4 Revêtements et groupes de Lie 52
7.5 Sous-groupes avec algèbre de Lie prescrite 53

7.1. Motivations

Théorème 7.1. Soient G et H deux groupes de Lie linéaires et $\varphi\colon G \longrightarrow H$ un morphisme continu. Alors il est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa différentielle $d\varphi$ en l'identité vérifie

$$\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

On peut se poser la question de la réciproque. Étant donné un morphisme $\Psi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, se réalise-t-il comme la différentielle d'un morphisme de groupes $G \longrightarrow H$? La réponse est négative. Considérons le morphisme d'algèbres

$$\Psi\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \\ t \longmapsto t. \end{array} \right.$$

Alors il n'existe pas de morphisme non trivial continu $\Psi\colon \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$. Son image est un sous-groupe compact de $\mathbf{R}$.

Théorème 7.2. Soient G un groupe de Lie simplement connexe et H un autre groupe de Lie. Soit $\delta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme. Alors il existe un unique morphisme $\alpha\colon G \longrightarrow H$ tel que $\delta = d\alpha$.

Une autre question à la suivante : si G est un groupe linéaire et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre, existe-t-il un sous-groupe $H \subset G$ dont l'algèbre est $\mathfrak{h}$. La réponse est non. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{R}^2$ qui est associée au groupe $G = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. On prend la sous-algèbre $\mathfrak{h} := \operatorname{Vect}((1, \sqrt{2}))$.

7.2. Formule de Baker-Campbell-Haussdorff

Théorème 7.3. Soit G un groupe de Lie linéaire. Alors il existe un voisinage $V \subset \mathfrak{g}$ de zéro tel que, pour tous éléments $X, Y \in V$, l'élément $\log(e^X e^Y)$ est bien défini et

$$\log(e^X e^Y) = X + \sum_{\substack{k,n>0 \\ (p_i,q_i)\in\mathbf{N}^2 \\ p_i+q_i>0}} \frac{(-1)^k}{(k+1)(q_1+\dots+q_k+1)} \frac{(\operatorname{ad} X)^{p_1}(\operatorname{ad} Y)^{q_1}\cdots(\operatorname{ad} X)^{p_k}(\operatorname{ad} Y)^{q_k}(\operatorname{ad} X)^n Y}{p_1!q_1!\cdots p_k!q_k!n!}.$$

Lemme 7.4. On pose $\Phi(z) = (1-e^{-z})/z$ et $\psi(z) = z\log z/(z-1)$. Alors pour tout nombre $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < \log 2$, on a $\psi(e^z)\Psi(z) = 1$.

Cette formule reste vraie quand on remplace z par un endomorphisme de $\mathbf{C}^d$ de petite norme.

Lemme 7.5. Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On définit l'application

$$\lambda \colon \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \\ Y & \longmapsto & e^X Y. \end{array} \right.$$

Alors

$$d\exp(X) = \lambda \circ \Phi(\operatorname{ad} X).$$

Démonstration. Pour $t, s \in \mathbf{R}$, on pose

$$\gamma(t,s) \coloneqq \exp(-s(X+tY)) \frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))].$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial s} &= \exp(-s(X+tY))[-(X+tY)] \frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))] \\ &\qquad + \exp(-s(X+tY)) \frac{\partial}{\partial t}[(X+tY)\exp(s(X+tY))] \\ &= \exp(-s(X+tY))[-(X+tY)] \frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))] \\ &\qquad + \exp(-s(X+tY)) \left[Y \exp(s(X+tY)) + (X+tY) \frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))] \right] \\ &= \exp(-s(X+tY)) Y \exp(s(X+tY)) \\ &= \operatorname{Ad}(\exp(-s(X+tY)))Y \\ &= \exp(-s \operatorname{ad}(X+tY))Y. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} &\gamma(t,1) = \exp(-(X+tY))\, d\exp(X)(Y), \\ &\gamma(t,0) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\exp(-(X+tY))\, d\exp(X)(Y) = \int_0^1 \exp(-s \operatorname{ad}(X+tY)) y \, \mathrm{d}s.$$

On prend $t = 0$ et on obtient

$$\begin{aligned} \exp(-X)\, d\exp(X)(Y) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-s)^k (\operatorname{ad} X)^k}{k!} y \, \mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k s^{k+1}}{(k+1)!} (\operatorname{ad} x)^k (Y) \\ &= \Phi(\operatorname{ad} X)(Y). \end{aligned}$$

◇

Proposition 7.6. Pour X, Y assez petits, on a

$$\log(e^X e^Y) = x + \int_0^1 \Psi(e^{\operatorname{ad} X} e^{t \operatorname{ad} Y}) Y \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. On pose $F(t) = \log(e^X e^{tY})$. Calculons sa dérivée. On pose $U(t) = e^X e^{tY} = e^{F(t)}$. Alors

$$U'(t) = e^X e^{tY} Y = e^{F(t)} Y.$$

Par ailleurs, on a

$$U'(t) = d\exp(F(t))(F'(t)) = e^{F(t)} \Phi(\operatorname{ad} F(t)) F'(t).$$

Or pour Z assez petit, on a $\psi(e^Z) = \Phi(Z)^{-1}$. On obtient alors

$$F'(t) = \psi(e^{\operatorname{ad} F(t)}) Y = \psi(\operatorname{Ad}(e^{F(t)})) Y.$$

On trouve alors

$$\log(e^X e^Y) = F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t) \, \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= X + \int_0^1 \psi(\mathrm{Ad}(e^{F(t)}))Y \,\mathrm{d}t \\
&= x + \int_0^1 \Psi(e^{\mathrm{ad}\, X} e^{t\,\mathrm{ad}\, Y})Y \,\mathrm{d}t. \qquad \diamond
\end{aligned}
$$

Pour obtenir la formule de Baker-Campbell-Haussdorff, on développe la fonction ψ en série entière puis on intègre.

7.3. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie

Montrons le théorème 8.2. On procède en quatre étapes.

Étape 1. Montrons qu'il existe un voisinage $U \subset G$ de l'élément neutre et un morphisme local $\alpha\colon U \longrightarrow H$ de dérivé δ. On considère des petits voisinages de e_G et e_H et $O_{\mathfrak{g}}$ et $O_{\mathfrak{h}}$ tel que $\exp_{\mathfrak{g}}$, $\log_G$, $\exp_{\mathfrak{h}}$ et $\log_H$ soit des difféomorphismes locaux. On définit $\alpha(A) = \exp_{\mathfrak{h}}(\delta(\log_G A))$ sur un petit voisinage de e_G. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'un voisinage de e_G sur un voisinage de e_H. On restreint encore les voisinages de manière à s'assurer que la formule de Bell-Campbell-Haussdorff soit vraie pour les éléments de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. On note $A = e^a$ et $B = e^b$ avec $a, b \in \mathfrak{g}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\alpha(A)\alpha(B) &= \exp_{\mathfrak{h}}(\delta(a)) \exp_{\mathfrak{h}}(\delta(b)) \\
&= \exp_{\mathfrak{h}}\Big(\delta(a) + \sum_{n,k,p_i,q_i} c_{n,k,p_i,q_i} (\mathrm{ad}\,\delta(a))^{p_1} \cdots (\mathrm{ad}\,\delta(a))^n \delta(b)\Big).
\end{aligned}
$$

Or $\mathrm{ad}(\delta(u))(\delta(v)) = [\delta(u), \delta(v)] = \delta([u,v])$, donc

$$
\begin{aligned}
\alpha(A)\alpha(B) &= \exp_{\mathfrak{h}}\Big(\delta\Big(a + \sum_{n,k,p_i,q_i} c_{n,k,p_i,q_i} (\mathrm{ad}\, a)^{p_1} \cdots (\mathrm{ad}\, a)^n b\Big)\Big) \\
&= \exp_{\mathfrak{g}}(\delta(\log(e^a e^b))) \\
&= \alpha(AB).
\end{aligned}
$$

Étape 2. Soient $g \in G$ et $\gamma[0,1] \longrightarrow G$ un lacet continu entre e_G et g. On va définir une valeur par $\alpha_\gamma(g)$ qui va dépendre du lacet γ. On se donne une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ tel que

$$\gamma(t_i)^{-1}\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U$$

pour le voisinage U de l'étape 1. On pose

$$\alpha_\gamma(g) \coloneqq \alpha(\gamma(t_0)^{-1})\gamma(t_1)) \cdots \alpha(\gamma(t_{k-1})^{-1}\gamma(t_k)).$$

Ça dépend *a priori* de la subdivision.

Montrons que c'est invariant si on raffine la partition. Rajoutons un temps $s \in]t_p, t_{p+1}[$. Alors

$$
\begin{aligned}
\alpha(\gamma(t_p)^{-1}\gamma(t_{p+1})) &= \alpha(\gamma(t_p)^{-1}\gamma(s)\gamma(s)^{-1}\gamma(t_{p+1})) \\
&= \alpha(\gamma(t_p)^{-1}\gamma(s))\alpha(\gamma(s)^{-1}\gamma(t_{p+1})).
\end{aligned}
$$

Ainsi le résultat ne change pas si on intercale un temps en plus.

Remarquons maintenant que, si on a deux subdivisions, on peut construire une subdivision qui raffine les deux. Cela conclut : la quantité $\alpha_\gamma(g)$ ne dépend que du chemin choisi γ.

Étape 3. On suppose que G est simplement connexe. Montrons que la valeur $\alpha_\gamma(g)$ ne dépend pas de γ. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins reliant e_G à g. Soit γ une homotopie à extrémités fixées entre ces deux derniers. On peut trouver un quadrillage rectangulaire (t_i) et (z_j) de sorte que

$$\gamma(t_i, s_j)^{-1}\gamma([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset U^{1/4}.$$

On note

$$\sigma_{i,j} \coloneqq \alpha(\gamma(t, s_j)^{-1}\gamma(t_{i+1}, s_j)) \qquad \text{et} \qquad \tau_{i,j} \coloneqq \alpha(\gamma(t, s_j)^{-1}\gamma(t_i, s_{j+1}))$$

et on a $\tau_{i,j}\sigma_{i,j+1} = \sigma_{i,j}\tau_{i+1,j}$. Ceci permet de conclure.

Étape 4. On a donc défini une application $\alpha\colon G \longrightarrow H$. Montrons que c'est un morphisme de groupes. Soient $g, g' \in G$ deux éléments. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins reliant e à g (resp. g'). Alors $g(\gamma')$ est un chemin de g à gg'. On trouve alors $\alpha(g)\alpha(g') = \alpha(gg')$.

Corollaire 7.7. Si deux groupes de Lie G et H sont simplement connexes dont les algèbres de Lie sont isomorphes, alors ils sont isomorphes.

Démonstration. Soit $\delta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un isomorphisme. On peut écrire $d\alpha = \delta$ et $d\beta = \delta^{-1}$. Alors on trouve $d(\beta \circ \alpha) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ et l'unicité donne alors $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_G$. De même, on trouve $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_H$. ◇

Corollaire 7.8. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie qu'on peut écrire sous la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Soit G un groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors il existe deux sous-groupes fermés simplement connexe $H_1, H_2 \subset G$ dont les algèbres de Lie sont $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ et tels que $G \simeq H_1 \times H_2$.

Démonstration. On regarde les projections $p_i\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}_i \subset H$. Ce sont des morphismes d'algèbres de Lie. Il existe ainsi deux morphismes de groupes $\Phi_i\colon G \longrightarrow G$ tel que $p_i = d\Phi_i$. Posons $H_i := (\operatorname{Ker}\Phi_i)^\circ$. Ce sont des sous-groupes fermés d'algèbres de Lie $\operatorname{Ker} p_i = \mathfrak{h}_i$. Regardons

$$d(\Phi_1|_{H_1}) = (dp_1)|_{H_1} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}_1}$$

qui coïncide avec la différentielle du morphisme Id_{H_1}, donc $\Phi_1|_{H_1} = \mathrm{Id}_{H_1}$.

Montrons que $\operatorname{Im}\Phi_1 \subset H_1$. Le morphisme $p_1\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}_1$ provient d'un morphisme de groupes de Lie $G \longrightarrow H_1$, c'est donc Φ_1 qui est à valeurs dans H_1.

Vérifions que le sous-groupes H_i sont simplement connexes. Soit γ un lacet de H_1 reliant e à e. Montrons que ce lacet est homotope au lacet constant. En tant que lacet de G, il est homotope au lacet constant. On note α une homotopie dans G. Regardons $\beta(t,s) := \Phi_1(\alpha(t,s))$. Alors c'est une homotopie dans H. Ainsi le sous-groupe H_1 est simplement connexe. De même pour H_2.

Considérons les applications

$$u\colon \left| \begin{array}{l} H_1 \times H_2 \longrightarrow G, \\ \quad (x,y) \longmapsto xy \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad v\colon \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow H_1 \times H_2, \\ g \longmapsto (\Phi_1(g), \Phi_2(g)). \end{array} \right.$$

Alors les composées $u \circ v$ et $v \circ u$ ont pour différentielles Id_G et $\mathrm{Id}_{H_1 \times H_2}$. Ce sont donc les applications Id_G et $\mathrm{Id}_{H_1 \times H_2}$. ◇

7.4. Revêtements et groupes de Lie

Théorème 7.9. Soient G un groupe de Lie connexe te $q\colon \tilde{G} \longrightarrow G$ un revêtement universel. Alors il existe une structure de groupe de Lie sur le groupe $\tilde{G}$ tel que l'application q soit un morphisme.

Remarque. La donnée d'une structure de groupe sur l'ensemble $\tilde{G}$ correspond à choisir un neutre $e_{\tilde{G}} \in q^{-1}(e_G)$.

Théorème 7.10. Soient G un groupe de Lie connexe te $q\colon \tilde{G} \longrightarrow G$ un revêtement universel. Alors le noyau $\operatorname{Ker} q \simeq \pi_1(G)$ est discret et central. De même, il existe un isomorphisme $G \simeq \tilde{G}/\operatorname{Ker} q$.

Remarque. Le noyau $\operatorname{Ker} q$ est discret car c'est un revêtement et il est distingué car c'est un noyau.

Lemme 7.11. Un sous-groupe discret distingué d'un groupe connexe est central.

Démonstration. Soit $N \subset G$ un sous-groupe distingué discret. Soit $n \in N$. L'application

$$g \in G \longmapsto gng^{-1} \in N$$

est continue à valeurs dans un espace discret. Comme le groupe G est connexe, elle est constante et vaut $ene^{-1} = n$. Ainsi l'élément n appartient au centre du groupe G. ◇

Théorème 7.12. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors il existe un unique, à isomorphisme près, groupe de Lie simplement connexe $\tilde{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. De plus, il existe une bijection entre les classes d'isomorphismes de groupes connexes ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et les orbites sous $\operatorname{Aut}(\tilde{G})$ de l'ensemble des sous-groupes discrets centraux de $\tilde{G}$.

Exemple. On considère l'algèbre de Lie abélienne $\mathbf{R}^n$. Alors un groupe de Lie simplement connexe qui a cette algèbre de Lie est le groupe additif $\mathbf{R}^n$. Ici on a $\mathrm{Aut}(\mathbf{R}^n) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ et les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$ sont isomorphes à des groupes $\mathbf{Z}^k$. Ainsi les groupes de Lie abélien connexe sont les groupes $\mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$.

Exemple *(décomposition d'Iwasawa).* On considère le groupe $G \coloneqq \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ et ses sous-groupes

$$K \coloneqq \mathrm{SO}(2), \qquad A \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda > 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad N \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Alors l'application

$$\psi \colon \left| \begin{array}{l} K \times A \times N \longrightarrow G \\ \quad (k, a, n) \longmapsto kan \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme. De même, on trouve une décomposition similaire du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$.

Corollaire 7.13. Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ (resp. $\mathrm{SU}(2)$) est un rétract par déformation du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ (resp. $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$)

En particulier, on a $\pi_1(\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})) \simeq \mathbf{Z}$ et $\mathrm{SU}(2) \simeq \mathbf{S}^3$. Appelons $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})}$ le revêtement universel du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Ce n'est pas un groupe linéaire.

Proposition 7.14. Soit G un groupe de Lie connexe linéaire d'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Soit $q \colon G \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ un revêtement. Alors l'application q est un isomorphisme.

Démonstration. On suppose $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Soit $\varphi \coloneqq (dq)^{-1} \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$. On peut étendre ce morphisme à l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ en posant $\tilde{\varphi}(A + iB) \coloneqq \varphi(A) + i\varphi(B)$. Cela donne un morphisme $\tilde{\varphi} \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$. Or le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ est simplement connexe, donc il existe un morphisme de groupes de Lie $\psi \colon \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ qui réalise ce morphisme. Alors la composée $\psi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})} \circ q \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ est l'identité car sa différentielle est l'identité. De même, on trouve un inverse à droite ce qui conclut que l'application q est un isomorphisme. ◇

Exemple. Si $n \geqslant 3$, alors $\pi_1(\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})) \simeq \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

7.5. Sous-groupes avec algèbre de Lie prescrite

Définition 7.15. Soit $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un sous-groupe. On définit

$$\mathrm{Lie}(H) \coloneqq \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid \forall t \in \mathbf{R},\ e^{tX} \in H\}.$$

Ce n'est pas évident que ce soit une algèbre de Lie.

Définition 7.16. Soit G un groupe de Lie linéaire. Un sous-ensemble $H \subset G$ est un *sous-groupe intégral* de G si

- l'ensemble H est un sous-groupe de G ;
- l'ensemble $\mathfrak{h} \coloneqq \mathrm{Lie}(H)$ soit une algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$;
- on a $H = \langle e^{\mathfrak{h}} \rangle$.

Le dernier point exprime que tout les éléments de H sont de la forme $e^{h_1} \cdots e^{h_n}$ pour $h_i \in \mathfrak{h}$.

Théorème 7.17 *(du sous-groupe intégral).* Soient G un groupe de Lie linéaire et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie. Alors il existe un unique sous-groupe intégral $H \subset G$ tel que $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

Démonstration. L'unicité est assurée par le troisième point. Pour l'existence, on pose $H \coloneqq \langle e^{\mathfrak{h}} \rangle$. Les premier et troisième point sont alors clairs. Il reste à vérifier que $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. On peut déjà écrire l'inclusion $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}(H)$. Réciproquement, soit $D \subset \mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire à $\mathfrak{h}$. L'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{h} \times D \longrightarrow G, \\ (X, Y) \longmapsto e^X e^Y \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme local au point $(0,0)$. Quitte à réduire le voisinage U de $(0,0)$, on peut supposer que la formule de Baker-Campbell-Haussdorff soit valide pour les produits de quatre éléments de U et que l'application

$$\left| \begin{array}{l} e^U \longrightarrow \mathfrak{h} \times D, \\ g \longmapsto (X(g), Y(g)) \text{ tel que } g = e^{X(g)} e^{Y(g)} \end{array} \right.$$

soit lisse.

Lemme 7.18. L'ensemble $E \coloneqq \{Y(g) \mid g \in e^U \cap H\}$ est au plus dénombrable.

Ce lemme suffit. En effet, soit $Z \in \operatorname{Lie}(H)$. Alors pour t assez petit, on a $tZ \in U$, donc on peut écrire $e^{tZ} = e^{X(t)} e^{Y(t)}$ où les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ sont continues près de 0. Pour t assez petit, on a donc $e^{Y(t)} = e^{-X(t)} e^{tZ} \in H \cap U$, donc $Y(t) \in E$. Or E est dénombrable et Y est continue, donc la fonction Y est constante (c'est le théorème des valeurs intermédiaires) sur un voisinage de 0 et elle vaut $Y(0) = 0$. Donc $e^{tZ} = e^{X(t)}$ pour t assez petit, donc $X(t) \in \mathfrak{h}$, donc $Z = X(t)/t \in \mathfrak{h}$ pour $t \neq 0$ assez petit.

Il reste donc à montrer le précédent lemme. Pour cela, on va passer par le lemme suivant.

Lemme 7.19. Donnons-nous une **Q**-structure sur $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire une base de $\mathfrak{h}$ modulo changement linéaires à coefficients rationnels (un élément de $\mathfrak{h}$ est *rationnel* si ses coordonnées dans la base fixée sont des rationnels). Soit $g \in H$. Alors il existes des éléments rationnels $R_1, \dots, R_k, X \in \mathfrak{h} \cap \mathrm{U}$ tels que $g = e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k}$.

Ce lemme suffit à montrer le premier lemme. Remarquons que, si on fixe R_i, alors $Y(e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k})$ ne dépend pas du $X \in \mathfrak{h} \cap U$ choisi. En effet, on pose $g_i \coloneqq e^{X_i} e^{R_1} \cdots e^{R_k}$. Alors $g_i = e^{X(g_i)} e^{Y(g_i)}$, donc $e^{-X_1} e^{X(g_1)} e^{Y(g_1)} = e^{-X_2} e^{X(g_2)} e^{Y(g_2)}$. Or $e^{-X_1} e^{X(g_1)} = e^{Z_1}$ avec $Z_1 \in \mathfrak{h}$ par la formule de Baker-Campbell-Haussdorff car $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie. De même, on écrit $e^{-X_2} e^{X(g_2)} = e^{Z_2}$. Ainsi $e^{-Z_1} e^{Y(g_1)} = e^{-Z_2} e^{Y(g_2)}$, donc $Z_1 = Z_2$ et $Y(g_1) = Y(g_2)$. On n'a qu'un nombre dénombrable de choix de k et R_i, donc un nombre dénombrable de possibilité pour $Y(e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k})$. D'après le lemme 2, l'ensemble E est donc dénombrable.

Il reste à montrer le lemme 2. Tout élément de H s'écrit sous la forme $e^{X_1} \cdots e^{X_k}$ avec $X_i \in \mathfrak{h}$. On peut supposer $X_i \in U$ qui à modifier la longueur. Soit $g = e^{X_1} \cdots e^{X_k} \in H$ avec $X_i \in U$. Montrons par récurrence sur k qu'on peut le mettre sous la forme $g = e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k}$. C'est vrai pour $k = 0$. Pour l'hérédité, on suppose cela vrai au rang k. Alors

$$e^{X_1} \cdots e^{X_{k+1}} = e^{X_1} (e^{X_2} \cdots e^{X_{k+1}}) = e^{X_1} e^Z e^{R_2} \cdots e^{R_{k+1}}.$$

Or $e^{X_1} e^Z = e^T$ avec $T \in U^2 \cap \mathfrak{h}$ par la formule de BCH. On écrit $T = R_1 + \varepsilon$ avec R_1 rationnel et $\|\varepsilon\| \ll 1$. Alors $e^T e^{-R_1} = e^X$ avec $X \in \mathfrak{h}$ petit. Ainsi $e^{X_1} e^Z = e^T = e^X e^{R_1}$ ce qui permet de conclure que

$$e^{X_1} \cdots e^{X_{k+1}} = e^X e^{R_1} e^{R_2} \cdots e^{R_{k+1}}. \qquad \diamond$$

Théorème 7.20. Soit $H \subset G$ un sous-groupe intégral. Alors on peut lui donner une structure de groupe de Lie tel que l'ensemble $\operatorname{Lie}(H)$ soit son algèbre de Lie et l'inclusion $H \longrightarrow G$ soit lisse.

Exemple. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre abélienne maximale. Alors le sous-groupe intégrale correspondant $H \subset G$ est fermé. En effet, l'adhérence $Z \coloneqq \overline{H}$ est encore un sous-groupe. On remarque que le sous-groupe H est abélien puisque $H = e^{\mathfrak{h}}$. Ainsi le sous-groupe Z est abélien, donc son algèbre de Lie est abélienne. Comme elle contient la sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}$, on en déduit que $\operatorname{Lie}(Z) = \mathfrak{h}$, donc $Z = H$.

Exemple. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie semi-simple et isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe compact. Alors le sous-groupe intégrale correspondant H est compact.

Chapitre 8
Groupes de Lie compacts

8.1 Motivations 55
8.2 Formule de Baker-Campbell-Haussdorff 55
8.3 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie 57
8.4 Revêtements et groupes de Lie 58
8.5 Sous-groupes avec algèbre de Lie prescrite 59

8.1. Motivations

Théorème 8.1. Soient G et H deux groupes de Lie linéaires et $\varphi\colon G \longrightarrow H$ un morphisme continu. Alors il est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa différentielle $d\varphi$ en l'identité vérifie

$$\varphi(e^X) = e^{d\varphi(X)}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

On peut se poser la question de la réciproque. Étant donné un morphisme $\Psi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, se réalise-t-il comme la différentielle d'un morphisme de groupes $G \longrightarrow H$? La réponse est négative. Considérons le morphisme d'algèbres

$$\Psi\colon \left|\begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \\ t \longmapsto t. \end{array}\right.$$

Alors il n'existe pas de morphisme non trivial continu $\Psi\colon \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$. Son image est un sous-groupe compact de $\mathbf{R}$.

Théorème 8.2. Soient G un groupe de Lie simplement connexe et H un autre groupe de Lie. Soit $\delta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme. Alors il existe un unique morphisme $\alpha\colon G \longrightarrow H$ tel que $\delta = d\alpha$.

Une autre question à la suivante : si G est un groupe linéaire et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre, existe-t-il un sous-groupe $H \subset G$ dont l'algèbre est $\mathfrak{h}$. La réponse est non. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{R}^2$ qui est associée au groupe $G = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. On prend la sous-algèbre $\mathfrak{h} := \operatorname{Vect}((1, \sqrt{2}))$.

8.2. Formule de Baker-Campbell-Haussdorff

Théorème 8.3. Soit G un groupe de Lie linéaire. Alors il existe un voisinage $V \subset \mathfrak{g}$ de zéro tel que, pour tous éléments $X, Y \in V$, l'élément $\log(e^X e^Y)$ est bien défini et

$$\log(e^X e^Y) = X + \sum_{\substack{k,n>0 \\ (p_i,q_i)\in\mathbf{N}^2 \\ p_i+q_i>0}} \frac{(-1)^k}{(k+1)(q_1+\cdots+q_k+1)} \frac{(\operatorname{ad} X)^{p_1}(\operatorname{ad} Y)^{q_1}\cdots(\operatorname{ad} X)^{p_k}(\operatorname{ad} Y)^{q_k}(\operatorname{ad} X)^n Y}{p_1!q_1!\cdots p_k!q_k!n!}.$$

Lemme 8.4. On pose $\Phi(z) = (1-e^{-z})/z$ et $\psi(z) = z\log z/(z-1)$. Alors pour tout nombre $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < \log 2$, on a $\psi(e^z)\Psi(z) = 1$.

Cette formule reste vraie quand on remplace z par un endomorphisme de $\mathbf{C}^d$ de petite norme.

Lemme 8.5. Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On définit l'application

$$\lambda\colon \left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \\ Y & \longmapsto & e^X Y. \end{array} \right.$$

Alors

$$d\exp(X) = \lambda \circ \Phi(\operatorname{ad} X).$$

Démonstration. Pour $t, s \in \mathbf{R}$, on pose

$$\gamma(t,s) \coloneqq \exp(-s(X+tY))\frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))].$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial s} &= \exp(-s(X+tY))[-(X+tY)]\frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))] \\ &\qquad + \exp(-s(X+tY))\frac{\partial}{\partial t}[(X+tY)\exp(s(X+tY))] \\ &= \exp(-s(X+tY))[-(X+tY)]\frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))] \\ &\qquad + \exp(-s(X+tY))\left[Y\exp(s(X+tY)) + (X+tY)\frac{\partial}{\partial t}[\exp(s(X+tY))]\right] \\ &= \exp(-s(X+tY))Y\exp(s(X+tY)) \\ &= \operatorname{Ad}(\exp(-s(X+tY)))Y \\ &= \exp(-s\operatorname{ad}(X+tY))Y. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} &\gamma(t,1) = \exp(-(X+tY))\,d\exp(X)(Y), \\ &\gamma(t,0) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\exp(-(X+tY))\,d\exp(X)(Y) = \int_0^1 \exp(-s\operatorname{ad}(X+tY))y\,\mathrm{d}s.$$

On prend $t=0$ et on obtient

$$\begin{aligned} \exp(-X)\,d\exp(X)(Y) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-s)^k(\operatorname{ad} X)^k}{k!} y\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k s^{k+1}}{(k+1)!}(\operatorname{ad} x)^k(Y) \\ &= \Phi(\operatorname{ad} X)(Y). \end{aligned}$$

◇

Proposition 8.6. Pour X, Y assez petits, on a

$$\log(e^X e^Y) = x + \int_0^1 \Psi(e^{\operatorname{ad} X} e^{t\operatorname{ad} Y})Y\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On pose $F(t) = \log(e^X e^{tY})$. Calculons sa dérivée. On pose $U(t) = e^X e^{tY} = e^{F(t)}$. Alors

$$U'(t) = e^X e^{tY} Y = e^{F(t)} Y.$$

Par ailleurs, on a

$$U'(t) = d\exp(F(t))(F'(t)) = e^{F(t)}\Phi(\operatorname{ad} F(t))F'(t).$$

Or pour Z assez petit, on a $\psi(e^Z) = \Phi(Z)^{-1}$. On obtient alors

$$F'(t) = \psi(e^{\operatorname{ad} F(t)})Y = \psi(\operatorname{Ad}(e^{F(t)}))Y.$$

On trouve alors

$$\log(e^X e^Y) = F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= X + \int_0^1 \psi(\mathrm{Ad}(e^{F(t)}))Y \,\mathrm{d}t \\
&= x + \int_0^1 \Psi(e^{\mathrm{ad}\, X} e^{t \,\mathrm{ad}\, Y})Y \,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \qquad \diamond
$$

Pour obtenir la formule de Baker-Campbell-Haussdorff, on développe la fonction ψ en série entière puis on intègre.

8.3. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie

Montrons le théorème 8.2. On procède en quatre étapes.

Étape 1. Montrons qu'il existe un voisinage $U \subset G$ de l'élément neutre et un morphisme local $\alpha\colon U \longrightarrow H$ de dérivé δ. On considère des petits voisinages de e_G et e_H et $O_{\mathfrak{g}}$ et $O_{\mathfrak{h}}$ tel que $\exp_{\mathfrak{g}}$, $\log_G$, $\exp_{\mathfrak{h}}$ et $\log_H$ soit des difféomorphismes locaux. On définit $\alpha(A) = \exp_{\mathfrak{h}}(\delta(\log_G A))$ sur un petit voisinage de e_G. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'un voisinage de e_G sur un voisinage de e_H. On restreint encore les voisinages de manière à s'assurer que la formule de Bell-Campbell-Haussdorff soit vraie pour les éléments de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. On note $A = e^a$ et $B = e^b$ avec $a, b \in \mathfrak{g}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\alpha(A)\alpha(B) &= \exp_{\mathfrak{h}}(\delta(a)) \exp_{\mathfrak{h}}(\delta(b)) \\
&= \exp_{\mathfrak{h}}\Big(\delta(a) + \sum_{n,k,p_i,q_i} c_{n,k,p_i,q_i} (\mathrm{ad}\,\delta(a))^{p_1} \cdots (\mathrm{ad}\,\delta(a))^n \delta(b)\Big).
\end{aligned}
$$

Or $\mathrm{ad}(\delta(u))(\delta(v)) = [\delta(u), \delta(v)] = \delta([u,v])$, donc

$$
\begin{aligned}
\alpha(A)\alpha(B) &= \exp_{\mathfrak{h}}\Big(\delta\Big(a + \sum_{n,k,p_i,q_i} c_{n,k,p_i,q_i} (\mathrm{ad}\, a)^{p_1} \cdots (\mathrm{ad}\, a)^n b\Big)\Big) \\
&= \exp_{\mathfrak{g}}(\delta(\log(e^a e^b))) \\
&= \alpha(AB).
\end{aligned}
$$

Étape 2. Soient $g \in G$ et $\gamma[0,1] \longrightarrow G$ un lacet continu entre e_G et g. On va définir une valeur par $\alpha_\gamma(g)$ qui va dépendre du lacet γ. On se donne une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ tel que

$$
\gamma(t_i)^{-1}\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U
$$

pour le voisinage U de l'étape 1. On pose

$$
\alpha_\gamma(g) \coloneqq \alpha(\gamma(t_0)^{-1})\gamma(t_1)) \cdots \alpha(\gamma(t_{k-1})^{-1}\gamma(t_k)).
$$

Ça dépend *a priori* de la subdivision.

Montrons que c'est invariant si on raffine la partition. Rajoutons un temps $s \in]t_p, t_{p+1}[$. Alors

$$
\begin{aligned}
\alpha(\gamma(t_p)^{-1}\gamma(t_{p+1})) &= \alpha(\gamma(t_p)^{-1}\gamma(s)\gamma(s)^{-1}\gamma(t_{p+1})) \\
&= \alpha(\gamma(t_p)^{-1}\gamma(s))\alpha(\gamma(s)^{-1}\gamma(t_{p+1})).
\end{aligned}
$$

Ainsi le résultat ne change pas si on intercale un temps en plus.

Remarquons maintenant que, si on a deux subdivisions, on peut construire une subdivision qui raffine les deux. Cela conclut : la quantité $\alpha_\gamma(g)$ ne dépend que du chemin choisi γ.

Étape 3. On suppose que G est simplement connexe. Montrons que la valeur $\alpha_\gamma(g)$ ne dépend pas de γ. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins reliant e_G à g. Soit γ une homotopie à extrémités fixées entre ces deux derniers. On peut trouver un quadrillage rectangulaire (t_i) et (z_j) de sorte que

$$
\gamma(t_i, s_j)^{-1}\gamma([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset U^{1/4}.
$$

On note

$$
\sigma_{i,j} \coloneqq \alpha(\gamma(t, s_j)^{-1}\gamma(t_{i+1}, s_j)) \qquad \text{et} \qquad \tau_{i,j} \coloneqq \alpha(\gamma(t, s_j)^{-1}\gamma(t_i, s_{j+1}))
$$

et on a $\tau_{i,j}\sigma_{i,j+1} = \sigma_{i,j}\tau_{i+1,j}$. Ceci permet de conclure.

Étape 4. On a donc défini une application $\alpha\colon G \longrightarrow H$. Montrons que c'est un morphisme de groupes. Soient $g, g' \in G$ deux éléments. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins reliant e à g (resp. g'). Alors $g(\gamma')$ est un chemin de g à gg'. On trouve alors $\alpha(g)\alpha(g') = \alpha(gg')$.

Corollaire 8.7. Si deux groupes de Lie G et H sont simplement connexes dont les algèbres de Lie sont isomorphes, alors ils sont isomorphes.

Démonstration. Soit $\delta\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un isomorphisme. On peut écrire $d\alpha = \delta$ et $d\beta = \delta^{-1}$. Alors on trouve $d(\beta \circ \alpha) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ et l'unicité donne alors $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_G$. De même, on trouve $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_H$. ◇

Corollaire 8.8. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie qu'on peut écrire sous la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Soit G un groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors il existe deux sous-groupes fermés simplement connexe $H_1, H_2 \subset G$ dont les algèbres de Lie sont $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ et tels que $G \simeq H_1 \times H_2$.

Démonstration. On regarde les projections $p_i\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}_i \subset H$. Ce sont des morphismes d'algèbres de Lie. Il existe ainsi deux morphismes de groupes $\Phi_i\colon G \longrightarrow G$ tel que $p_i = d\Phi_i$. Posons $H_i \coloneqq (\operatorname{Ker} \Phi_i)^\circ$. Ce sont des sous-groupes fermés d'algèbres de Lie $\operatorname{Ker} p_i = \mathfrak{h}_i$. Regardons

$$d(\Phi_1|_{H_1}) = (dp_1)|_{H_1} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}_1}$$

qui coïncide avec la différentielle du morphisme Id_{H_1}, donc $\Phi_1|_{H_1} = \mathrm{Id}_{H_1}$.

Montrons que $\operatorname{Im} \Phi_1 \subset H_1$. Le morphisme $p_1\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}_1$ provient d'un morphisme de groupes de Lie $G \longrightarrow H_1$, c'est donc Φ_1 qui est à valeurs dans H_1.

Vérifions que le sous-groupes H_i sont simplement connexes. Soit γ un lacet de H_1 reliant e à e. Montrons que ce lacet est homotope au lacet constant. En tant que lacet de G, il est homotope au lacet constant. On note α une homotopie dans G. Regardons $\beta(t, s) \coloneqq \Phi_1(\alpha(t, s))$. Alors c'est une homotopie dans H. Ainsi le sous-groupe H_1 est simplement connexe. De même pour H_2.

Considérons les applications

$$u\colon \left|\begin{aligned} H_1 \times H_2 &\longrightarrow G, \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad v\colon \left|\begin{aligned} G &\longrightarrow H_1 \times H_2, \\ g &\longmapsto (\Phi_1(g), \Phi_2(g)). \end{aligned}\right.$$

Alors les composées $u \circ v$ et $v \circ u$ ont pour différentielles Id_G et $\mathrm{Id}_{H_1 \times H_2}$. Ce sont donc les applications Id_G et $\mathrm{Id}_{H_1 \times H_2}$. ◇

8.4. Revêtements et groupes de Lie

Théorème 8.9. Soient G un groupe de Lie connexe te $q\colon \tilde{G} \longrightarrow G$ un revêtement universel. Alors il existe une structure de groupe de Lie sur le groupe $\tilde{G}$ tel que l'application q soit un morphisme.

Remarque. La donnée d'une structure de groupe sur l'ensemble $\tilde{G}$ correspond à choisir un neutre $e_{\tilde{G}} \in q^{-1}(e_G)$.

Théorème 8.10. Soient G un groupe de Lie connexe te $q\colon \tilde{G} \longrightarrow G$ un revêtement universel. Alors le noyau $\operatorname{Ker} q \simeq \pi_1(G)$ est discret et central. De même, il existe un isomorphisme $G \simeq \tilde{G}/\operatorname{Ker} q$.

Remarque. Le noyau $\operatorname{Ker} q$ est discret car c'est un revêtement et il est distingué car c'est un noyau.

Lemme 8.11. Un sous-groupe discret distingué d'un groupe connexe est central.

Démonstration. Soit $N \subset G$ un sous-groupe distingué discret. Soit $n \in N$. L'application

$$g \in G \longmapsto gng^{-1} \in N$$

est continue à valeurs dans un espace discret. Comme le groupe G est connexe, elle est constante et vaut $ene^{-1} = n$. Ainsi l'élément n appartient au centre du groupe G. ◇

Théorème 8.12. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors il existe un unique, à isomorphisme près, groupe de Lie simplement connexe $\tilde{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. De plus, il existe une bijection entre les classes d'isomorphismes de groupes connexes ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et les orbites sous $\operatorname{Aut}(\tilde{G})$ de l'ensemble des sous-groupes discrets centraux de $\tilde{G}$.

Exemple. On considère l'algèbre de Lie abélienne $\mathbf{R}^n$. Alors un groupe de Lie simplement connexe qui a cette algèbre de Lie est le groupe additif $\mathbf{R}^n$. Ici on a $\mathrm{Aut}(\mathbf{R}^n) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ et les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}^n$ sont isomorphes à des groupes $\mathbf{Z}^k$. Ainsi les groupes de Lie abélien connexe sont les groupes $\mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$.

Exemple *(décomposition d'Iwasawa).* On considère le groupe $G \coloneqq \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ et ses sous-groupes

$$K \coloneqq \mathrm{SO}(2), \qquad A \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda > 0 \right\} \qquad \text{et} \qquad N \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Alors l'application

$$\psi \colon \left| \begin{array}{l} K \times A \times N \longrightarrow G \\ \quad (k, a, n) \longmapsto kan \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme. De même, on trouve une décomposition similaire du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$.

Corollaire 8.13. Le groupe $\mathrm{SO}(2)$ (resp. $\mathrm{SU}(2)$) est un rétract par déformation du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ (resp. $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$)

En particulier, on a $\pi_1(\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})) \simeq \mathbf{Z}$ et $\mathrm{SU}(2) \simeq \mathbf{S}^3$. Appelons $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})}$ le revêtement universel du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Ce n'est pas un groupe linéaire.

Proposition 8.14. Soit G un groupe de Lie connexe linéaire d'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Soit $q \colon G \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ un revêtement. Alors l'application q est un isomorphisme.

Démonstration. On suppose $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Soit $\varphi \coloneqq (dq)^{-1} \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$. On peut étendre ce morphisme à l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ en posant $\tilde{\varphi}(A + iB) \coloneqq \varphi(A) + i\varphi(B)$. Cela donne un morphisme $\tilde{\varphi} \colon \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$. Or le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ est simplement connexe, donc il existe un morphisme de groupes de Lie $\psi \colon \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ qui réalise ce morphisme. Alors la composée $\psi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})} \circ q \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ est l'identité car sa différentielle est l'identité. De même, on trouve un inverse à droite ce qui conclut que l'application q est un isomorphisme. ◇

Exemple. Si $n \geqslant 3$, alors $\pi_1(\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})) \simeq \pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

8.5. Sous-groupes avec algèbre de Lie prescrite

Définition 8.15. Soit $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ un sous-groupe. On définit

$$\mathrm{Lie}(H) \coloneqq \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid \forall t \in \mathbf{R},\ e^{tX} \in H\}.$$

Ce n'est pas évident que ce soit une algèbre de Lie.

Définition 8.16. Soit G un groupe de Lie linéaire. Un sous-ensemble $H \subset G$ est un *sous-groupe intégral* de G si

- l'ensemble H est un sous-groupe de G ;
- l'ensemble $\mathfrak{h} \coloneqq \mathrm{Lie}(H)$ soit une algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$;
- on a $H = \langle e^{\mathfrak{h}} \rangle$.

Le dernier point exprime que tout les éléments de H sont de la forme $e^{h_1} \cdots e^{h_n}$ pour $h_i \in \mathfrak{h}$.

Théorème 8.17 *(du sous-groupe intégral).* Soient G un groupe de Lie linéaire et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie. Alors il existe un unique sous-groupe intégral $H \subset G$ tel que $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

Démonstration. L'unicité est assurée par le troisième point. Pour l'existence, on pose $H \coloneqq \langle e^{\mathfrak{h}} \rangle$. Les premier et troisième point sont alors clairs. Il reste à vérifier que $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. On peut déjà écrire l'inclusion $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}(H)$. Réciproquement, soit $D \subset \mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire à $\mathfrak{h}$. L'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{h} \times D \longrightarrow G, \\ (X, Y) \longmapsto e^X e^Y \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme local au point $(0,0)$. Quitte à réduire le voisinage U de $(0,0)$, on peut supposer que la formule de Baker-Campbell-Haussdorff soit valide pour les produits de quatre éléments de U et que l'application

$$\left|\begin{aligned} &e^U \longrightarrow \mathfrak{h} \times D, \\ &g \longmapsto (X(g), Y(g)) \text{ tel que } g = e^{X(g)} e^{Y(g)} \end{aligned}\right.$$

soit lisse.

Lemme 8.18. L'ensemble $E \coloneqq \{Y(g) \mid g \in e^U \cap H\}$ est au plus dénombrable.

Ce lemme suffit. En effet, soit $Z \in \mathrm{Lie}(H)$. Alors pour t assez petit, on a $tZ \in U$, donc on peut écrire $e^{tZ} = e^{X(t)} e^{Y(t)}$ où les fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ sont continues près de 0. Pour t assez petit, on a donc $e^{Y(t)} = e^{-X(t)} e^{tZ} \in H \cap U$, donc $Y(t) \in E$. Or E est dénombrable et Y est continue, donc la fonction Y est constante (c'est le théorème des valeurs intermédiaires) sur un voisinage de 0 et elle vaut $Y(0) = 0$. Donc $e^{tZ} = e^{X(t)}$ pour t assez petit, donc $X(t) \in \mathfrak{h}$, donc $Z = X(t)/t \in \mathfrak{h}$ pour $t \neq 0$ assez petit.

Il reste donc à montrer le précédent lemme. Pour cela, on va passer par le lemme suivant.

Lemme 8.19. Donnons-nous une $\mathbf{Q}$-structure sur $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire une base de $\mathfrak{h}$ modulo changement linéaires à coefficients rationnels (un élément de $\mathfrak{h}$ est *rationnel* si ses coordonnées dans la base fixée sont des rationnels). Soit $g \in H$. Alors il existes des éléments rationnels $R_1, \dots, R_k, X \in \mathfrak{h} \cap \mathrm{U}$ tels que $g = e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k}$.

Ce lemme suffit à montrer le premier lemme. Remarquons que, si on fixe R_i, alors $Y(e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k})$ ne dépend pas du $X \in \mathfrak{h} \cap U$ choisi. En effet, on pose $g_i \coloneqq e^{X_i} e^{R_1} \cdots e^{R_k}$. Alors $g_i = e^{X(g_i)} e^{Y(g_i)}$, donc $e^{-X_1} e^{X(g_1)} e^{Y(g_1)} = e^{-X_2} e^{X(g_2)} e^{Y(g_2)}$. Or $e^{-X_1} e^{X(g_1)} = e^{Z_1}$ avec $Z_1 \in \mathfrak{h}$ par la formule de Baker-Campbell-Haussdorff car $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie. De même, on écrit $e^{-X_2} e^{X(g_2)} = e^{Z_2}$. Ainsi $e^{-Z_1} e^{Y(g_1)} = e^{-Z_2} e^{Y(g_2)}$, donc $Z_1 = Z_2$ et $Y(g_1) = Y(g_2)$. On n'a qu'un nombre dénombrable de choix de k et R_i, donc un nombre dénombrable de possibilité pour $Y(e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k})$. D'après le lemme 2, l'ensemble E est donc dénombrable.

Il reste à montrer le lemme 2. Tout élément de H s'écrit sous la forme $e^{X_1} \cdots e^{X_k}$ avec $X_i \in \mathfrak{h}$. On peut supposer $X_i \in U$ qui à modifier la longueur. Soit $g = e^{X_1} \cdots e^{X_k} \in H$ avec $X_i \in U$. Montrons par récurrence sur k qu'on peut le mettre sous la forme $g = e^X e^{R_1} \cdots e^{R_k}$. C'est vrai pour $k = 0$. Pour l'hérédité, on suppose cela vrai au rang k. Alors

$$e^{X_1} \cdots e^{X_{k+1}} = e^{X_1} (e^{X_2} \cdots e^{X_{k+1}}) = e^{X_1} e^Z e^{R_2} \cdots e^{R_{k+1}}.$$

Or $e^{X_1} e^Z = e^T$ avec $T \in U^2 \cap \mathfrak{h}$ par la formule de BCH. On écrit $T = R_1 + \varepsilon$ avec R_1 rationnel et $\|\varepsilon\| \ll 1$. Alors $e^T e^{-R_1} = e^X$ avec $X \in \mathfrak{h}$ petit. Ainsi $e^{X_1} e^Z = e^T = e^X e^{R_1}$ ce qui permet de conclure que

$$e^{X_1} \cdots e^{X_{k+1}} = e^X e^{R_1} e^{R_2} \cdots e^{R_{k+1}}.$$

◇

Théorème 8.20. Soit $H \subset G$ un sous-groupe intégral. Alors on peut lui donner une structure de groupe de Lie tel que l'ensemble $\mathrm{Lie}(H)$ soit son algèbre de Lie et l'inclusion $H \longrightarrow G$ soit lisse.

Exemple. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre abélienne maximale. Alors le sous-groupe intégrale correspondant $H \subset G$ est fermé. En effet, l'adhérence $Z \coloneqq \overline{H}$ est encore un sous-groupe. On remarque que le sous-groupe H est abélien puisque $H = e^{\mathfrak{h}}$. Ainsi le sous-groupe Z est abélien, donc son algèbre de Lie est abélienne. Comme elle contient la sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}$, on en déduit que $\mathrm{Lie}(Z) = \mathfrak{h}$, donc $Z = H$.

Exemple. Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie semi-simple et isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe compact. Alors le sous-groupe intégrale correspondant H est compact.