

Géométrie différentielle

Christophe DUPONT

Master 1 de mathématiques fondamentales · Université de Rennes 1
Notes prises par Téofil ADAMSKI (version du 9 avril 2021)



1	Sous-variétés de \mathbf{R}^n	1	3.4	Fibré tangent, champ de vecteurs	14
1.1	Définition et notion de dimension	1	3.5	Formes différentielles sur une variété	15
1.2	Caractérisation des sous-variétés	3	3.6	Différentielle extérieure	15
1.3	Espace tangent	5	4	Orientation des variétés et intégration	18
2	Variétés différentiables	7	4.1	Orientation	18
2.1	Définition et exemples	7	4.2	Intégration des formes différentielles	20
2.2	Variétés quotients	8	5	Domaines réguliers et théorèmes de Stokes	22
2.3	Partitions de l'unité et théorème de Whitney	9	5.1	Domaines réguliers	22
3	Formes différentielles	11	5.2	Théorème de Stokes	24
3.1	Formes différentielle sur un ouvert de \mathbf{R}^n	11	6	Cohomologie de de Rham	27
3.2	L'algèbre extérieure sur un ouvert de \mathbf{R}^n	12	6.1	Formes fermées, formes exactes, lemme de Poincaré	27
3.3	Tiré en arrière de formes différentielles	13	6.2	Cohomologie de de Rham	28

Chapitre 1

Sous-variétés de \mathbf{R}^n

1.1 Définition et notion de dimension	1	1.3 Espace tangent	5
1.2 Caractérisation des sous-variétés	3		

Dans toute la suite, on fixe un entier $n \in \mathbf{N}$. On notera $\mathbf{0}_n := (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ l'élément neutre du groupe additif \mathbf{R}^n .

Intuitivement, une sous-variété de \mathbf{R}^n est un objet géométrique tel que chacun de ses points admette un voisinage difféomorphe à un ensemble assez simple, c'est-à-dire de la forme $\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}$ pour un certain entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Géométriquement, cela veut dire qu'on peut « détordre » chaque petite portion de la sous-variété en une droite, un plan, un hyperplan, etc.

1.1 Définition et notion de dimension

DÉFINITION 1.1. Une *sous-variété* de \mathbf{R}^n est une partie $M \subset \mathbf{R}^n$ telle que, pour tout point $x_0 \in M$, il existe

- un voisinage ouvert U de x_0 dans \mathbf{R}^n ,
- un difféomorphisme $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ de classe \mathcal{C}^∞ ,
- un entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$

tels que

$$\varphi(x_0) = \mathbf{0}_n \quad \text{et} \quad \varphi(U \cap M) = [\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}] \cap \varphi(U).$$

On dira que l'application φ est un difféomorphisme, ou une *carte locale*, associé au point x_0 pour la sous-variété M .

▷ **EXEMPLES.** – Un singleton $\{x_0\}$ avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ est une sous-variété de \mathbf{R}^n en prenant

$$U = \mathbf{R}^n, \quad \varphi: x \in \mathbf{R}^n \mapsto x - x_0 \quad \text{et} \quad p = 0.$$

- Tout sous-espace affine est une sous-variétés de \mathbf{R}^n .
- Un cercle, une ellipse et une hyperbole du plan sont des sous-variétés de \mathbf{R}^2 .
- L'union d'un plan et d'une droite de l'espace se coupant en un seule point n'est pas une sous-variété de \mathbf{R}^3 . L'union de deux droites sécantes du plan n'est pas une sous-variété de \mathbf{R}^2 . Justifions ce dernier point. Dans le cas contraire, on considère un difféomorphisme $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ associé au point d'intersection $x_0 \in \mathbf{R}^2$ des deux droites. Alors l'ouvert $U \setminus \{x_0\}$ possède quatre composantes connexes, alors que l'ensemble $\varphi(U) \setminus \{\varphi(x_0)\}$ n'en possède que deux. Ceci est impossible car l'application φ réalise un homéomorphisme entre $U \setminus \{x_0\}$ et $\varphi(U) \setminus \{\varphi(x_0)\}$.
- Un serpent qui se mord la queue (voir la figure 1.2) et le graphe de la valeur absolue ne sont pas des sous-variétés de \mathbf{R}^2 .

PROPOSITION 1.2. Soit M un sous-variété de \mathbf{R}^n . Alors

1. l'entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ précédemment défini est unique, on l'appelle la *dimension* de la sous-variété M au point $x_0 \in M$ et on le note $\dim_{x_0} M$;
2. si la sous-variété M est connexe, alors l'application $x \in M \mapsto \dim_x M$ est constante.

Preuve 1. Soit $x_0 \in M$. Quitte à prendre l'intersection des deux ouverts, on peut considérer deux tels difféomorphismes $\varphi_1: U \rightarrow \varphi_1(U)$ et $\varphi_2: U \rightarrow \varphi_2(U)$ associés à deux tels entiers $p_1 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $p_2 \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Étudions l'application $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U) \rightarrow \varphi_2(U)$ (voir la figure 1.3). Sa différentielle en x_0

$$d_{x_0}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}): \mathbf{R}^{p_1} \times \{\mathbf{0}_{n-p_1}\} \rightarrow \mathbf{R}^{p_2} \times \{\mathbf{0}_{n-p_2}\}$$

est un isomorphisme (la différentielle en un point d'un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme est un isomorphisme). On obtient ainsi $p_1 = p_2$. Cela montre l'unicité de l'entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1.1. DÉFINITION ET NOTION DE DIMENSION

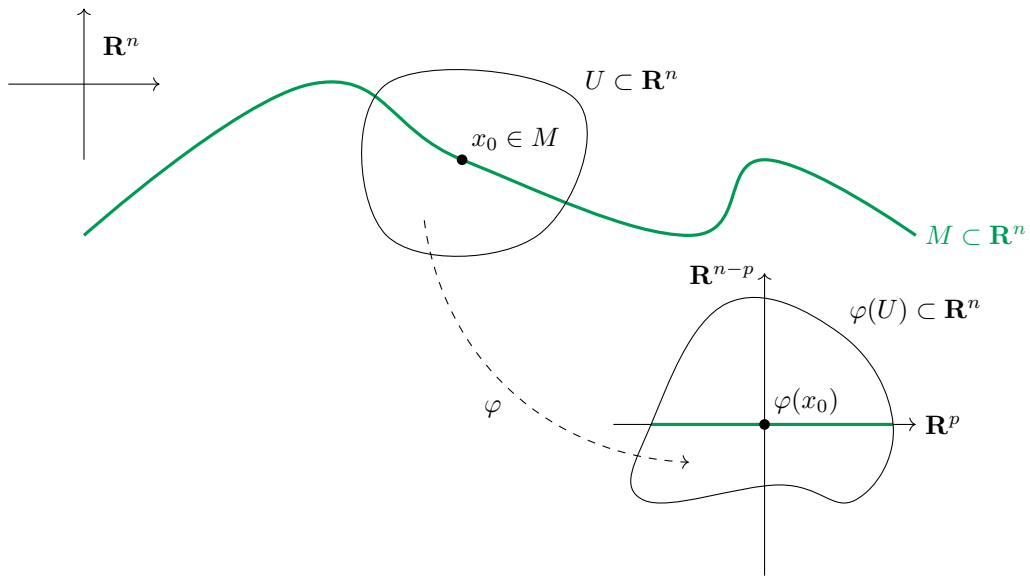


FIGURE 1.1 – Illustration d'une variété M de \mathbf{R}^n .

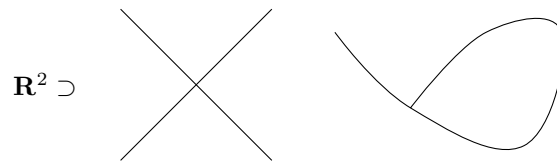


FIGURE 1.2 – Deux droites s'intersectant et un serpent qui se mord la queue ne sont pas des sous-variétés de \mathbf{R}^2 .

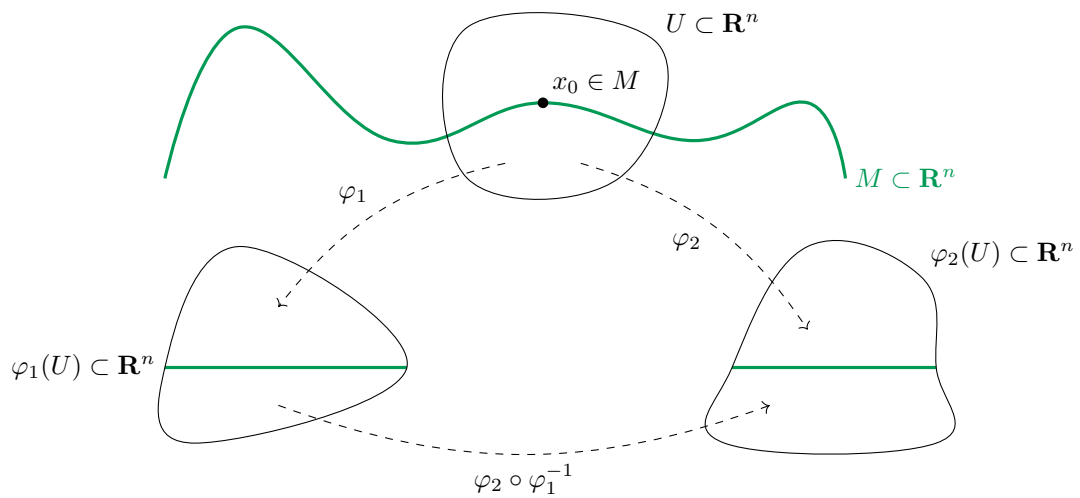


FIGURE 1.3 – La composée en image.

2. On considère désormais que la sous-variété M est connexe. Considérons l'ensemble

$$D_p := \{x \in M \mid \dim_x M = p\}.$$

Pour conclure, il suffit d'observer qu'il est à la fois ouvert et fermé dans M . Montrons qu'il est ouvert dans M . Soit $x_0 \in D_p$. Soit $\varphi_{x_0}: U \rightarrow \varphi_{x_0}(U)$ un difféomorphisme associé en ce point. Alors pour tout point $x_1 \in U \cap M$, le difféomorphisme $\varphi_{x_0} - \varphi_{x_0}(x_1)$ fonctionne pour le point x_1 avec le même entier p , donc $x_1 \in D_p$. Ceci montre $U \cap M \subset D_p$ et conclut.

Montrons qu'il est fermé. C'est assez clair puisque $D_p = M \setminus \bigcup_{n \neq p} D_n$. Il est donc ouvert, fermé et non vide. La connexité de M conclut $D_p = M$. \square

1.2 Caractérisation des sous-variétés

PROPOSITION 1.3. Soit $M \subset \mathbf{R}^n$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la partie M est une sous-variété de \mathbf{R}^n ;
- (ii) pour tout $x_0 \in M$, il existe
 - un voisinage ouvert U de x_0 dans \mathbf{R}^n ,
 - une permutation linéaire des coordonnées $L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$,
 - un entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,
 - un ouvert A de \mathbf{R}^p ,
 - une application $f: A \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$ de classe \mathcal{C}^∞

tels que

$$U \cap M = U \cap \{L(a, b) \in A \times \mathbf{R}^{n-p} \mid f(a) = b\} ;$$

- (iii) pour tout point $x_0 \in M$, il existe
 - un voisinage ouvert U de x_0 dans \mathbf{R}^n ,
 - un entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,
 - une application $F: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$ de classe \mathcal{C}^∞

tels que la différentielle $d_{x_0}F$ soit surjective et

$$U \cap M = F^{-1}(\{\mathbf{0}_{n-p}\}) ;$$

- (iv) pour tout point $x_0 \in M$, il existe
 - un voisinage U de x_0 dans \mathbf{R}^n ,
 - un entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,
 - un voisinage ouvert Ω de $\mathbf{0}_p$ dans \mathbf{R}^p
 - une application $j: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe \mathcal{C}^∞

tels que

- (a) on ait $j(\mathbf{0}_p) = x_0$;
- (b) la différentielle $d_{\mathbf{0}_p}j: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$ soit injective ;
- (c) l'application $j: \Omega \rightarrow U \cap M$ soit un homéomorphisme ^{§1}.

Preuve • *Implication (i) \Rightarrow (iii)*. On suppose le point (i). Soit $x_0 \in M$. On note $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ un difféomorphisme associé au point x_0 ainsi que l'entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ associé. On note $\varphi_i: U \rightarrow \varphi_i(U)$ les n coordonnées de φ . Il suffit alors de considérer l'application $F := (\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n): U \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$. On obtient alors $U \cap M = \varphi^{-1}(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}) = F^{-1}(\{\mathbf{0}_{n-p}\})$. De plus, l'application φ étant un difféomorphisme, la différentielle $d_{x_0}\varphi$ est inversible. En particulier, la différentielle $d_{x_0}F$ est surjective.

• *Implication (iii) \Rightarrow (ii)*. On suppose le point (iii). On fixe un point $x_0 \in M$ et on adopte les notations de l'énoncé. Alors pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$, l'hypothèse affirme que

$$(a, b) \in U \cap M \iff [F(a, b) = \mathbf{0}_{n-p} \text{ et } (a, b) \in U].$$

^{§1}. On induit la topologie de \mathbf{R}^n sur $U \cap M$.

1.2. CARACTÉRISATION DES SOUS-VARIÉTÉS

Quitte à permuter les coordonnées à la source, on peut supposer $\partial_b F \in \text{GL}_{n-p}(\mathbf{R})$ où on identifie matrices et applications linéaires. En effet, la différentielle $d_{x_0} F$ est surjective, donc il existe $n-p$ colonnes linéairement indépendantes de la matrice dF . On permute alors les coordonnées afin de mettre ces $n-p$ colonnes en dernières positions.

D'après le théorème de fonctions implicites, il existe un produit d'ouverts $A \times B \subset U$ et une application $f: A \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$ de classe \mathcal{C}^∞ tels que

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad F(a, b) = 0 \iff b = f(a).$$

Ainsi l'ouvert $A \times B$ vérifie

$$(A \times B) \cap M = (A \times B) \cap \{L(a, b) \in A \times \mathbf{R}^{n-p} \mid f(a) = b\}$$

pour le changement des coordonnées $L \in \text{GL}(\mathbf{R}^n)$ donné par le paragraphe précédent. Cela assure le point (ii).

- *Implication (ii) \Rightarrow (i).* Soit $x_0 \in M$. Alors l'application

$$\varphi: \begin{cases} U \rightarrow \varphi(U), \\ (a, b) \mapsto (a, b - f(a)) \end{cases}$$

composée avec une translation vérifie bien les conditions : elle est bijective, de classe \mathcal{C}^∞ et sa réciproque est de classe \mathcal{C}^∞ . Vérifions ce dernier point. Sa différentielle

$$d\varphi = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -\partial_a f & \text{Id} \end{pmatrix}$$

est inversible au point x_0 . Ainsi le théorème d'inversion locale assure qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x_0 dans \mathbf{R}^n tel que la restriction $\varphi: V \rightarrow \varphi(V)$ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme. En particulier, la réciproque de cette restriction est de classe \mathcal{C}^∞ . En remplaçant l'ouvert U par V , on en déduit le point (i).

- *Implication (ii) \Rightarrow (iv).* Soit $x_0 := (a_0, b_0) \in M$. Alors l'application

$$j: \begin{cases} A \rightarrow A \times B, \\ a \mapsto (a + a_0, f(a + a_0)) \end{cases}$$

vérifie bien les conditions pour un ouvert $B \supset A$ de \mathbf{R}^{n-p} . En effet, la différentielle $d_0 j$ est injective parce que sa première coordonnées vaut 1. Montrons que l'application $j: A \rightarrow (A \times B) \cap M$ est un homéomorphisme. C'est une bijection de classe \mathcal{C}^∞ . Il suffit de montrer que sa réciproque est de classe \mathcal{C}^∞ . Soit A' un ouvert de A . Vérifions que l'image $j(A')$ est un ouvert de M et c'est évident puisque $j(A') = (A' \times B) \cap M$ où le produit $A' \times B$ est un ouvert de \mathbf{R}^n . Cela conclut le point (iv).

• *Implication (iv) \Rightarrow (ii).* Soit $x_0 := (a_0, b_0) \in M$ avec $a_0 \in \mathbf{R}^p$. En premier lieu, montrons qu'il existe un voisinage A de a_0 dans \mathbf{R}^p , un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ de \mathbf{R}^p et une application $f: A \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$ de classe \mathcal{C}^∞ tels que

$$j(\Omega') = \{(a, b) \in A \times \mathbf{R}^{n-p} \mid b = f(a)\}.$$

On note $\alpha: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^p$ et $\beta: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$ les coordonnées de j . Comme $d_0 j$ est injective, quitte à permuter les coordonnées au but, on peut supposer $d_0 \alpha \in \text{GL}_p(\mathbf{R})$. D'après le théorème d'inversion local, il existe alors un voisinage A de $a_0 = \alpha(0)$ dans \mathbf{R}^p et un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ de \mathbf{R}^p tels que la restriction $\alpha: \Omega' \rightarrow A$ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme. Posons

$$f: \begin{cases} A \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}, \\ a \mapsto \beta \circ \alpha^{-1}(a). \end{cases}$$

Alors le graphe de f est l'ensemble $j(\Omega')$.

Ensuite, montrons qu'il existe un ouvert V' de \mathbf{R}^n tel que $j(\Omega') = V' \cap M$. On sait que l'application $j: \Omega \rightarrow V \cap M$ est un homéomorphisme par hypothèse. Comme Ω' est un ouvert de Ω , l'image $j(\Omega')$ est un ouvert de $V \cap M$ et donc de M , donc il existe un voisinage ouvert V' de x_0 dans \mathbf{R}^n tel que $j(\Omega') = V' \cap M$. Cela nous donne le point (ii) et termine la preuve de la proposition. \square

DÉFINITION 1.4. 1. Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n . Une application différentiable $F: U \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$ dont la différentielle est surjective en tout point de U s'appelle une *submersion*.

2. Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^p . Une application différentiable $j: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ dont la différentielle est

injective en tout point de Ω s'appelle une *immersion*.

3. Une application $j: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ est un *plongement* si

- c'est une immersion injective ;
- l'application $j: \Omega \rightarrow j(\Omega)$ est un homéomorphisme.

◇ REMARQUE. Attention, l'image d'une immersion n'est pas toujours une sous-variété. On peut prendre l'exemple d'une immersion non injective ou de l'immersion $t < 1 \mapsto (t(t^2 - 1), t^2 - 1) \in \mathbf{R}^2$.

1.3 Espace tangent

DÉFINITION 1.5. Soient M une sous-variété de \mathbf{R}^n et $x_0 \in M$. Soit φ une carte locale de M en x_0 . L'espace tangent à la sous-variété M au point x_0 est l'ensemble

$$T_{x_0}M := (d_{x_0}\varphi)^{-1}(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}) \quad \text{avec} \quad p := \dim_{x_0} M.$$

L'espace tangent affine est l'ensemble $x_0 + T_{x_0}M$

◇ REMARQUE. L'espace tangent ne dépend pas de la carte locale choisies. En effet, soient φ_1 et φ_2 deux cartes locales de M en x_0 définie sur un même ouvert W . Alors la différentielle $d_0(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ est inversible. De plus, en utilisant les définitions, on a

$$\varphi_2^{-1}(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}) \cap \varphi_2(W) = M \cap W = \varphi_1^{-1}(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}) \cap \varphi_1(W),$$

donc

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}) \cap \varphi_2(W) = \mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\} \cap \varphi_1(W)$$

ce qui permet d'écrire

$$d_0(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}) = \mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}.$$

Pour des raisons de dimension, l'inclusion précédente est une égalité. En composant des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$(d_{x_0}\varphi_2)^{-1}(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}) = (d_{x_0}\varphi_1)^{-1}(\mathbf{R}^p \times \{\mathbf{0}_{n-p}\}).$$

D'un point de vue pratique, si la sous-variété M est définie localement autour d'un point $x_0 \in M$, qu'on note $x_0 = (a_0, b_0)$ avec $a_0 \in \mathbf{R}^p$, comme

- un graphe $M = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$, alors $T_{x_0}M = \{(h, d_{a_0}f(h)) \mid h \in \mathbf{R}^p\}$;
- une équation $M = F^{-1}(\{\mathbf{0}_{n-p}\})$, alors $T_{x_0}M = \text{Ker } d_{x_0}F$;
- une nappe $M = j(\Omega)$, alors $T_{x_0}M = d_0j(\mathbf{R}^p)$.

L'application d_0 étant injective, cette dernière égalité montre que l'espace tangent $T_{x_0}M$ est une sous-variété de \mathbf{R}^n de dimension p au point x_0 .

▷ EXEMPLES. - On considère le huitième de sphère

$$M := \{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} \subset \mathbf{R}^3.$$

Elle correspond au graphe de la fonction définie par l'égalité $f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Alors pour tout point $(x_0, y_0, z_0) \in M$, on obtient

$$T_{(x_0, y_0, z_0)}M = \left\{ \left(x, y, \frac{-2x_0}{2\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}x + \frac{-2y_0}{2\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}y \right) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- On considère la sphère $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ qu'on peut écrire sous la forme $\mathbf{S}^2 = \{F = 0\}$ avec

$$F: (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Alors pour tout point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{S}^2$, on a

$$T_{(x_0, y_0, z_0)}\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x_0x + y_0y + z_0z = 0\}$$

puisque la différentielle de F en (x_0, y_0, z_0) s'écrit

$$d_{(x_0, y_0, z_0)}F = (2x_0, 2y_0, 2z_0).$$

1.3. ESPACE TANGENT

– On considère la courbe $M \subset \mathbf{R}^2$ paramétrée par l'application $j: t \in \mathbf{R} \mapsto (te^{-t}, t^3) \in \mathbf{R}^2$. Alors pour tout réel $t_0 \in \mathbf{R}$, le vecteur vitesse au temps t_0 s'écrit

$$j'(t_0) = (e^{-t_0}(1 - t_0), 3t_0^2)$$

et le plan tangent au point $j(t_0)$ est

$$\mathbb{T}_{j(t_0)}M = \{(e^{-t_0}(1 - t_0)t, 3t_0^2t) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Chapitre 2

Variétés différentiables

2.1 Définition et exemples	7	2.2.3 Variété quotient	8
2.2 Variétés quotients	8	2.3 Partitions de l'unité et théorème de Withney	9
2.2.1 Topologie quotient	8	2.3.1 Partitions de l'unité	9
2.2.2 Action de groupe	8	2.3.2 Théorème de Whitney	9

2.1 Définition et exemples

DÉFINITION 2.1. Soit M un espace topologique séparé. Un *atlas* de l'espace M est la donnée d'une famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où

- les ensembles U_i forment un recouvrement par des ouverts de M ;
- les applications $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi(U_i) \subset \mathbf{R}^n$ sont des homéomorphismes pour un entier $n \in \mathbf{N}$ telle que, pour tous $j, k \in I$, l'application de *changement de cartes*

$$\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}: \varphi_k(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_j(U_j \cap U_k)$$

soit de classe \mathcal{C}^∞ . Chaque couple (U_i, φ_i) est appelé une *carte* de l'atlas. Si $x \in U_i$, on dit que la carte est une carte au point x .

Deux atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ de l'espace M sont *équivalents* si, pour tous $i \in I$ et $j \in J$ tels que $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, l'application

$$\varphi_i \circ \psi_j^{-1}: \psi_j(U_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap V_j)$$

et sa réciproque sont de classe \mathcal{C}^∞ .

- ◇ REMARQUES. – Les applications $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ sont alors des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^∞ .
- La relation « sont équivalents » sur les atlas est bien une relation d'équivalence.

DÉFINITION 2.2. Une *variété différentiable* est la donnée d'un espace topologique séparé M muni d'une classe d'équivalences d'atlas. Une carte de la variété est une carte quelconque de l'un des atlas de la classe considérée. Sa *dimension* est l'entier $n \in \mathbf{N}$ de l'application précédente.

DÉFINITION 2.3. Soient M et N deux variétés de dimensions respectives $m \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$. Une application $f: M \rightarrow N$ est de classe \mathcal{C}^∞ si, pour tout point $x \in M$, il existe une carte (U, φ) de M en x et une carte (V, ψ) de N en $f(x)$ telles que $f(U) \subset V$ et la composée $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ soit de classe \mathcal{C}^∞ .

- ◇ REMARQUE. La propriété « être de classe \mathcal{C}^∞ » ne dépend pas des cartes locales choisies dans le sens où, si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe \mathcal{C}^∞ pour des cartes données (U, φ) et (V, ψ) , alors $\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ l'est aussi pour une autre carte $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ et il en va de même pour un changement de cartes à l'arrivée.

DÉFINITION 2.4. Un difféomorphisme entre M et N est une bijection $f: M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que sa réciproque $f^{-1}: N \rightarrow M$ soit de classe \mathcal{C}^∞ .

- ◇ REMARQUES. – On définit, comme pour les sous-variétés de \mathbf{R}^n , les immersions, les submersions et les plongements.
- Soit (U, φ) une carte de M . Alors $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ est un difféomorphisme. En effet, pour tout point $x \in M$, on considère les cartes (U, φ) de M en x et $(\mathbf{R}^n, \text{Id}_{\mathbf{R}^n})$ de \mathbf{R}^n en $\varphi(x)$ de telle sorte que la composée $\text{Id}_{\mathbf{R}^n} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}_{\mathbf{R}^n}$ est bien de classe \mathcal{C}^∞ . Cela montre que l'application φ est de classe \mathcal{C}^∞ et on procède identiquement pour sa réciproque.

Cas des sous-variétés de \mathbf{R}^n

Comment peut-on munir les sous-variétés de \mathbf{R}^n d'une structure de variété abstraite de façon naturelle? Soit M une sous-variété de \mathbf{R}^n . Pour tout point $x \in M$, fixons une carte (U_x, φ_x) de M

en x au sens des sous-variétés. Alors la famille $(U_x \cap M, \varphi_x|_{U_x \cap M})_{x \in M}$ constitué un atlas de M . On munit alors l'espace topologique M de la structure de variété abstraite donnée par la classe d'équivalence de cet atlas.

EXERCICE 2.1. Vérifier que les changements de cartes sont de classe \mathcal{C}^∞ .

2.2 Variétés quotients

- ▷ EXEMPLE. Le cercle \mathbf{S}^1 est une variété quotient \mathbf{R}/\mathbf{Z} , *i. e.* on peut établir un difféomorphisme entre ces deux variétés.

2.2.1 Topologie quotient

Soient M un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur M . On note $p: M \rightarrow M/\mathcal{R}$ la projection. On définit une topologie sur l'ensemble M/\mathcal{R} en décrétant qu'une partie de M/\mathcal{R} est un ouvert si sa pré-image par p est un ouvert de M . Dès lors, une application $f: M/\mathcal{R} \rightarrow Y$ sera continue si et seulement si la composée $f \circ p: M \rightarrow Y$ est continue.

2.2.2 Action de groupe

Soit M une variété et Γ un groupe agissant sur M . On dit que ce groupe agit

- de manière *lisse* si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $x \in M \mapsto \gamma \cdot x \in M$ est de classe \mathcal{C}^∞ ;
- *proprement* si, pour tous compacts K_1 et K_2 de M , la partie $\{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma \cdot K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$ est finie ;
- *librement* si, pour tout $\gamma \in G \setminus \{1\}$ et tout $x \in M$, on a $\gamma \cdot x \neq x$.

- ▷ EXEMPLES. – L'action de \mathbf{Z} sur \mathbf{R} par translation est libre et propre. L'espace quotient \mathbf{R}/\mathbf{Z} est le cercle \mathbf{S}^1 . Les propriétés sont les mêmes pour l'action de \mathbf{Z}^2 sur \mathbf{R}^2 et l'espace quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ est le *tore*.
- L'action $(k, x) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R} \mapsto 2^k x \in \mathbf{R}$ n'est pas libre car le neutre 0 est fixé par tout entier et elle n'est pas propre.
 - L'action $(\sigma, p) \in \{\pm \text{Id}_{\mathbf{R}^3}\} \times \mathbf{S}^2 \mapsto \sigma(p) \in \mathbf{S}^2$ est propre et libre. En quotientant, on obtient le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$.

2.2.3 Variété quotient

Soient M une variété et Γ un groupe qui agit de manière lisse sur M . On définit la relation d'équivalence \mathcal{R} en décrétant $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $y \in \text{Orb}_\Gamma(x)$ pour tous points $x, y \in M$. Le but est de munir le quotient M/Γ d'une structure de variété en supposant que l'action est propre et libre.

EXERCICE 2.2. 1. Montrer que, si l'action est lisse, alors la projection $p: M \rightarrow M/\Gamma$ est ouverte.
2. On suppose que l'action est propre. Soient $x, y \in M$ deux points tels que $p(x) \neq p(y)$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tel que

$$V \cap \gamma \cdot W = \emptyset, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Cela implique que l'espace M/Γ est séparé et localement compact.

3. Montrer que, si l'action est propre et libre, tout point $x \in M$ possède un voisinage V tel que

$$V \cap \gamma \cdot V = \emptyset, \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}.$$

▷ 1. Soit O un ouvert de M . Montrons que son image $p(O)$ est un ouvert de M/Γ . Par définition de la topologie quotient, il suffit de vérifier que la partie $p^{-1}(p(O))$ est un ouvert de M et c'est évident puisque

$$p^{-1}(p(O)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\gamma \cdot O)$$

où les ensembles $\gamma \cdot O$ sont des ouverts de M puisque l'action est lisse.

THÉORÈME 2.5. Soit Γ un groupe agissant de manière lisse, proprement et librement sur une variété M . On note $p: M \rightarrow M/\Gamma$ la projection. Alors la famille $(p(V), \tilde{\varphi})$ indexée par les cartes où

(i) l'ensemble V est un ouvert de M contenu dans une carte (U, φ) de M vérifiant

$$V \cap \gamma \cdot V = \emptyset, \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}; \quad (*)$$

(ii) l'application $\tilde{\varphi}$ est la composée $\varphi \circ p|_V^{-1}: p(V) \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ constitue un atlas de M/Γ .

◇ **REMARQUE.** La condition $(*)$ assure que la restriction $p|_V: V \rightarrow p(V)$ est un homéomorphisme. On peut donc bien parler de sa bijection réciproque.

Preuve Les ouverts de cette forme $p(V)$ recouvrent bien M/Γ . En effet, d'après l'exercice, tout point $x \in M$ possède un voisinage \tilde{V} tel que $\tilde{V} \cap \gamma \cdot \tilde{V} = \emptyset$ pour tout $\gamma \neq 1$. Soit (U, φ) une carte de M contenant x . On pose $V := \tilde{V} \cap U$. Alors l'ouvert V vérifie bien le point (i).

Vérifions que l'application $\tilde{\varphi} = \varphi \circ p|_V^{-1}: p(V) \rightarrow \varphi(U)$ est un homéomorphisme. C'est évident car c'est la composition de deux homéomorphismes : on le montre en utilisant l'exercice, *i. e.* le fait que l'application $p|_V$ est ouverte.

Montrons que les changements de cartes sont de classe \mathcal{C}^∞ . Soient $(p(V_1), \tilde{\varphi}_1)$ et $(p(V_2), \tilde{\varphi}_2)$ deux cartes. On suppose $p(V_1) \cap p(V_2) \neq \emptyset$. Il existe un point $x \in V_2$ et un élément $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma \cdot x \in V_1$. Il faut montrer que l'application

$$\Phi := \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}: \tilde{\varphi}_2(p(V_1) \cap p(V_2)) \rightarrow \tilde{\varphi}_1(p(V_1) \cap p(V_2)).$$

Cette dernière est l'application $\varphi_1 \circ p|_{V_1}^{-1} \circ p|_{V_2} \circ \varphi_2^{-1}$. Or la composée $p|_{V_1}^{-1} \circ p|_{V_2}$ est la multiplication par γ_0 . Ainsi l'application Φ est l'expression de la multiplication $\gamma_0: M \rightarrow M$ vue dans les cartes φ_1 et φ_2 . Comme l'action est lisse, cette application Φ est lisse. Cependant, pour faire tout cela, il faudrait montrer que l'élément γ_0 ne dépend pas de x . C'est bien le cas car l'action est libre (cf. notes). Ceci termine la preuve. \square

2.3 Partitions de l'unité et théorème de Withney

2.3.1 Partitions de l'unité

On va construire des fonctions qui régularisent les indicatrices $\mathbb{1}_U$ pour un ouvert de carte U , *i. e.* qui les rendent de classe \mathcal{C}^∞ .

PROPOSITION 2.6. Soient M une variété compacte et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de M . Alors il existe un recouvrement ouvert fini $(V_i)_{i \in I}$ de M et une famille $(\tilde{\chi}_i)_{i \in I}$ de fonctions de M dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $i \in I$, on ait

- $\overline{V_i} \subset U_i$;
- $\text{supp } \tilde{\chi}_i := \overline{\{\tilde{\chi}_i \neq 0\}} \subset U_i$;
- $\tilde{\chi}_i = 1$ sur V_i .

CONSÉQUENCE. Pour $i \in I$, posons

$$\chi_i := \frac{\tilde{\chi}_i}{\sum_{j \in I} \tilde{\chi}_j}.$$

On obtient alors une famille finie de fonctions de M dans $[0, 1]$ dont la somme vaut 1 et telle que chaque fonction χ_i voit son support inclus dans U_i .

2.3.2 Théorème de Whitney

THÉORÈME 2.7 (Whitney). Pour toute variété compacte M de dimension $m \in \mathbf{N}$, il existe un entier $\alpha \geq 1$ tel que la variété M se plonge dans \mathbf{R}^α .

Autrement dit, modulo le plongement, on peut voir la variété M comme une sous-variété de \mathbf{R}^α .

- ▷ EXEMPLES. – Les variétés \mathbf{S}^1 , \mathbf{S}^2 , $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ sont déjà des sous-variétés d'un espace \mathbf{R}^β .
 – On considère le tore $\mathbf{T}^2 := \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ de dimension deux. L'application

$$\sigma: \begin{cases} \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \\ (x, y) \longmapsto (x + 1/2, -y) \end{cases}$$

passé au quotient par \mathbf{Z}^2 . On obtient alors une application $\tilde{\sigma}: \mathbf{T}^2 \longrightarrow \mathbf{T}^2$. C'est une involution, donc elle engendre le groupe $\langle \tilde{\sigma} \rangle = \{\mathrm{Id}_{\mathbf{T}^2}, \tilde{\sigma}\}$. La *bouteille de Klein* est le quotient $K := \mathbf{T}^2/\langle \tilde{\sigma} \rangle$

Preuve Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ une atlas de M . Soient $(V_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ et $(\tilde{\chi}_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ deux familles comme dans la proposition précédente. Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on considère le produit $\tilde{\chi}_i \varphi_i: U_i \longrightarrow \mathbf{R}^m$ et on le prolonge naturellement en une fonction $\tilde{\chi}_i \varphi_i: M \longrightarrow \mathbf{R}^m$ en la rendant nulle en dehors de l'ouvert U_i . Posons

$$F: \begin{cases} M \longrightarrow (\mathbf{R}^m)^N \times \mathbf{R}^N, \\ p \longmapsto (\tilde{\chi}_1 \varphi_1(p), \dots, \tilde{\chi}_N \varphi_N(p), \tilde{\chi}_1(p), \dots, \tilde{\chi}_N(p)) \end{cases}$$

et $\alpha := (m + 1)N$. Montrons que cette application F est un plongement, *i. e.* une immersion bijective homéomorphe sur son image.

Dans un premier temps, admettons qu'elle est injective et que sa différentielle est injective en tout point. Alors l'application $F: M \longrightarrow F(M)$ est bijective et continue. Comme M est compacte, c'est une homéomorphisme. De plus, c'est une immersion.

Montrons qu'elle est injective. Soient $x, y \in M$ deux points tels que $F(x) = F(y)$. Comme on a une partition de l'unité, il existe un entier $i_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $x \in V_{i_0}$ ce qui implique $\tilde{\chi}_{i_0}(x) = 1$. Comme $F(x) = F(y)$, on a $\tilde{\chi}_{i_0}(x) = \tilde{\chi}_{i_0}(y)$, donc $y \in U_{i_0}$ puisque $\mathrm{supp} \tilde{\chi}_{i_0} \subset U_{i_0}$. On peut alors écrire $\tilde{\chi}_{i_0}(x) \varphi_{i_0}(x) = \tilde{\chi}_{i_0}(y) \varphi_{i_0}(y)$, donc $\varphi_{i_0}(x) = \varphi_{i_0}(y)$. Comme $\varphi_{i_0}: U_{i_0} \longrightarrow \varphi_{i_0}(U_{i_0})$ est un homéomorphisme, on a $x = y$. Cela montre l'injectivité.

Il ne reste plus qu'à montrer que sa différentielle est injective en tout point. On reprend un point $x \in V_{i_0}$. Soit Ω un voisinage de x contenu dans V_{i_0} . Alors $\tilde{\chi}_{i_0} \varphi_{i_0} = \varphi_{i_0}$, donc le i_0 -ième bloc de $D_x F$ qui est égal à $D_x \varphi_{i_0}$ est une application linéaire injective. Ceci termine la preuve. \square

Chapitre 3

Formes différentielles

3.1 Formes différentielle sur un ouvert de \mathbf{R}^n	11	3.4 Fibré tangent, champ de vecteurs	14
3.1.1 1-forme différentielle sur un ouvert de \mathbf{R}^n	11	3.4.1 Vecteurs tangents, espace tangent	14
3.1.2 k -forme différentielle sur un ouvert de \mathbf{R}^n	11	3.4.2 Construction du fibré tangent	14
3.2 L'algèbre extérieure sur un ouvert de \mathbf{R}^n	12	3.4.3 Champ de vecteurs	15
3.3 Tiré en arrière de formes différentielles	13	3.5 Formes différentielles sur une variété	15
		3.6 Différentielle extérieure	15

3.1 Formes différentielle sur un ouvert de \mathbf{R}^n

3.1.1 1-forme différentielle sur un ouvert de \mathbf{R}^n

On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{R}^n . On considère sa base duale associée (dx_1, \dots, dx_n) . Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a donc $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

DÉFINITION 3.1. Une *1-forme différentielle* sur U est une application $\omega: U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ de classe \mathcal{C}^∞ . On note $\Omega^1(U)$ l'ensemble des 1-formes différentielles sur U .

▷ **EXEMPLES.** L'application $x \in \mathbf{R} \mapsto \cos x dx \in \mathbf{R}^*$ est une 1-forme différentielle sur \mathbf{R} et l'application $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto y dx + x^3 dy \in (\mathbf{R}^2)^*$ en est une sur \mathbf{R}^2 . Pour une fonction $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ , l'application

$$df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

est une 1-forme différentielle. On fera souvent cet abus de notation.

DÉFINITION 3.2. Soit $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_n): [a, b] \rightarrow U$ une application de classe \mathcal{C}^∞ . L'intégrale d'une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1(U)$ est la quantité

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \sum_{k=1}^n \omega_k(\gamma(t)) (\gamma'_k(t)) dt.$$

▷ **EXEMPLES.** On considère le chemin $\gamma: t \in [0, 1] \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbf{R}^2$ et la 1-forme différentielle

$$\omega = y dx.$$

Alors son intégrale vaut

$$\int_\gamma \omega := \int_0^1 t^3 \times 2t dt = \frac{2}{5}.$$

DÉFINITION 3.3. Une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1(U)$ s'il existe une fonction $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\omega = df$.

Attention, toute 1-forme différentielle n'est pas exacte : il suffit de considérer

$$\frac{1}{x^2 + y^2} (-y dx + x dy) \in \Omega^1(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}).$$

3.1.2 k -forme différentielle sur un ouvert de \mathbf{R}^n

DÉFINITION 3.4. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Une *k -forme linéaire* sur \mathbf{R}^n est une application k -linéaire de $(\mathbf{R}^n)^k$ dans \mathbf{R} . Une k -forme linéaire $\varphi: (\mathbf{R}^n)^k \rightarrow \mathbf{R}$ est *alternée* si

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k, \quad \forall (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbf{R}^n)^k, \quad \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma) \varphi(v_1, \dots, v_k).$$

On note $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)^*$ l'espace des k -formes linéaires alternées sur \mathbf{R}^n .

3.1. FORMES DIFFÉRENTIELLE SUR UN OUVERT DE \mathbf{R}^N

▷ EXEMPLE. Le déterminant est une n -forme linéaires alternées sur \mathbf{R}^n .

DÉFINITION 3.5. Soit $\varphi: (\mathbf{R}^n)^k \rightarrow \mathbf{R}$ une k -forme linéaire sur \mathbf{R}^n . On introduit la fonction

$$\text{Alt}(\varphi): \begin{cases} (\mathbf{R}^n)^k \rightarrow \mathbf{R}, \\ (v_1, \dots, v_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma) \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \end{cases}$$

◇ REMARQUE. La k -forme linéaire φ est alternée si et seulement si $\varphi = \text{Alt}(\varphi)$.

▷ EXEMPLES. – On considère la 2-forme linéaire $\varphi := dx \otimes dx$, c'est-à-dire

$$\varphi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_2, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}.$$

Alors

$$\text{Alt}(\varphi)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \frac{1}{2}(a_1 b_1 - b_1 a_1) = 0, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}.$$

– Si $\varphi := dx \otimes dy$, alors

$$\text{Alt}(\varphi)(a, b) = \det(a, b), \quad a, b \in \mathbf{R}^2.$$

NOTATION. Pour $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} := k! \text{Alt}(dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}).$$

PROPOSITION 3.6. 1. La famille $(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ est une base de $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)^*$
2. La dimension de $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)^*$ vaut $\binom{n}{k}$ si $0 \leq k \leq n$ et 0 sinon.

Preuve La liberté de la famille est assez claire. Montrons qu'elle est génératrice. Soit $\varphi \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n)^*$. Alors on peut l'écrire sous la forme

$$\varphi = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k} \varphi_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}.$$

Mais comme φ est alternée, on a

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k} \frac{\varphi_{i_1, \dots, i_k}}{k!} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma) \varphi_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

ce qui montre que cette famille est génératrice. □

DÉFINITION 3.7. Une k -forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est une application

$$\omega: U \rightarrow \Lambda^k(\mathbf{R}^n)^*$$

de classe \mathcal{C}^∞ . Elle est donc de la forme

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad x \in U.$$

où les fonctions $\omega_{i_1, \dots, i_k}: U \rightarrow \mathbf{R}$ sont de classe \mathcal{C}^∞ . On note $\Omega^k(U)$ l'ensemble des k -formes différentielles sur U . Par convention, on notera $\Omega^0(U) := \mathcal{C}^\infty(U)$.

▷ EXEMPLES. On a

$$\begin{aligned} e^{-y} dx + \cos(xy) dy + dz &\in \Omega^1(\mathbf{R}^2), \\ x^2 y dx \wedge dy &\in \Omega^2(\mathbf{R}^2), \\ 2x dx \wedge dy + dz \wedge dz &\in \Omega^2(\mathbf{R}^3). \end{aligned}$$

3.2 L'algèbre extérieure sur un ouvert de \mathbf{R}^n

DÉFINITION 3.8. Pour un ouvert U de \mathbf{R}^n , on note

$$\Omega(U) := \Omega^0(U) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(U).$$

On munit l'ensemble $\Omega(U)$ d'une structure d'algèbre.

DÉFINITION 3.9. Pour $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, on définit leur produit

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta) \in \Omega^{k+\ell}(U).$$

C'est la $k + \ell$ -forme différentielle sur U définie par la relation

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \epsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}).$$

PROPOSITION 3.10. Soient $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$ et $\gamma \in \Omega^m(U)$. Alors

$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma, \quad (m = \ell)$$

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma,$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha.$$

▷ EXEMPLE. On pose $\alpha := dx + y^2 + xy dz \in \Omega^1(\mathbf{R}^3)$ et $\beta := dx \in \Omega^1(\mathbf{R}^3)$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= dx \wedge dx + y^2 dy \wedge dx + xy dz \wedge dx \\ &= -y^2 dx \wedge dy - xy dx \wedge dz. \end{aligned}$$

◇ REMARQUE. Par la troisième égalité, pour tout entier k et toute forme k -différentielle α , on a

$$\alpha \wedge \alpha = 0.$$

Lorsque k est impair, ce n'est pas vrai : on peut considérer $dx \wedge dy + dz \wedge dt \in \Omega^2(\mathbf{R}^4)$.

3.3 Tiré en arrière de formes différentielles

Soient $U \subset \mathbf{R}^m$ et $V \subset \mathbf{R}^n$ deux ouverts. On notera respectivement (x_1, \dots, x_m) et (y_1, \dots, y_n) les coordonnées sur ces ouverts. Soit $f: U \rightarrow V$ une application de classe \mathcal{C}^∞ . Soit $\alpha \in \Omega^k(V)$.

DÉFINITION 3.11. L'image réciproque ou le *tiré en arrière* de la k -forme différentielle α par l'application f est la k -forme différentielle $f^*\alpha \in \Omega^k(U)$ définie par la formule

$$(f^*\alpha)(x)(v_1, \dots, v_k) := \alpha_{f(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_k)), \quad x \in U, v_1, \dots, v_k \in \mathbf{R}^m.$$

▷ EXEMPLES. On pose $f: (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x_1^2 + x_2 e^{5x_1}$ et $\alpha := y^3 dy$. Alors

$$f^*\alpha = (x_1^2 + x_2 e^{5x_1})^3 (2x_1 dx_1 + e^{5x_1} dx_2 + 5x_2 e^{5x_1} dx_1) \in \Omega^1(\mathbf{R}^2).$$

PROPOSITION 3.12. 1. L'application $f^*: \Omega(V) \rightarrow \Omega(U)$ est linéaire.

2. Pour tous $\alpha, \beta \in \Omega(V)$, on a $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.

3. Si $g: U \rightarrow W$ est de classe \mathcal{C}^∞ , alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Preuve 1. Le premier point est évident.

2. Par linéarité, il suffit d'établir la propriété pour $\alpha = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ et $\beta = dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_\ell}$ pour des indices vérifiant $i_1 < \cdots < i_k$ et $j_1 < \cdots < j_\ell$. Alors

$$\begin{aligned} f^*(\alpha \wedge \beta) &= f^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_\ell}) \\ &= df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \wedge df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_\ell} \\ &= f^*\alpha \wedge f^*\beta. \end{aligned}$$

3.4. FIBRÉ TANGENT, CHAMP DE VECTEURS

3. On procède par récurrence sur le degré de $\alpha \in \Omega^k(U)$. On suppose $k = 0$. Alors $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(W)$ et on obtient

$$(g \circ f)^* \alpha = \alpha \circ (g \circ f) = (\alpha \circ g) \circ f = f^*(\alpha \circ g) = f^* \circ g^*(\alpha).$$

Traitons le cas $k = 1$. Par le théorème des fonctions composées, pour tous $x \in U$ et $v \in \mathbf{R}^\ell$, on a

$$\begin{aligned} (f^*(g^*\alpha))_x(v) &= (g^*\alpha)_{f(x)}(d_x f(v)) \\ &= \alpha_{g \circ f(x)}(d_{f(x)} g \circ d_x f(v)) \\ &= \alpha_{g \circ f(x)}(d_x(g \circ f)(v)) \\ &= ((g \circ f)^*\alpha)_x(v). \end{aligned}$$

On peut passer à l'hérédité. Pour voir ce qui se passe, on va juste faire le cas $k = 2$ pour une 2-forme différentielle α de la forme $\alpha = a(w) dw_1 \wedge dw_2$. Alors

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*(\alpha) &= (g \circ f)^*(a(w) dw_1 \wedge dw_2) \\ &= a(g \circ f(x))((g \circ f)^*(dw_1 \wedge dw_2)) \\ &= a(g \circ f(x))((g \circ f)^* dw_1 \wedge (g \circ f)^* dw_2) \\ &= a(g \circ f(x))(f^*(g^* dw_1) \wedge f^*(g^* dw_2)) \\ &= a(g \circ f(x))f^*(g^* dw_1 \wedge g^* dw_2) \\ &= a(g \circ f(x))f^*(g^*(dw_1 \wedge dw_2)) \\ &= f^* \circ g^*(a(w) dw_1 \wedge dw_2). \end{aligned} \quad \square$$

3.4 Fibré tangent, champ de vecteurs

3.4.1 Vecteurs tangents, espace tangent

LEMME 3.13. Soient M une variété de dimension m et $x \in M$. On note C_x l'ensemble des cartes qui contiennent le point x . La relation définie sur $C_x \times \mathbf{R}^m$ définie par la formule

$$((U, \varphi), u) \mathcal{R} ((V, \psi), v) \iff v = d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(u)$$

est une relation d'équivalence.

DÉFINITION 3.14. Un *vecteur tangent* à M au point x est une classe d'équivalence pour cette relation. L'*espace tangent* est l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x , noté $\mathbf{T}_x M$.

◇ REMARQUE. Fixons une carte (U, φ) . Alors l'application

$$\theta_x^{(U, \varphi)} : \begin{cases} \mathbf{T}_x M \longrightarrow \mathbf{R}^m, \\ [(U, \varphi), u]_{\mathcal{R}} \longmapsto u \end{cases}$$

est une bijection

DÉFINITION 3.15. Soient M et N deux variétés de dimension m et n . Soit $f: M \longrightarrow N$ une application de classe \mathcal{C}^∞ . Soient $x \in M$ un point, (U, φ) une carte de M contenant x et (V, ψ) une carte de N contenant $f(x)$. Quitte à restreindre l'ouvert U , on suppose $f(U) \subset V$. On définit

$$\mathbf{T}_x f = [\theta_{f(x)}^{(V, \psi)}]^{-1} \circ d_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \theta_x^{(U, \varphi)}.$$

Cette application ne dépend pas des cartes choisies.

Preuve Soient (U', φ') et (V', ψ') deux autres cartes. Alors

$$\begin{aligned} &[\theta_{f(x)}^{(V', \psi')}]^{-1} \circ d_{\varphi'(x)}(\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}) \circ \theta_x^{(U', \varphi')} \\ &= [\theta_{f(x)}^{(V', \psi')}]^{-1} \circ d_{\varphi'(x)}(\psi' \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi'^{-1}) \circ \theta_x^{(U', \varphi')} \\ &= [\theta_{f(x)}^{(V', \psi')}]^{-1} \circ d_{\psi(f(x))}(\psi' \circ \psi^{-1}) \circ d_{\varphi(x)} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ d_{\varphi(x)}(\varphi \circ \varphi'^{-1}) \circ \theta_x^{(U', \varphi')} \\ &= [\theta_{f(x)}^{(V, \psi)}]^{-1} \circ d_{\varphi(x)} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \theta_x^{(U, \varphi)}. \end{aligned} \quad \square$$

3.4.2 Construction du fibré tangent

Soit M une variété de dimension m . On va munir l'ensemble $TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$ d'une structure naturelle de variété. Soit $\pi: TM \rightarrow M$ l'application définie par l'égalité $\pi(q) = x$ lorsque $q \in T_x M$. Fixons une carte (U, φ) . On pose

$$\tau^{(U, \varphi)} := (\varphi \circ \pi, \theta_{\varphi(\cdot)}^{(U, \varphi)}): \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbf{R}^m.$$

C'est une bijection. On décrète que cette application $\tau^{(U, \varphi)}$ est un homéomorphisme. Cela permet de munir l'ensemble TM d'une topologie.

Notons $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M . Alors la famille $(\pi^{-1}(U_i))_{i \in I}$ recouvre M . Vérifions que les changements de cartes sont de classe \mathcal{C}^∞ . Soient (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes de M . Alors le changement de cartes

$$\tau^{(U_2, \varphi_2)} \circ [\tau^{(U_1, \varphi_1)}]^{-1}: \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(U_1 \cap U_2) \times \mathbf{R}^m \rightarrow \pi_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbf{R}^m, \\ (z, u) \mapsto (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z), \theta_x^{(U_2, \varphi_2)} \circ [\theta_x^{(U_1, \varphi_1)}]^{-1}(u)) \end{array} \right.$$

avec $\varphi_1(x) = z$.

◇ REMARQUE. On a $\dim TM = 2 \dim M$.

3.4.3 Champ de vecteurs

DÉFINITION 3.16. Un champ de vecteurs sur une variété M est une application $X: M \rightarrow TM$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que

$$X(x) \in T_x M, \quad x \in M.$$

◇ REMARQUE. Pour tout point $x \in M$, on peut alors écrire $\pi \circ X(x) = x$.

PROPOSITION 3.17. Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M . Alors tout champ de vecteurs X sur M est caractérisé par les applications $X_i: \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbf{R}^m$ avec $i \in I$ vérifiant les relations de compatibilités :

$$\forall p \in U_i \cap U_j, \quad X_j(\varphi_j(p)) = d_{\varphi(p)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(X_i(\varphi_i(p))).$$

3.5 Formes différentielles sur une variété

Soient $x \in M$ et (U, φ) une carte contenant ce point x . L'application $\theta_x^{(U, \varphi)}$ permet de munir l'espace tangent $T_x M$ d'une structure de \mathbf{R} -espace vectoriel. On note $T_x^* M$ son dual. On note

$$\Lambda^k T_x^* M := \bigcup_{x \in M} \Lambda^k T_x^* M.$$

On pose

$$\tau^{(U, \varphi)} := (\varphi \circ \pi, ([\theta_{\varphi(\cdot)}^{(U, \varphi)}]^{-1})^*): \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi(U) \times \Lambda^k(\mathbf{R}^m)^*.$$

DÉFINITION 3.18. Une k -forme différentielle sur M est une application $\omega: M \rightarrow \Lambda^k T_x^* M$ telle que

$$\omega(x) \in \Lambda^k T_x^* M, \quad x \in M.$$

PROPOSITION 3.19. Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M . Alors une k -forme différentielle ω sur M est caractérisée par les applications $\omega_i: \varphi_i(U_i) \rightarrow \Lambda^k(\mathbf{R}^m)^*$ avec $i \in I$ vérifiant les relations de compatibilités :

$$\omega_j|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \omega_i|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}.$$

3.6 Différentielle extérieure

3.6. DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE

DÉFINITION 3.20. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $\alpha := a(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$ une k -forme différentielle. On pose

$$d\alpha := da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Par linéarité, on étend cette définition à toute forme k -différentielle sur U .

▷ **EXEMPLES.** Avec $\omega := x^2y dx \in \Omega^1(\mathbf{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned} d\omega &= (2xy dx + x^2 dy) \wedge dx \\ &= -x^2 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Avec $\omega := (\cos x) dx \wedge dy + dx \wedge dz + y^3 dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbf{R}^3)$, on a $d\omega = 0$.

PROPOSITION 3.21. 1. L'opérateur $d \circ d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+2}(U)$ est identiquement nul.

2. Pour tous $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^{k'}(U)$, on a

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

3. Pour toute application $f : U \subset \mathbf{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbf{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^∞ et tout $\alpha \in \Omega^k(V)$, on a

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha).$$

◇ **REMARQUE.** Le troisième point permet de définir l'opérateur \cdot pour une variété en utilisant les changements de cartes $f := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$.

Preuve 1. Par linéarité, il suffit de vérifier que $d \circ d(\alpha) = 0$ pour des k -formes différentielles α de la forme $\alpha = a(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Notons $I := \{i_1, \dots, i_k\}$. Comme a est de classe \mathcal{C}^∞ , on peut utiliser le théorème de Schwarz qui va nous donner

$$\begin{aligned} d \circ d\alpha &= d\left(\sum_{j \notin I} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) \\ &= \sum_{\ell \notin I} \sum_{j \notin I} \frac{\partial^2 a}{\partial x_\ell \partial x_j} dx_\ell \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= - \sum_{\ell \notin I} \sum_{j \notin I} \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_\ell} dx_j \wedge dx_\ell \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= -d \circ d\alpha \end{aligned}$$

ce qui implique $d \circ d(\alpha) = 0$.

2. De même, on va supposer $\alpha = a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ et $\beta = b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}}$. Alors

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(ab dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}}) \\ &= (b da + a db) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}} \\ &= da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}} + \\ &\quad (-1)^k a \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge db \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k'}} \\ &= da \wedge \beta + (-1)^k a \wedge d\beta. \end{aligned}$$

3. Procédons par récurrence sur le degré k . Si $k = 0$, alors $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$, donc

$$d_x(f^*\alpha) = d_x(\alpha \circ f) = d_{f(x)}\alpha \circ d_x f = f^*(d_{f(x)}\alpha), \quad x \in U.$$

Soit $N \in \mathbf{N}$. Supposons que la formule de l'énoncé soit vraie pour toute k -forme différentielle et pour tout $k \leq N$. Soit $\alpha \in \Omega^{N+1}(U)$ une $N+1$ -forme différentielle de la forme $\alpha = a(y) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_{N+1}}$. Cette dernière peut s'écrire

$$\alpha = a(y) d\tau \quad \text{avec} \quad \tau := y_{i_1} dy_{i_2} \wedge \cdots \wedge dy_{i_{N+1}} \in \Omega^N(U).$$

Avec le point 2 puis le point 1, on obtient

$$d\alpha = d(a d\tau) = da \wedge d\tau + (-1)^{\deg a} a d(d\tau) = da \wedge d\tau.$$

3.6. DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE

Avec l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned} f^*(d\alpha) &= f^*(da \wedge d\tau) = f^* da \wedge f^* d\tau \\ &= d(f^*a) \wedge d(f^*\tau). \end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha \wedge d(f^*\tau)) &= d(f^*a) \wedge d(f^*\tau) (-1)^{\deg f^*a} f^*a \wedge d(d(f^*\tau)) \\ &= d(f^*a) \wedge d(f^*\tau). \end{aligned}$$

Avec l'égalité précédente et l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} f^*(d\alpha) &= d(f^*a \wedge d(f^*\tau)) \\ &= d(f^*a \wedge f^* d\tau) \\ &= df^*(a \wedge d\tau) = d(f^*\alpha). \end{aligned}$$

Cela termine la récurrence. □

Chapitre 4

Orientation des variétés et intégration

4.1 Orientation	18	4.2 Intégration des formes différentielles	20
4.1.1 Atlas d'orientation	18	4.2.1 Intégration sur un ouvert de \mathbf{R}^n	20
4.1.2 Orientation et formes volumes	18	4.2.2 Intégration sur une variété orientable	20

4.1 Orientation

4.1.1 Atlas d'orientation

DÉFINITION 4.1. Soit M une variété. Un *atlas d'orientation* est un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ tel que les changements de cartes aient un jacobien strictement positif, c'est-à-dire tel que, pour tous $i, j \in I$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ et tout $p \in U_i \cap U_j$, on ait

$$\det(d_{\varphi_j(p)}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) > 0.$$

La variété M est *orientable* si elle possède un atlas d'orientation.

▷ EXEMPLE. On munit la sphère \mathbf{S}^2 des deux cartes $(\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}, \varphi_1)$ et $(\mathbf{S}^2 \setminus \{S\}, \varphi_2)$ correspondant respectivement aux projections stéréographiques par rapport aux pôles nord et sud. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, on a

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}$$

et

$$\det(d_{(x,y)}\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) = -\frac{1}{x^2 + y^2} < 0.$$

Donc l'atlas considéré n'est pas d'orientation.

Cependant, on peut remplacer l'application φ_2 par la composée $R \circ \varphi_2$ où l'application R est la réflexion $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Dans ce cas, l'atlas est d'orientation.

DÉFINITION 4.2. Deux atlas d'orientation $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ d'une variété M sont *équivalents* si, pour tous $i \in I$ et $j \in J$ tels que $U_i \cap V_j \neq \emptyset$ et pour tous $p \in U_i \cap V_j$, on a

$$\det(d_{\psi_j(p)}\varphi_i \circ \psi_j^{-1}) > 0.$$

Une *orientation* est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas d'orientation.

◊ REMARQUE. On peut montrer que toute variété connexe orientable possède exactement deux classes d'équivalence d'atlas d'orientations.

4.1.2 Orientation et formes volumes

DÉFINITION 4.3. Soit M une variété de dimension n . Une *forme volume* sur M est une forme différentielle de degré n sur M qui ne s'annule pas.

THÉORÈME 4.4. Soit M une variété de dimension n .

1. Si M possède une forme volume, alors on peut munir l'espace M d'un atlas d'orientation.
2. Si M est orientable et possède une partition de l'unité, alors M possède une forme volume.

Preuve 1. Supposons que la variété M possède une forme volume $\omega \in \Omega^n(M)$. Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas. Quitte à décomposer les ouverts U_i , on peut supposer qu'ils sont connexes et même des boules. Soit $i \in I$. On peut écrire le tiré en arrière $(\varphi_i^{-1})^*\omega$ sous la forme

$$(\varphi_i^{-1})^*\omega = w_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

4.1. ORIENTATION

où la fonction $w_i : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbf{R}$ ne s'annule pas. Comme $\varphi_i(U_i)$ est connexe et w_i ne s'annule pas, cette dernière est soit strictement positive soit strictement négative. Posons

$$\tilde{\varphi}_i := \sigma_i \circ \varphi_i \quad \text{avec} \quad \sigma_i := \begin{cases} R & \text{si } w_i < 0, \\ \text{Id}_{\mathbf{R}^n} & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'application R est la réflexion $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$. Posons également

$$\tilde{w}_i(x) := \begin{cases} -w_i(R(x)) & \text{si } w_i < 0, \\ w_i(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions que la collection $(\tilde{w}_i d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n)_{i \in I}$ définit un élément $\tilde{\omega} \in \Omega^n(M)$. Admettons provisoirement cela. Dans ce cas, les relations de compatibilités donnent

$$\det(d_{\tilde{y}}(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})) = \frac{\tilde{w}_j(\tilde{y})}{\tilde{w}_i(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}(\tilde{y}))} > 0.$$

Cela montre que l'atlas $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ est bien d'orientation.

Il reste à montrer ce qu'on a admis. Il faut vérifier les relations de compatibilités. Ainsi pour tout $\tilde{x} \in U_i$, on a

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})^* \tilde{\omega}_i(x) d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n &= (\tilde{\varphi}_j^{-1})^* (\tilde{\varphi}_i)^* \tilde{\omega}_i(x) d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n \\ &= (\tilde{\varphi}_j^{-1})^* \varphi_i^* \sigma_i^* \tilde{\omega}_i(x) d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n \\ &= (\tilde{\varphi}_j^{-1})^* \varphi_i^* \omega_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (\sigma_j^{-1})^* (\varphi_j^{-1})^* \varphi_i^* \omega_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (\sigma_j^{-1})^* \omega_j(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \quad (\text{relations de compatibilités}) \\ &= \tilde{\omega}_j(\tilde{y}) d\tilde{y}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{y}_n \end{aligned}$$

ce qui termine notre preuve.

2. Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas d'orientation. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M tel que $\overline{V_i} \subset U_i$ pour tout $i \in I$. Pour tout $i \in I$, on considère une fonction $\tilde{\chi}_i : M \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que

$$\text{supp } \tilde{\chi}_i \subset U_i \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}_i = 1 \text{ sur } V_i.$$

Construisons une forme volume $\tilde{\omega}$. Pour $i \in I$, on pose

$$\omega_i := \varphi_i^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \in \Omega^n(U_i) \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_i := \begin{cases} \tilde{\chi}_i \omega_i & \text{sur } U_i, \\ 0 & \text{sur } M \setminus U_i. \end{cases}$$

et on obtient une forme $\tilde{\omega} \in \Omega^n(M)$. Montrons qu'alors l'application $\tilde{\omega} := \sum_{i \in I} \tilde{\omega}_i$ est une forme volume sur M . Comme la famille $(V_i)_{i \in I}$ recouvre M , il suffit de vérifier que, pour tout $i_0 \in I$, la forme $(\varphi_{i_0}^{-1})^* \tilde{\omega} \in \Omega^n(\varphi_{i_0}(V_{i_0}))$ ne s'annule pas. Posons

$$J_0 := \{i \in I \mid U_i \cap U_{i_0} \neq \emptyset\}.$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} (\varphi_{i_0}^{-1})^* \tilde{\omega} &= \sum_{i \in J_0} (\varphi_{i_0}^{-1})^* \tilde{\omega}_i \\ &= \sum_{i \in J_0} (\varphi_{i_0}^{-1})^* (\tilde{\chi}_i \times \varphi_i^*(dx_1^i \wedge \dots \wedge dx_n^i)) \\ &= \tilde{\chi}_{i_0}(\varphi_{i_0}^{-1}(x^{i_0})) (\varphi_{i_0}^{-1})^* \varphi_{i_0}^*(dx_1^{i_0} \wedge \dots \wedge dx_n^{i_0}) + \\ &\quad \sum_{i \in J_0 \setminus \{i_0\}} \tilde{\chi}_i(\varphi_{i_0}^{-1}(x^{i_0})) (\varphi_{i_0}^{-1})^* \varphi_i^*(dx_1^i \wedge \dots \wedge dx_n^i) \\ &= dx_1^{i_0} \wedge \dots \wedge dx_n^{i_0} + \sum_{i \in J_0 \setminus \{i_0\}} \tilde{\chi}_i(\varphi_{i_0}^{-1}(x^{i_0})) \det(d_{x^{i_0}} \varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1}) \times dx_1^{i_0} \wedge \dots \wedge dx_n^{i_0} \\ &= \left(1 + \sum_{i \in J_0 \setminus \{i_0\}} \tilde{\chi}_i(\varphi_{i_0}^{-1}(x^{i_0})) \det(d_{x^{i_0}} \varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1})\right) dx_1^{i_0} \wedge \dots \wedge dx_n^{i_0} \end{aligned}$$

et, comme l'atlas est d'orientation, on a

$$1 + \sum_{i \in J_0 \setminus \{i_0\}} \tilde{\chi}_i(\varphi_{i_0}^{-1}(x^{i_0})) \det(d_{x^{i_0}} \varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1}) > 0.$$

Ceci montrons que la forme $(\varphi_{i_0}^{-1})^* \tilde{\omega}$ ne s'annule pas. Finalement, l'application $\tilde{\omega}$ est une forme volume ce qui conclut. \square

▷ EXEMPLES. – On considère la sphère \mathbf{S}^n . Pour montrer qu'elle est orientable, par le théorème, il suffit de montrer qu'elle possède une forme volume. Définissons le champ radial $X_0: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ et l'inclusion $J: \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. En notant $\eta := i_{X_0}(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$, la forme $J^*\eta$ est une forme volume sur \mathbf{S}^n . En effet, soient $p \in \mathbf{S}^n$ et (v_1, \dots, v_p) une base de $T_p \mathbf{S}^n$. Alors

$$\begin{aligned} (J^*\eta)_p(v_1, \dots, v_p) &= \eta_p(v_1, \dots, v_n) \\ &= dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(X_0(p), v_1, \dots, v_n) \neq 0 \end{aligned}$$

puisque le vecteur $X_0(p)$ est orthogonal aux vecteurs v_i , ces derniers générant $T_p \mathbf{S}^n$. Finalement, on a $(J^*\eta)_p \neq 0$. Cela montre que la n -forme $(J^*\eta)_p$ est une forme volume.

– On peut généraliser cette construction. Soit $F: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ une submersion. Alors la sous-variété $M := \{F = 0\}$ est orientable par la forme volume $J^*(i_{\nabla F}(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}))$.

– Soient M une variété et Γ un groupe agissant de manière lisse, proprement et librement sur M . Notons $p: M \rightarrow M/\Gamma$ la projection.

◦ Soit $\alpha \in \Omega(M/\Gamma)$. La forme $\omega := p^*\alpha$ est invariante sous l'action de Γ , *i. e.* elle vérifie

$$\gamma^*\omega = \omega, \quad \gamma \in \Gamma.$$

◦ Soit $\omega \in \Omega(M)$ une forme invariante sous l'action de Γ . Il existe une unique forme $\alpha \in \Omega(M/\Gamma)$ telle que $p^*\alpha = \omega$. Pour l'unicité, on pourra exploiter le fait $\text{Ker } p^* = \{0\}$. Pour l'existence, on pourra construire des applications $\alpha|_{p(U)}$ pour tout ouvert U de M et montrer que ces applications se recollent bien en une forme α .

Ces deux points mènent aux conséquences suivantes.

- Si M/Γ possède une forme volume, alors M en possède aussi une.
- Si M possède une forme volume invariante sous l'action de Γ , alors M/Γ possède une forme volume.

4.2 Intégration des formes différentielles

4.2.1 Intégration sur un ouvert de \mathbf{R}^n

DÉFINITION 4.5. Soient $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et $\alpha \in \Omega^n(U)$ une forme à support compact. L'intégrale de α sur U est la quantité

$$\int_U \alpha := \int_U a(x) dL(x)$$

où la fonction $a: U \rightarrow \mathbf{R}$ est telle que $\alpha = a(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

PROPOSITION 4.6. Soit $f: U \rightarrow V$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbf{R}^n . Soit $\alpha \in \Omega^n(V)$ une forme à support compact. On suppose que, pour tout $x \in U$, on a $\det(d_x f) > 0$. Alors

$$\int_U f^*\alpha = \int_V \alpha.$$

◊ REMARQUE. En prenant $f := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, cela va nous donner que la définition de l'intégrale ne dépend pas de la carte choisie.

Preuve On note $\alpha = a(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Alors $f^*\alpha = a(f(x)) \det(d_x f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ et il ne reste plus qu'à utiliser la formule du changement de variables qui est valable grâce à notre hypothèse. \square

4.2.2 Intégration sur une variété orientable

DÉFINITION 4.7. Soient M une variété compacte, $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas d'orientation, $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M et $(\chi_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions $M \rightarrow \mathbf{R}_+$ tels que

$$\overline{V_i} \subset U_i, \quad \text{supp } \chi_i \subset U_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \chi_i = 1$$

pour tout $i \in I$. Pour toute forme $\omega \in \Omega^n(M)$, son intégrale sur M est la quantité

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(\chi_i \times \omega).$$

◇ REMARQUE. Cette définition ne dépend pas de l'atlas d'orientation choisi dans la même classe et ne dépend pas de la partition de l'unité choisie.

Chapitre 5

Domaines réguliers et théorèmes de Stokes

5.1 Domaines réguliers	22	5.1.2 Orientation du bord d'un domaine régulier	22
5.1.1 Définition	22	5.2 Théorème de Stokes	24

5.1 Domaines réguliers

5.1.1 Définition

DÉFINITION 5.1. Soit M une variété de dimension m . Un compact $D \subset M$ est un *domaine régulier* s'il satisfait les deux points suivants :

- il est égal à l'adhérence de son intérieur ;
- sa frontière $\partial D := \overline{D} \setminus \overset{\circ}{D}$ est soit vide, soit une sous-variété de dimension $m - 1$.

▷ **EXEMPLES.** - Si M est compacte, alors M est un domaine régulier de M .

- Une boule fermée dans \mathbf{R}^n est un domaine régulier.
- L'hémisphère $\mathbf{S}^2 \cap \{z \geq 0\}$ est un domaine régulier.
- Le carré $[0, 1]^2$ n'est pas un domaine régulier.

LEMME 5.2. Soit $D \subset M$ un domaine régulier de bord non vide. Soit $p \in \partial D$. Alors il existe une carte (U, φ) contenant le point p telle que

$$\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap \{x_1 \leq 0\}$$

où l'on a noté (x_1, \dots, x_n) les coordonnées dans $\mathbf{R}^n \supset \varphi(U)$.

Preuve Comme ∂D est une sous-variété de dimension $m - 1$, par définition d'un sous-variété, il existe une carte (U, φ) de M telle que

$$\varphi(U \cap \partial D) = \varphi(U) \cap \{x_1 = 0\}.$$

Quitte à diminuer l'ouvert U , on peut supposer que l'image $\varphi(U)$ est un boule B centrée en 0 et de rayon $r > 0$. On remarque que l'image $\varphi(U \cap \overset{\circ}{D})$ possède une frontière vide dans $B \setminus \{x_1 = 0\}$. On est donc dans l'un des trois cas suivants.

Premier cas On suppose $\varphi(U \cap \overset{\circ}{D}) = B \setminus \{x_1 = 0\}$. Ce cas ne peut pas se produire. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que ce soit le cas. Comme D est égal à l'adhérence de son intérieur, tous les points de $B \cap \{x_1 = 0\}$ sont dans D : ce sont des limites de points de la partie $B \setminus \{x_1 = 0\} = \varphi(\overset{\circ}{D})$. Alors $\varphi(D \cap U) = B = \varphi(U)$, donc $U \subset D$. Cela rentre en contradiction avec notre hypothèse $p \in U \cap \partial D$ donnant $U \cap \partial D \neq \emptyset$.

Deuxième cas On suppose $\varphi(U \cap \overset{\circ}{D}) = B \cap \{x_1 < 0\}$. En passant à l'adhérence, on obtient

$$\varphi(U \cap D) = B \cap \{x_1 \leq 0\}.$$

Troisième cas On suppose $\varphi(U \cap \overset{\circ}{D}) = B \cap \{x_1 > 0\}$. On fait une réflexion et on se ramène au deuxième cas : on pose $\psi := R \circ \varphi$ avec $R: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ceci termine la preuve. □

5.1.2 Orientation du bord d'un domaine régulier

PROPOSITION 5.3. Soient $D \subset M$ un domaine régulier d'une variété orientable de dimension $n \geq 2$ et $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas tel que les ouverts U_i soient connexes et

$$\varphi_i(U_i \cap D) = \varphi_i(U_i) \cap \{x_1 \leq 0\}, \quad i \in I.$$

Soit $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ un atlas d'orientation. Alors il existe un atlas d'orientation $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ de M

équivalent à l'atlas $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ tel que

$$\tilde{\varphi}_i(U_i \cap D) = \tilde{\varphi}_i(U_i) \cap \{\tilde{x}_1 \leq 0\}, \quad i \in I. \quad (*)$$

Preuve Soit $i \in I$. On considère l'application

$$S_i: \begin{cases} U_i \longrightarrow \{\pm 1\}, \\ p \longmapsto \operatorname{sgn}[\det(d_{\varphi_i(p)}(\psi_j \circ \varphi_i^{-1}))] \end{cases} \text{ avec } j \in J \text{ tel que } p \in V_j.$$

Elle est bien définie. Comme elle est continue et l'ouvert U_i est connexe, on a $S_i = 1$ ou $S_i = -1$ sur U_i . Si $S_i = 1$, on pose $R_i := \operatorname{Id}_{\mathbf{R}^n}$ et $\tilde{\varphi}_i := R_i \circ \varphi_i = \varphi_i$. Si $S_i = -1$, on pose

$$R_i(x_1, \dots, x_n) := (x_1, -x_2, x_3, \dots, x_n)$$

et $\tilde{\varphi}_i := R_i \circ \varphi_i$. Montrons que l'atlas $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ convient. On a

$$\operatorname{sgn}[d_{\tilde{\varphi}_i(p)}(\psi_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1})] = \operatorname{sgn}[d_{\varphi_i(p)}(\psi_j \circ \varphi_i^{-1}) \det R_i] = S_i \operatorname{sgn}[\det R_i] = +1.$$

Ainsi l'atlas $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ est d'orientation et il a la même orientation que l'atlas $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$. Enfin, comme on n'a pas touché à le coordonnées x_1 , la relation $(*)$ est vérifiée. \square

PROPOSITION 5.4. Soient $D \subset M$ un domaine régulier de bord non vide et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ un atlas d'orientation. Soit $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ un atlas d'orientation équivalent à l'atlas $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ vérifiant les relations $(*)$. Pour $i \in I$, notons

$$\xi_i := \tilde{\varphi}_i|_{\partial D}: U_i \cap \partial D \longrightarrow \tilde{\varphi}_i(U_i) \cap \{\tilde{x}_1 = 0\}.$$

Alors

1. la famille $(U_i \cap \partial D, \xi_i)_{i \in I}$ est un atlas d'orientation du bord ∂D ;
2. deux tels atlas d'orientation du bord ∂D , *i. e.* provenant d'un atlas $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ vérifiant les relations $(*)$, sont équivalents.

Preuve 1. On veut montrer que, si $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \partial D \neq \emptyset$, alors

$$\det[d_{(\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)}(\xi_{i_2} \circ \xi_{i_1}^{-1})] > 0, \quad \text{pour tout } (\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \xi_{i_1}(p) \text{ avec } p \in U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \partial D.$$

Rappelons que l'application $\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}$ envoie $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1} \cap \tilde{\varphi}_{i_1}(U_{i_1})$ sur $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1} \cap \tilde{\varphi}_{i_2}(U_{i_2})$, donc sa différentielle au point $\tilde{\varphi}_1(p)$ est de la forme

$$d_{\tilde{\varphi}_1(p)}(\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}) = \begin{pmatrix} \tau & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & & & & \\ \vdots & d_{\xi_{i_1}(p)}(\xi_{i_2} \circ \xi_{i_1}^{-1}) & & & \\ * & & & & \end{pmatrix}$$

et on en déduit

$$\det[d_{\tilde{\varphi}_1(p)}(\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1})] = \tau \det[d_{\tilde{\xi}_1(p)}(\tilde{\xi}_{i_2} \circ \tilde{\xi}_{i_1}^{-1})] > 0.$$

Il reste à montrer $\tau > 0$. Notons $[\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}]_1$ la première coordonnée du difféomorphisme $\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}$. On a

$$\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}(\{\tilde{x}_1^{(i_1)} < 0\}) \subset \{\tilde{x}_1^{(i_2)} < 0\},$$

donc

$$[\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}]_1(-t, 0, \dots, 0) < 0, \quad \forall t > 0 \text{ assez petit.}$$

De plus, en écrivant les taux d'accroissement, on peut

$$\tau = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}]_1(x, 0, \dots, 0)}{x}$$

ce qui, avec ce qui précède, implique

$$\tau = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[\tilde{\varphi}_{i_2} \circ \tilde{\varphi}_{i_1}^{-1}]_1(-t, 0, \dots, 0)}{-t} \geq 0.$$

Comme c'est un difféomorphisme, on trouve $\tau > 0$.

5.2. THÉORÈME DE STOKES

2. Soient $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ et $(W_k, \delta_k)_{k \in K}$ deux atlas d'orientation qui sont équivalents à l'atlas $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ et vérifiant les relations (*), c'est-à-dire

$$\tilde{\varphi}_i(U_i \cap D) = \tilde{\varphi}_i(U_i) \cap \{\tilde{x}_1 \leq 0\} \quad \text{et} \quad \delta_k(W_k \cap D) = \delta_k(W_k) \cap \{\tilde{X}_1 \leq 0\}, \quad i \in I, k \in K.$$

Pour $i \in I$ et $k \in K$, on pose $\xi_i := \tilde{\varphi}_i|_{\partial D}$ et $\Delta_k := \delta_k|_{\partial D}$. On veut montrer que $\det[d(\xi_i \circ \Delta_k^{-1})] > 0$ en tout point de $\Delta_k(\partial D)$. Comme dans le point précédent, le difféomorphisme $\tilde{\varphi}_i \circ \delta_k^{-1}$ envoie $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \delta_k(W_k)$ sur $\{0\} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \tilde{\varphi}_i(U_i)$ et on a $\tilde{\varphi}_i \circ \delta_k^{-1}(\{\tilde{X}_1 \leq 0\}) \subset \{\tilde{x}_1 \leq 0\}$. De même, le nouveau τ est strictement positif et on conclut $\det[d(\xi_i \circ \Delta_k^{-1})] > 0$ en tout point. \square

En résumé, à partir d'une orientation sur la variété M , on munit la variété ∂D d'une orientation « canonique » donnée par la « normale sortante ».

▷ **EXEMPLE.** On travaille dans le plan \mathbf{R}^2 muni de l'orientation $dx \wedge dy$, i. e. on décrète que la base canonique est directe. Notons $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur le plan. On considère le domaine régulier

$$D := \{1 \leq \|x\| \leq 2\}.$$

On peut alors orienter le bord ∂D : le cercle intérieur est orienté dans le sens trigonométrique et le cercle extérieur dans le sens horaire.

◇ **REMARQUE.** Soit $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ un atlas d'orientation vérifiant les relations (*). Pour $i \in I$, on pose

$$\eta_i := \tilde{\varphi}_i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \in \Omega^{n-1}(M).$$

Soit $(\chi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité associée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. Alors l'application

$$\eta := \sum_{i \in I} \chi_i \eta_i$$

définit une forme volume sur chacune des composantes connexes du bord ∂D .

5.2 Théorème de Stokes

THÉORÈME 5.5. Soit M une variété compacte orientée de dimension $n \geq 2$. Soient $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ et $D \subset M$ un domaine régulier. On munit le bord ∂D de l'orientation induite par celle de la variété M . Alors

$$\int_{\partial D} J^* \alpha = \int_D d\alpha$$

où l'application $J: \partial D \rightarrow M$ est l'inclusion.

Preuve Soit $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ un atlas d'orientation compatible avec l'orientation fixée sur la variété M et vérifiant les relations (*). Il suffit de montrer la formule de Stokes pour des formes $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ dont le support est inclus dans l'un des ouverts U_i . En effet, il suffit de considérer la forme $\sum_{i \in I} \chi_i \alpha$ qui vérifie

$$\int_{\partial D} J^* \alpha = \sum_{i \in I} \int_{\partial D} J^* (\chi_i \alpha)$$

pour une partition de l'unité $(\chi_i)_{i \in I}$ et on se ramène au cas où le support est inclus dans l'un des ouverts U_i . Soit donc $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ une forme dont le support est inclus dans l'un des ouverts U_i . On pose $\alpha_i := \chi_i \alpha$.

• *Premier cas.* On suppose $U_i \cap \partial D = \emptyset$. Comme $\partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$, on peut écrire

$$U_i = (U_i \cap \overset{\circ}{D}) \sqcup (U_i \cap M \setminus D)$$

où les deux ensembles de cette réunion disjointe sont des ouverts. Par connexité de U_i , on est mené à traiter deux cas.

– On suppose $U_i \subset M \setminus D$. Comme $\text{supp } \alpha_i \subset U_i$, on a $\alpha = 0$ sur D . Cela entraîne que $d\alpha = 0$ sur ∂D . Dans ce cas, la formule de Stokes est triviale.

5.2. THÉORÈME DE STOKES

– On suppose $U_i \subset \mathring{D}$. Comme $\text{supp } \alpha \subset U_i$, on a $\text{supp } \alpha_i \cap \partial D = \emptyset$ ce qui assure $\int_{\partial D} J^* \alpha = 0$. Montrons alors que $\int_D d\alpha = 0$. Avec un changement de cartes, comme $\text{supp } \alpha \subset D$, on a

$$\begin{aligned} \int_D d\alpha &= \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(d\alpha) \\ &= \int_{\varphi_i(U_i)} d((\varphi_i^{-1})^* \alpha) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} d((\varphi_i^{-1})^* \alpha) \end{aligned}$$

où l'on a prolongé la forme $(\varphi_i^{-1})^* \alpha \in \Omega^{n-1}(\varphi_i(U_i))$ est une forme sur \mathbf{R}^n . Écrivons cette dernière sous la forme

$$(\varphi_i^{-1})^* \alpha = \sum_{k=1}^n a_k(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

de telle sorte que sa différentielle vaille

$$d((\varphi_i^{-1})^* \alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_k} (-1)^{k-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

En intégrant, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^n} d((\varphi_i^{-1})^* \alpha) = \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_n) (-1)^{k-1} dL(x_1, \dots, x_n).$$

En réinjectant dans notre expression précédente et en utilisant le théorème de Fubini, on trouve

$$\int_D d\alpha = \sum_{k=1}^n \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_n) (-1)^{k-1} dL(x_k) \right) dL(x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n) = 0.$$

car les fonctions a_k sont à support compact dans \mathbf{R}^n . Ceci conclut le premier cas.

• *Second cas.* On suppose $U_i \cap \partial D \neq \emptyset$. Calculons d'abord l'intégrale $\int_D d\alpha$. Comme précédemment, on trouve

$$\int_D d\alpha = \int_{\varphi_i(U_i \cap \partial D)} d((\varphi_i^{-1})^* \alpha) = \int_{\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^{n-1}} d((\varphi_i^{-1})^* \alpha)$$

où l'on a prolongé la forme $(\varphi_i^{-1})^* \alpha \in \Omega^{n-1}(\varphi_i(U_i))$ par zéro sur $\mathbf{R}^n \setminus \varphi_i(\text{supp } \alpha)$. En reprenant les mêmes notations, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^{n-1}} d((\varphi_i^{-1})^* \alpha) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbf{R}_-} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} (x_1, \dots, x_n) dL(x_1) \right) dL(x_2, \dots, x_n) + \\ &\quad \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} \int_{\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}^{n-2}} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_n) dL(x_k) \right) dL(x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

où la dernière somme est nulle. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_D d\alpha &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (a_1(0, x_2, \dots, x_n) - a_1(-\infty, x_2, \dots, x_n)) dL(x_2, \dots, x_n) \\ &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_n) dL(x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Calculons l'autre intégrale $\int_{\partial D} J^* \alpha$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} J^* \alpha &= \int_{\varphi_i(U_i \cap \partial D)} (\varphi_i|_{\partial D}^{-1})^*(J^* \alpha) \\ &= \int_{\varphi_i(U_i \cap \partial D)} j^*(\varphi_i^{-1})^* \alpha \end{aligned}$$

en notant $j: \{x_1 = 0\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'inclusion. D'où

$$\int_{\partial D} J^* \alpha = \int_{\varphi_i(U_i \cap \partial D)} \sum_{k=1}^n a_k(0, x_2, \dots, x_n) j^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

5.2. THÉORÈME DE STOKES

$$= \int_{\varphi_i(U_i \cap \partial D)} a_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

car $j^*(dx_1) = 0$ et $j^*(dx_k) = dx_k$ pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Étant donné l'orientation du bord, on obtient finalement

$$\int_{\partial D} J^* \alpha = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_n) dL(x_2, \dots, x_n).$$

Ceci conclut le second cas. □

COROLLAIRE 5.6. Pour toute forme $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, on a

$$\int_M d\alpha = 0.$$

Preuve Comme la variété M est compacte, on a $\partial M = \emptyset$ et il suffit d'utiliser le théorème de Stokes. □

- ◇ REMARQUE. Cela implique qu'une forme volume d'une variété compacte orientable ne peut être exacte, *i. e.* elle ne peut s'écrire comme la différentielle d'une forme. Cette remarque n'est pas vraie dans le cas général : il existe des variétés non compactes ayant des formes volumes exactes. En effet, il suffit de considérer la variété \mathbf{R}^2 avec la forme volume $dx \wedge dy = d(xy)$.

Chapitre 6

Cohomologie de de Rham

6.1 Formes fermées, formes exactes, lemme de Poincaré	27	6.2 Cohomologie de de Rham	28
6.1.1 Définition	27	6.2.1 Introduction	28
6.1.2 Lemme de Poincaré	27	6.2.2 Cohomologie du cercle	28
		6.2.3 Cohomologie en degré maximal	29

6.1 Formes fermées, formes exactes, lemme de Poincaré

6.1.1 Définition

DÉFINITION 6.1. Soient M une variété de dimension n et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Une forme $\alpha \in \Omega^k(M)$ est

- *fermée* si $d\alpha = 0$;
- *exacte* s'il existe une forme $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ telle que $\alpha = d\beta$.

◇ **REMARQUE.** Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée.

▷ **EXEMPLES.** – On se place sur \mathbf{R} . Toute forme $\alpha := f(x) dx \in \Omega^1(\mathbf{R})$ est exacte puisque $\alpha = d\beta$ pour une primitive β de f .
 – Une forme $\alpha := a(x, y) dx + b(x, y) dy \in \Omega^1(\mathbf{R}^2)$ est fermée si et seulement si $\partial_x b = \partial_y a$. Cette remarque se généralise à la dimension supérieure.

6.1.2 Lemme de Poincaré

LEMME 6.2 (Poincaré). Sur \mathbf{R}^n , toute 1-forme fermée est exacte. Plus précisément, pour toute forme fermée $\alpha \in \Omega^1(\mathbf{R}^n)$, la fonction

$$F: x \in \mathbf{R}^n \mapsto \int_{\gamma_x} \alpha$$

vérifie $dF = \alpha$ où l'on a noté

$$\gamma_x: t \in [0, 1] \mapsto tx \in \mathbf{R}^n, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Preuve Rappelons que, pour tout point $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on a

$$F(x) = \int_{\gamma_x} \alpha = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \alpha_i(tx) x_i dt$$

où l'on a noté

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i.$$

En différentiant, on obtient

$$\begin{aligned} dF &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \int_0^1 t \partial_j \alpha_i(tx) dt dx_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \int_0^1 t \partial_i \alpha_j(tx) dt dx_j \right) \quad (\text{cf. la remarque précédente}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 tx_i \partial_i \alpha_j(tx) dt \right) dx_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n tx_i \partial_i \alpha_j(tx) \right) dx_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{j=1}^n \int_0^1 t \frac{d}{dt} [\alpha_j(tx)] dx_j \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx_i + \sum_{j=1}^n \left([t\alpha_j(tx)]_0^1 - \int_0^1 \alpha_j(tx) dt \right) dx_j \quad (\text{IPP}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j = \alpha. \quad \square
 \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.3. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert étoilé. Soit $\alpha \in \Omega^1(U)$ une forme fermée. On considère l'application

$$Ts: \begin{cases} U \longrightarrow U, \\ x \longmapsto sx \end{cases}$$

pour un réel $s \in [0, 1]$. Alors la fonction

$$F_s: \begin{cases} U \longrightarrow \mathbf{R}, \\ x \longmapsto \int_{[sx, x]} \alpha \end{cases}$$

vérifie

$$dF_s = \alpha - T_s^* \alpha.$$

Preuve La preuve est immédiate avec le lemme de Poincaré. \square

THÉORÈME 6.4. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert étoilé. Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, toute forme fermée $\alpha \in \Omega^p(U)$ est exacte

Preuve Sans donner de détails, on a $\alpha = d\beta$ où la forme β est définie par la relation

$$\beta_x(v_0, \dots, v_{p-1}) = \int_0^1 t^{p-1} \alpha_{tx}(x, v_1, \dots, v_{p-1}) dt. \quad \square$$

6.2 Cohomologie de de Rham

6.2.1 Introduction

Soit M une variété de dimension n . Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $F^k(M) \subset \Omega^k(M)$ et $E^k(M) \subset \Omega^k(M)$ les sous-espaces vectoriels constitués respectivement des formes fermées et exactes. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On sait déjà que $E^k(M) \subset F^k(M)$ et on définit l'espace vectoriel quotient

$$H^k(M) := F^k(M)/E^k(M).$$

Par convention, on pose $H^0(M) := F^0(M)$: c'est l'espace des fonctions localement constante de M dans \mathbf{R} . L'ensemble $H^k(M)$ est appelé le k -ième groupe de cohomologie de M . Pour $\alpha \in F^k(M)$, on note $[\alpha]$ sa classe dans $H^k(M)$. Deux formes de $F^k(M)$ dans la même classe de cohomologie sont dites *cohomologue*.

▷ EXEMPLE. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert étoilé. Le lemme de Poincaré nous donne alors $H^k(U) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

6.2.2 Cohomologie du cercle

On rappelle que l'ensemble $\Omega^0(\mathbf{S}^1)$ est constituée des fonctions lisses de \mathbf{S}^1 dans \mathbf{R} . Le cercle \mathbf{S}^1 peut être vu comme le quotient \mathbf{R}/\mathbf{Z} , donc on peut identifier l'ensemble $\Omega^0(\mathbf{S}^1)$ à l'ensemble des fonctions 1-périodiques de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Ainsi l'ensemble $\Omega^1(\mathbf{S}^1)$ peut se réécrire comme

$$\Omega^1(\mathbf{S}^1) = \{a(x) dx \in \Omega^1(\mathbf{R}) \mid a \in \Omega^0(\mathbf{S}^1)\}.$$

Comme \mathbf{S}^1 est connexe, l'ensemble $H^0(\mathbf{S}^1)$ est constituée des fonctions constantes sur \mathbf{S}^2 .

(i) Calculer du premier groupe de cohomologie

Comme $\dim \mathbf{S}^1 = 1$, on sait déjà que $F^1(\mathbf{S}^1) = \Omega^1(\mathbf{S}^1)$.

THÉORÈME 6.5. Une forme $\alpha \in \Omega^1(\mathbf{S}^1)$ est exacte si et seulement si son intégrale sur \mathbf{S}^1 est nulle.

Preuve On suppose que la forme α est exacte. Il existe une fonction $\beta \in \Omega^0(\mathbf{S}^1)$ telle que $\alpha = d\beta$. Comme $\partial\mathbf{S}^1 = \emptyset$, le théorème de Stokes assure que

$$\int_{\mathbf{S}^1} \alpha = \int_{\partial\mathbf{S}^1} d\beta = 0.$$

Réciproquement, on suppose $\int_{\mathbf{S}^1} \alpha = 0$. Soit $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ la projection. Il existe alors une fonction 1-périodique $a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $p^*\alpha = a(x) dx$. On choisit l'orientation définie par la forme dx sur \mathbf{R} . Pour $x \in \mathbf{R}$, posons

$$f(x) := \int_{[0,x]} p^*\alpha = \int_0^x a(t) dL(t).$$

Alors $df(x) = a(x) dx$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \int_0^x a(t) dL(t) + \int_x^{x+1} a(t) dL(t) \\ &= f(x) \pm \int_{\mathbf{S}^1} \alpha = f(x). \end{aligned}$$

On a donc construit une fonction 1-périodique $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $df = p^*\alpha$. On peut alors trouver une fonction $\tilde{f}: \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $d\tilde{f} = \alpha$. En conclusion, la forme α est exacte. \square

COROLLAIRE 6.6. Fixons une orientation sur le cercle \mathbf{S}^1 . Alors l'application linéaire

$$\varphi: \begin{cases} F^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow \mathbf{R}, \\ \alpha \mapsto \int_{\mathbf{S}^1} \alpha \end{cases}$$

induit un isomorphisme

$$\tilde{\varphi}: H^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow \mathbf{R}.$$

Preuve Soit $\gamma \in \Omega^1(\mathbf{S}^1)$ l'unique 1-forme sur \mathbf{S}^1 telle que $p^*\gamma = dt$. Si le cercle est orienté dans le sens trigonométrique, alors

$$\varphi(\gamma) = \int_{\mathbf{S}^1} \gamma = \pm \int_{]0,1[} p^*\gamma = \int_{]0,1[} dt = 1.$$

Ceci montre que $\text{Im } \varphi = \mathbf{R}$. Par conséquent, on obtient un isomorphisme $\tilde{\varphi}: H^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow \mathbf{R}$. \square

◇ REMARQUE. Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathbf{S}^1)$. Alors la forme

$$\alpha - \left(\int_{\mathbf{S}^1} \alpha \right) \gamma$$

est d'intégrale nulle, donc elle est exacte. Cela signifie que les deux formes α et $\left(\int_{\mathbf{S}^1} \alpha \right) \gamma$ sont cohomologues sur \mathbf{S}^1 .

6.2.3 Cohomologie en degré maximal

THÉORÈME 6.7. Soit M une variété compacte, connexe et orientable. Une orientation étant choisie, l'application linéaire

$$\varphi: \begin{cases} \Omega^n(M) \rightarrow \mathbf{R}, \\ \alpha \mapsto \int_M \alpha \end{cases}$$

induit un isomorphisme

$$\tilde{\varphi}: \mathbf{H}^n(M) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

LEMME 6.8. Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas d'orientation de M . Soit U un ouvert contenu dans l'un des ouverts U_i . Alors il existe une forme $\sigma \in \Omega^n(M)$ telle que

$$\text{supp } \sigma \subset U \quad \text{et} \quad \int_M \sigma = 1.$$

Preuve Soit $\chi: \varphi_i(U_i) \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ dont le support est contenu dans $\varphi_i(U)$ et telle que

$$\int_U \chi \, dL = 1.$$

Il suffit alors de considérer la forme

$$\sigma := \begin{cases} \varphi_i^*(\chi \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) & \text{sur } U_i, \\ 0 & \text{sur } M \setminus U_i. \end{cases} \quad \square$$

Dans la suite, on fixe un entier $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et une forme $\sigma_0 \in \Omega^n(M)$ telle que

$$\text{supp } \sigma_0 \subset U_{i_0} \quad \text{et} \quad \int_M \sigma_0 = 1.$$

PROPOSITION 6.9. Soit $\alpha \in \Omega^n(M)$ une forme. Alors il existe une forme $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ telle que

$$\alpha - \left(\int_M \alpha \right) \sigma_0 = d\beta.$$

Preuve Il suffit de montrer la proposition pour les formes $\alpha \in \Omega^n(M)$ dont le support est contenu dans l'un des ouverts U_i . En effet, soit $\alpha \in \Omega^n(M)$. Prenons une partition de l'unité $(\chi_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ associé à l'atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. On peut alors écrire $\alpha = \sum_{i=1}^N \chi_i \alpha$. Si la propriété est établie pour les formes $\chi_i \alpha$, alors il suffit de sommer pour obtenir la propriété sur la forme α .

Soit $i_1 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ un entier tel que $\text{supp } \alpha \subset U_{i_1}$. Soient $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ des entiers tels que

$$U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset, \quad \dots, \quad U_{i_k} \cap U_{i_0} \neq \emptyset.$$

[À TERMINER] □

PROPOSITION 6.10. Soient $U \subset \mathbf{R}^k$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^\infty(]0, 1[^n \times U)$. On suppose que, pour tout point $u \in U$, le support $\text{supp } f(\cdot, \dots, \cdot, u)$ est un compact de $]0, 1[^n$ et on a

$$\int_{]0, 1[^n} f(x_1, \dots, x_n, u) \, dL(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

On pose

$$\alpha: \begin{cases} U \longrightarrow \Omega^n(]0, 1[^n), \\ u \longmapsto f(x_1, \dots, x_n, u) \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{cases}$$

Alors il existe une famille lisse $\beta: U \longrightarrow \Omega^{n-1}(]0, 1[^n)$ telle que, pour tout point $u \in U$, on ait

$$d\beta(u) = \alpha(u) \quad \text{et} \quad \text{supp } \beta_u \subset I_n \text{ soit compact.}$$

COROLLAIRE 6.11. On suppose que la forme $\alpha \in \Omega^n(]0, 1[^n)$ est à support compact et vérifie $\int_{]0, 1[^n} \alpha = 0$. Alors il existe une forme $\beta \in \Omega^{n-1}(]0, 1[^n)$ à support compact telle que $\alpha = d\beta$.