Dernière édition : 23 avril 2020 Notes prises par Téofil ADAMSKI

# FONCTIONS HOLOMORPHES

(HOLO)

Anna LENZHEN

L3 maths recherche Université de Rennes 1

# *Chapitre 1*
# DÉRIVABILITÉ COMPLEXE



## 1.1 DÉFINITIONS

RAPPEL. Une partie $D \subset \mathbf{C}$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ si

$$\forall z_0 \in \mathbf{C}, \exists \delta > 0, \quad \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subset D.$$

DÉFINITION 1.1. Soit $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbf{C}$ admet $A \in \mathbf{C}$ pour limite en $c \in \overline{D}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D, \quad |z - c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - a| < \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{z \to c} f(z) = A$ ou $f(z) \to A$ quand $z \to c$.

DÉFINITION 1.2. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbf{C}$ est dérivable ou $\mathbf{C}$-dérivable en $c \in D$ si

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

admet une limite quand $z \to c$. Dans ce cas, on note $f'(c)$ cette limite.

▷ EXEMPLES. 1. Les fonctions constantes sont dérivables en tout $c \in \mathbf{C}$.
2. On considère la fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Cette fonction n'est dérivable en aucun point. En effet, soient $z, c \in \mathbf{C}$. Si $z - c \in \mathbf{R}$, alors

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \frac{\overline{z - c}}{z - c} = 1.$$

Si $z - c = ih \in i\mathbf{R}$, alors

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \frac{\overline{z - c}}{z - c} = \frac{-ih}{ih} = -1.$$

Donc le quotient n'admet pas de limite quand $z \to c$, *i. e.* la fonction n'est pas dérivable en $c$.
3. Les fonctions $z \longmapsto \operatorname{Re} z$, $z \longmapsto \operatorname{Im} z$ et $z \longmapsto |z|$ ne sont dérivables en aucun point.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction $f : z \in \mathbf{C} \longmapsto z^n \in \mathbf{C}$ est dérivable. En effet, soient $z, c \in \mathbf{C}$. On pose $h = z - c$. On a

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(c)}{z - c} &= \frac{(c + h)^n - c^n}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k c^{n-k} - c^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} c^{n-k} \xrightarrow[z \to c]{} nc^{n-1},\end{aligned}$$

donc $f'(c) = nc^{n-1}$.

THÉORÈME 1.3. Soient $f : D \to \mathbf{C}$ et $c \in D$. Si $f$ est dérivable en $c$, alors $f$ est continue en $c$.

CONVENTION. Soit $f : D \to \mathbf{C}$. On pose $u := \operatorname{Re} f$ et $v := \operatorname{Im} f$ de sorte que $f = u + iv$. On peut voir $u$ et $v$ comme des fonctions $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + iy \in D\} \to \mathbf{C}$ en utilisant l'isomorphisme

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C} \\ (x, y) \longmapsto x + iy.\end{array}\right.$$

PROPOSITION 1.4 *(équations de* CAUCHY-RIEMANN*)*. Soient $c \in D$ et $f : D \to \mathbf{C}$ dérivable en $c$. Alors les dérivées partielles de $u$ et $v$ par rapport à $x$ et $y$ existent en $c = (a, b)$ et elles vérifient

$$u_x(c) = v_y(c) \quad \text{et} \quad u_y(c) = -v_x(c).$$

*Preuve* On note $c = a + ib$ avec $a, b \in \mathbf{R}$. D'une part, on a

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbf{R}}} \frac{u(c + h) + iv(c + h) - u(c) - iv(c)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{u(c+h)-u(c)+i[v(c+h)+v(c)]}{h}\\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{u(c+h)-u(c)}{h} + i \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{v(c+h)+v(c)}{h}\\
&= u_x(c)+iv_x(c).
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+ih)-f(c)}{ih} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{u(c+ih)+iv(c+ih)-u(c)-iv(c)}{ih}\\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{u(c+ih)-u(c)+i[v(c+ih)+v(c)]}{ih}\\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{v(c+ih)-v(c)}{h} - i \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{u(c+ih)+u(c)}{h}\\
&= v_y(c)-iu_y(c).
\end{aligned}
$$

□

LEMME 1.5 *(lien avec la différentiabilité).* Soit $A := (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Alors cette matrice $A$ définit une application $\mathbf{R}$-linéaire $T\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ telle que

$$\forall x,y\in\mathbf{R},\quad T(x+iy) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = a_{1,1}x+a_{1,2}y+i(a_{2,1}x+a_{2,2}y).$$

Alors l'application $T$ est $\mathbf{C}$-linéaire si et seulement si $a_{1,1}=a_{2,2}$ et $a_{1,2}=-a_{2,1}$.

*Preuve* On suppose que $T$ est $\mathbf{C}$-linéaire. Alors pour tous $c,z\in\mathbf{C}$, on a $T(cz)=cT(z)$. En particulier, pour $c=i$ et $z=1$, on a $T(i)=iT(1)$, donc $a_{1,2}+ia_{2,2}=ia_{1,1}-a_{2,1}$, donc $a_{1,1}=a_{2,2}$ et $a_{1,2}=-a_{2,1}$.

Réciproquement, on suppose que $\alpha := a_{1,1}=a_{2,2}$ et $\beta := a_{1,2}=-a_{2,1}$. Pour tous $x,y\in\mathbf{R}$, on a

$$T(x+iy) = \alpha x-\beta y+i(\beta x+\alpha y) = (\alpha+i\beta)(x+iy),$$

*i. e.* l'application $T$ est $\mathbf{C}$-linéaire. □

◇ REMARQUE. On rappel que, si $f=(u,v)\colon D\to\mathbf{C}$ est différentiable en $c\in\mathbf{C}$, alors sa différentielle en $c$ s'écrit

$$\forall h\in\mathbf{C},\quad df(c)(h) = \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c)\\ v_x(c) & v_y(x)\end{pmatrix} h$$

en identifiant matrice et application linéaire. En prenant $\mathbf{C}\simeq\mathbf{R}^2$, si $f$ est dérivable en $c=a+ib\in\mathbf{C}$, alors

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)-f'(c)h}{h} = 0,$$

alors la fonction $f$ vue comme une fonction de deux variables est différentiable et sa différentielle est $\mathbf{C}$-linéaire.

THÉORÈME 1.6. Soit $f\colon D\to\mathbf{C}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) la fonction $f$ est $\mathbf{C}$-dérivable en $c\in D$ ;
(ii) la fonction $f$ est différentiable en $c$ et la différentielle $df(c)$ est $\mathbf{C}$-linéaire ;
(iii) la fonction $f$ est différentiable en $c$ et satisfait les équations de CAUCHY-RIEMANN.

THÉORÈME 1.7. Soient $D\subset\mathbf{R}^2$ et $u,v\colon D\to\mathbf{R}$. Si les fonctions $u$ et $v$ possèdent des dérivées partielles continues et vérifient les équations $u_x=v_y$ et $u_y=-iv_x$, alors la fonction $u+iv$ est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point de $D\subset\mathbf{C}$.

▷ EXEMPLES. – On note $f\colon z\in\mathbf{C}\longmapsto x^5y^2+ix^2y^2$. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ tel que $f$ soit $\mathbf{C}$-dérivable en $(x,y)$. Alors l'équation $u_x(x,y)=v_y(x,y)$ est vérifiée. L'équation $u_y(x,y)=-v_x(x,y)$ donne $2x^3y=-2xy^3$, donc $x=0$ ou $y=0$. On en déduit que $f$ est $\mathbf{C}$-dérivable sur $\{z\in\mathbf{C}\mid \operatorname{Re} z=0 \text{ ou } \operatorname{Im} z=0\}$.
– La fonction $z\in\mathbf{C}\longmapsto e^z$ vérifie bien les équations de CAUCHY-RIEMANN, donc elle est $\mathbf{C}$-dérivable sur $\mathbf{C}$.

## 1.2 FONCTIONS HARMONIQUES

DÉFINITION 1.8. Une fonction $u\colon D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ est *harmonique* si elle satisfait l'équation de LAPLACE

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

◇ REMARQUE. Soit $f\colon D \to \mathbf{C}$ une fonction $\mathbf{C}$-dérivable. Alors $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. On suppose que les dérivées partielles secondes de $u$ et $v$ existent et sont continues. Alors $u$ et $v$ sont harmoniques. En effet, il suffit de calculer les dérivées secondes et d'utiliser le théorème de SCHWARZ.

EXERCICE 1.1. Montrons qu'il existe une fonction $\mathbf{C}$-dérivable $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tel que $u = \operatorname{Re} f$.

## 1.3 FONCTIONS HOLOMORPHES

DÉFINITION 1.9. Soit $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction $f\colon D \to \mathbf{C}$ est *holomorphe* en un point $c \in D$ si elle est $\mathbf{C}$-dérivable sur un voisinage de $c$. Elle est holomorphe sur $D$ si elle est holomorphe en tout point de $D$.

NOTATION. On note $\mathrm{H}(D)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $D$.

▷ EXEMPLE. La fonction $f\colon z \in \mathbf{C} \longmapsto x^3y^2 + ix^2y^3$ n'est holomorphe en aucun point.

PROPOSITION 1.10. Soient $f, g\colon D \to \mathbf{C}$ holomorphes et $\alpha \in \mathbf{C}$. Alors

1. la fonction $\alpha f + g$ est holomorphe et $(\alpha f + g)' = \alpha f' + g'$ ;
2. la fonction $fg$ est holomorphe et $(fg)' = f'g + fg'$ ;
3. si $g$ ne s'annule pas, alors la fonction $f/g$ est holomorphe et $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ ;
4. si $f(D) \subset D'$ avec $g\colon D' \to \mathbf{C}$ holomorphe, alors la fonction $g \circ f$ est holomorphe et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

THÉORÈME 1.11. Soit $f\colon D \to \mathbf{C}$. Alors $f$ est holomorphe et $f' = 0$ si et seulement si $f$ est localement constante.

*Preuve* Le sens réciproque est évident. On suppose que $f$ est holomorphe et $f = 0$. Alors $u_x = v_y = 0$ et $u_y = -v_x = 0$, donc $u_x = u_y = 0$ et $v_x = v_y = 0$, donc $u$ et $v$ sont constantes, donc $f$ est localement constante. □

LEMME 1.12. On reprend l'application $T$ de la page précédente, *i. e.*

$$T : \left|\begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ h \longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h \\ \operatorname{Im} h \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ tel que $T(h) = \lambda h + \mu \overline{h}$ pour tout $h \in \mathbf{C}$.

*Preuve* On pose

$$\mu := \frac{1}{2}[T(1) + iT(i)] \quad \text{et} \quad \lambda := \frac{1}{2}[T(i) - iT(i)]$$

et on vérifie que ces deux complexes fonctionnent. □

DÉFINITION 1.13. Soit $f\colon D \to \mathbf{C}$ différentiable en $c \in D$. Pour $h \in \mathbf{C}$, on pose

$$Tf(i)(h) := \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(x) & v_y(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h \\ \operatorname{Im} h \end{pmatrix}.$$

On définit

$$\begin{aligned} f_x(c) &:= Tf(c)(1) = u_x(c) + iv_x(c), \\ f_y(c) &:= Tf(c)(i) = u_y(c) + iv_y(c), \\ f_z(c) &:= \lambda = \frac{1}{2}[f_x(c) - if_y(c)], \\ f_{\overline{z}}(c) &:= \mu = \frac{1}{2}[f_x(c) + if_y(x)]. \end{aligned}$$

Avec ces nouvelles notations, les équations de CAUCHY-RIEMANN deviennent

$$if_x = f_y.$$

THÉORÈME 1.14. Soit $f\colon D \to \mathbf{C}$ différentiable. Alors $f$ est holomorphe si et seulement si

$$f_{\overline{z}}(c) = 0, \quad \forall c \in D.$$

◇ REMARQUE. La fonction $\overline{f} = u - iv$ est holomorphe si et seulement si $u_x = -v_y$ et $u_y = v_x$ si et seulement si

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$$

$$= \frac{1}{2}(u_v + i v_x - i[u_y + i v_y])$$
$$= \frac{1}{2}(u_x + v_y + i[v_y - u_y]) = 0.$$

EXERCICE 1.2. Montrer que $\overline{f}'(c) = \overline{f_{\overline{z}}}(c)$.

## 1.4 CONSERVATION DES ANGLES

Pour $w, z \in \mathbf{C}$, on pose
$$\langle w, z\rangle := \operatorname{Re} x \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} w \operatorname{Im} z \leqslant |w|\,|z|.$$
Alors l'angle $\varphi$ entre $z$ et $w$ vérifie
$$\cos\varphi = \frac{\langle w, z\rangle}{|z|\,|w|}.$$
Une application $\mathbf{R}$-linéaire $T : C \to \mathbf{R}$ converse les angles si
$$\frac{\langle T(w), T(z)\rangle}{|T(w)|\,|T(z)|} = \frac{\langle w, z\rangle}{|z|\,|w|}, \quad \forall w, z \in \mathbf{C}.$$
On rappel que $T$ peut s'écrire $T(z) = \lambda z + \mu\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

LEMME 1.15. Alors $T$ conserve les angles si et seulement si ($\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$) ou ($\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$).

*Preuve* Pour tous $w, z \in \mathbf{C}$, on a
$$\begin{aligned}\langle T(z), T(w)\rangle &= \operatorname{Re}(T(z)\overline{T(w)}) \\ &= \operatorname{Re}((\lambda z + \mu\overline{z})(\overline{\lambda}\overline{w} + \overline{\mu}w)) \\ &= (|\lambda|^2 + |\mu|^2)\operatorname{Re}(z\overline{w}) + 2\operatorname{Re}(\lambda\overline{\mu}wz) \\ &= (|\lambda|^2 + |\mu|^2)\langle z, w\rangle + 2\operatorname{Re}(\lambda\overline{\mu}wz).\end{aligned}$$
On suppose que $T$ conserve les angles. Alors pour $z = 1$ et $w = i$, on a
$$\frac{\langle T(1), T(i)\rangle}{|T(1)|\,|T(i)|} = 0,$$
donc $\langle T(1), T(i)\rangle = 0$, donc $\operatorname{Re}(\lambda\overline{\mu}1i) = 0$, donc $\lambda$ et $\overline{\mu}$ appartient à $\mathbf{R}$. De même, pour $z = 1 + i$ et $w = 1 - i$, on a $\operatorname{Re}(\lambda\overline{\mu}(1+i)(1-i)) = 0$, donc $\operatorname{Re}(\lambda\overline{\mu}) = 0$, donc $\lambda\overline{\mu} \in i\mathbf{R}$. On en déduit que $\lambda\overline{\mu} = 0$, donc $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$. Les deux complexes $\lambda$ et $\mu$ ne peuvent être égaux à 0.

Réciproquement, on vérifie que $T$ conserve bien les angles. □

DÉFINITION 1.16. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbf{C}$ conserve les angles en un point $c \in D$ si elle est différentiable en $c$ et si sa différentielle $df(c)$ conserve les angles.

PROPOSITION 1.17. 1. Si $f$ est $\mathbf{C}$-dérivable et $f'$ ne s'annule pas, alors $f$ conserve les angles.
2. Si $\overline{f}$ est $\mathbf{C}$-dérivable et $\overline{f}'$ ne s'annule pas, alors $f$ conserve les angles.

DÉFINITION 1.18. On dit qu'une fonction $f : D \to C$ est *anti-holomorphe* si $\overline{f}$ est holomorphe.

THÉORÈME 1.19. Soient $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$. On suppose que $u_x$, $u_y$, $v_x$ et $v_y$ existent et sont continues. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est holomorphe sur $D$ et $f'$ ne s'annule pas ou $f$ est anti-holomorphe sur $D$ et $\overline{f}'$ ne s'annule ;

(ii) $f$ conserve les angles sur $D$.

*Preuve* Le sens direct vient de la proposition précédente. Réciproquement, on suppose que $f$ conserve les angles. On considère
$$g(x) := \frac{f_z(c) - f_{\overline{z}}(c)}{f_z(c) + f_{\overline{z}}(c)} = \begin{cases} 1 & \text{si } f_{\overline{z}}(c) = 0, \\ 0 & \text{si } f_z(c) = 0.\end{cases}$$
Comme $g$ est continue et $D$ est un connexe, on a $g = 1$ ou $g = -1$. Donc $f$ converge les angles. □

Soient $f : D \to \mathbf{C}$ différentiable, $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ et $t_0 \in [a, b]$. On pose $c := \gamma(t_0)$ et on note $\gamma = x + iy$ où les fonctions $x$ et $y$ sont à valeurs réelles. Alors $\gamma$ est différentiable en $t_0$ si et seulement si $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ existent. Dans ce cas, on a $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$. On considère la composée
$$f \circ \gamma : \left| \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \quad t \longmapsto u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)). \end{array}\right.$$

Alors

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)'(t_0) &= u_x(c)x'(t_0)+u_y(x)y'(t_0)+i(v_x(c)x'(t_0)+v_y(c)y'(t_0))\\ &= \begin{pmatrix}u_x(c) & u_y(c)\\ v_x(c) & v_y(c)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'(t_0)\\ y'(t_0)\end{pmatrix} = Tf(c)(\gamma(t_0)).\end{aligned}$$

Maintenant, on considère deux chemins différentiables $\gamma_1$ et $\gamma_2$ tel que $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)=c$. On définit l'angle entre $\gamma_1$ et $\gamma_2$ comme la quantité $\langle\gamma_1'(t_0),\gamma_2'(t_0)\rangle$.

PROPOSITION 1.20. Si $f$ est holomorphe en $c$ et $f'(c)\neq 0$ ou $\overline{f}$ est holomorphe en $c$ avec $\overline{f}'(c)\neq 0$, alors l'angle entre $\gamma_1$ et $\gamma_2$ en $c$ et l'angle entre $f(\gamma_1)$ et $f(\gamma_2)$ en $c$ sont égaux.

## 1.5 APPLICATIONS BIHOLOMORPHES

DÉFINITION 1.21. Une application $f\in \mathrm{H}(D)$ est dite *biholomorphe* de $D$ dans $D':=f(D)$ si $D'$ est un ouvert et $f$ est une bijection dont la bijection réciproque appartient à $\mathrm{H}(D')$.

MATRICES DE $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ ET APPLICATIONS BIHOLOMORPHES. Soit

$$A:=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$$

avec $(c,d)\neq(0,0)$. Si $c\neq 0$, alors cette matrice définit une application

$$h_A:\left|\begin{aligned}\mathbf{C}\setminus\{-d/c\}&\longrightarrow \mathbf{C},\\ z&\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}.\end{aligned}\right.$$

Dans ce cas, la fonction $h_A$ est holomorphe et, pour tout $z\in\mathbf{C}$, on a

$$h_A'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Alors la fonction $h_A$ est constante si et seulement si $\det A=0$.

◇ REMARQUES. – On considère maintenant que $A\in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$. Alors $h_A=\mathrm{Id}$ si et seulement si $cz^2+z(d-a)+b=0$ si et seulement si $c=b=0$ et $d=a$, *i. e.* la matrice $A$ est un homothétie.

– Soient $A,B\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$. Alors $h_{AB}=h_A\circ h_B$.

– Si $c=0$, alors

$$\forall z\in\mathbf{C},\quad h_A(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d},$$

donc $h_A$ est biholomorphe. On suppose que $c\neq 0$. On a

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix},$$

donc $h_A\colon \mathbf{C}\setminus\{-a/c\}\to\mathbf{C}\setminus\{a/c\}$ est biholomorphe.

▷ EXEMPLE. On note

$$H:=\{z\in\mathbf{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}\quad\text{et}\quad E:=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}.$$

Montrons qu'il existe une application biholomorphe de $H$ vers $E$. On considère la matrice

$$A:=\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}.$$

Alors l'application $h_A\colon z\longmapsto (z-i)/(z+i)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{-i\}$. Calculons $h_A(H)$. Soit $z:=x+iy\in H$ avec $x,y\in\mathbf{R}$. Alors

$$h_A(z)=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)},\quad\text{donc}\quad |h_A(z)|^2=\frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}.$$

Or $y>0$, donc $|y-1|<|y+1|$. D'où $|h_A(z)|^2<1$ et $h_A(z)\in E$. Ainsi l'application $h_A$ est holomorphe et bijective de $H$ dans $E$. Comme

$$A^{-1}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

on a

$$h_{A^{-1}}\colon z\longmapsto\frac{iz+i}{-z+1}.$$

Alors l'application $h_{A^{-1}}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{1\}$. Calculons $h_{A^{-1}}(E)$. Soit $z := x + iy \in E$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Alors

$$h_{A^{-1}}(y) = \frac{i(x+iy)+i}{-(x+iy)+1} = \frac{-2y - i(x^2+y^2-1)}{(x-1)^2+y^2},$$

donc $\operatorname{Im} h_{A^{-1}}(z) < 0$. D'où $h_{A^{-1}}(E) \subset H$. On a donc $\mathrm{Id}_E = h_A \circ h_{A^{-1}}$ et $\mathrm{Id}_H = h_{A^{-1}} \circ h_A$. On en déduit que l'application $h_A \colon H \to E$ est biholomorphe, appelée application de CAYLEY.

## 1.6 AUTOMORPHISMES

DÉFINITION 1.22. Soit $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Une application biholomorphe $f \colon D \to D$ est appelée un *automorphisme* de $D$. On note $\mathrm{Aut}(D)$ l'ensemble des automorphismes de $D$. Alors $(\mathrm{Aut}(D), \circ)$ est un groupe.

▷ EXEMPLES. – Toute application de la forme $z \longmapsto az + b$ avec $a \in \mathbf{C}^\times$ est un automorphisme de $\mathbf{C}$. Plus tard, on va même montrer que les automorphismes de $\mathbf{C}$ sont exactement de cette forme.

– Que vaut $\mathrm{Aut}(H)$ ? On considère $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $\det A > 0$. Soit $z \in \mathbf{C}$. Après calculs, on a

$$\operatorname{Im} h_A(z) = \operatorname{Im} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{ady - bcy}{(cx+d)^2 + (cy)^2} > 0,$$

donc $h_A(z) \in H$. On en déduit que $h_A$ est un automorphisme de $H$.

– Que vaut $\mathrm{Aut}(E)$ ? On peut montrer que, si $f \colon D \to D'$ est biholomorphe, alors

$$\forall g \in \mathrm{Aut}(D), \quad f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(D).$$

On considère

$$h \colon \left| \begin{array}{l} H \longrightarrow E, \\ z \longmapsto (z-i)/(z+i). \end{array} \right.$$

Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ telle que $\det A > 0$. D'après ce qui précède, on a $h_A \in \mathrm{Aut}(H)$. Alors $g := h \circ h_A \circ h^{-1} \in \mathrm{Aut}(E)$.

# *Chapitre 2*
# INTÉGRATION ET DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE



## 2.1 RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES TYPES DE CONVERGENCE

### 2.1 Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 2.1. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $X$ dans $\mathbf{C}$ converge localement uniformément sur $X$ si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U_x$ de $x$ dans $X$ tel que la suite converge uniformément sur $U_x$.

THÉORÈME 2.2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(X)$. Si elle converge localement uniformément dans $X$ vers $f$, alors $f$ est continue. Si $\sum f_n$ converge localement uniformément sur $X$ vers $f$, alors sa somme est continue sur $X$

LEMME 2.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbf{C}$ qui converge localement uniformément dans $X$. Alors elle converge uniformément sur tout compact de $X$.

*Preuve* Il suffit d'appliquer la caractérisation de BOREL-LEBESGUE des compacts et d'étudier la convergence de la suite sur des boules bien choisies. □

DÉFINITION 2.4. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $X$ dans $\mathbf{C}$ converge compactement sur $X$ si, pour tout compact $K$ de $X$, elle converge uniformément sur $K$.

◇ REMARQUE. Le lemme assure alors que la convergence localement uniforme implique la converge compactement. On peut montrer que la réciproque est vraie si $X$ est localement compact.

### 2.1 Critères de convergence

THÉORÈME 2.5 *(critère de* CAUCHY*)*. Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbf{C}$ et $A \subset X$ une partie non vide. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite converge uniformément dans $A$,

(ii) la suite est de CAUCHY dans $A$.

PROPOSITION 2.6 *(critère de* WEIERSTRASS*)*. Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $X$ dans $\mathbf{C}$ et $A \subset X$ une partie non vide. S'il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels positifs tel que $\|f_n\|_A \leqslant M_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty$, alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $A$.

DÉFINITION 2.7. Une série $\sum f_n$ de fonctions de $X$ dans $\mathbf{C}$ converge normalement sur $X$ si, pour tout $z \in X$, il existe un voisinage $U_z$ de $z$ dans $X$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{U_z} < +\infty$.

PROPOSITION 2.8. La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence localement uniforme.

THÉORÈME 2.9. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(X)$. Si $\sum f_n$ converge normalement, alors sa somme est continue sur $X$.

PROPOSITION 2.10. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $X$ dans $\mathbf{C}$ qui converge normalement vers $f : X \to \mathbf{C}$. Alors pour toute extraction $\tau : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, la série $\sum f_{\tau(n)}$ converge normalement et sa somme est $f$.

### 2.1 Séries entières

LEMME 2.11 *(ABEL)*. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $s, M > 0$ tels que $|a_n|\, s^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathrm{B}(0,s)$.

*Preuve* Soit $r \in \,]0,s[$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\left\| a_n z^n \right\|_{\mathrm{B}(0,r)} \leqslant |a_n|\, r^n = |a_n|\, s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Or la série $\sum (r/s)^n$ converge, donc la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathrm{B}(0,r)$ et ceci pour tout $r \in \,]0,s[$. On en déduit que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute la boule $\mathrm{B}(0,s)$. ☐

COROLLAIRE 2.12. Si une série entière $\sum a_n z^n$ converge en un point $c \in \mathbf{C}^\times$, alors elle converge normalement sur $\mathrm{B}(0,|c|)$.

DÉFINITION-PROPOSITION 2.13. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On pose

$$R := \sup\{t \geqslant 0 \mid \sup_{n\in\mathbf{N}} \left|a_n t^n\right| < +\infty\}$$

son rayon de convergence. Alors

1. la série entière converge normalement sur $\mathrm{B}(0,R)$ ;
2. la série entière ne converge pas dans $\mathbf{C} - \mathrm{B_f}(0,R)$.

THÉORÈME 2.14 *(CAUCHY-HADAMARD)*. Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est

$$[\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}]^{-1}$$

THÉORÈME 2.15. Soit $\sum a_n (z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant N$. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leqslant R \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

## 2.1 Holomorphie des séries entières

THÉORÈME 2.16. Soit $\sum a_n (z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Alors les séries

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n n (z-z_0)^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$$

ont un rayon de convergence égal à $R$.

*Preuve* On note $R_1 \geqslant 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n n (z-z_0)^{n-1}$. On a $R \geqslant R_1$. Montrons l'inégalité réciproque. Il suffit de montrer que, pour tout $r < R$, on a $r \leqslant R_1$. Soit $r \in \,]0,R[$. On considère $s \in \,]r,R[$. Alors la suite $(|a_n|\, s^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc la suite $(|a_n|\, n r^{n-1})_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée car

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n|\, n r^{n-1} = |a_n|\, s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{n}{r}.$$

Donc $r \leqslant R_1$. On conclut alors que $R = R'$ ☐

THÉORÈME 2.17. Soit $\sum a_n (z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathrm{B}(z_0,R) \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \quad z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \end{array} \right.$$

est infiniment $\mathbf{C}$-dérivable. En particulier, elle est holomorphe. De plus, on a

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall z \in \mathrm{B}(z_0,R), \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} k! \binom{n}{k} a_n (z-z_0)^{n-k}.$$

*Preuve* Montrons le théorème dans le cas $k = 1$ et $z_0 = 0$. On considère la fonction

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathrm{B}(0,R) \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \quad z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}. \end{array} \right.$$

Cette fonction est bien définie d'après le théorème précédent. Montrons que $g = f'$. Soit $b \in \mathrm{B}(0,R)$. Alors pour tout $z \in \mathrm{B}(0,R)$, on a

$$f(z) - f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^n - b^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-b)(z^{n-1} + z^{n-2} b + \cdots + b^{n-1}),$$

donc
$$\frac{f(z)-f(b)}{z-b}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \quad \text{avec} \quad f_n(z) := a_n(z^{n-1}+z^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}),$$
Il suffit de montrer que le membre de droite est continue en $b$. Les fonctions $f_n$ sont continues. Soit $r \in ]0,R[$. De plus, pour tous $z \in \mathrm{B}(0,r)$ et $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\left|f_n(z)\right| \leqslant |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z^n b^{n-1-k}| \leqslant n|a_n|\, r^{n-1}, \quad \text{donc} \quad \|f_n\|_{\mathrm{B}(0,r)} \leqslant n|a_n|\, r^{n-1}.$$
La série $\sum n|a_n|\, r^{n-1}$ converge, donc la série $\sum f_n$ converge normalement. On en déduit que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue. Par conséquent, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \xrightarrow[z\to b]{} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(b) = g(b) \quad \text{et} \quad \frac{f(a)-f(b)}{z-b} \xrightarrow[z\to b]{} f'(b).$$
Par unicité de la limite, on a $f'(b)=g(b)$. □

## 2.1 Exemples fondamentaux

### (i) Exponentielle

La fonction $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est une somme de série entière de rayon de convergence infini. Par conséquent, elle est infiniment dérivable et holomorphe sur $\mathbf{C}$. En particulier, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a
$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z).$$
Montrons que $h(z) := e^z e^{-z} = 1$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. La fonction $h$ est holomorphe et, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a
$$h'(z) = e^z e^{-z} - e^z e^{-z} = 0.$$
Donc elle est constante égale à $h(0)=1$. De cette égalité, on trouve que $e^{-z} = 1/e^z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ et que la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

PROPOSITION 2.18. Soient $G$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, $f\colon G \to \mathbf{C}$ holomorphe et $b \in \mathbf{C}$. Alors
$$(\exists a \in \mathbf{C},\ \forall z \in \mathbf{C},\ f(z) = ae^{bz}) \iff (\forall z \in \mathbf{C},\ f'(z) = bf(z)).$$

◇ REMARQUE. En particulier, on a $e^w e^z = e^{w+z}$ pour tous $w, z \in \mathbf{C}$. En effet, soit $w \in \mathbf{C}$. On pose
$$f\colon z \in \mathbf{C} \longmapsto e^{w+z}.$$
Comme $f' = f$, d'après le théorème précédent, il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que $e^{w+z} = ae^z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Pour $z = 0$, on obtient $a = e^w$. D'où l'égalité recherchée.

PROPOSITION 2.19. La fonction $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ est surjective et périodique.

### (ii) Logarithmes

DÉFINITION 2.20. Soit $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Un *logarithme* sur $D$ est une fonction holomorphe $\ell\colon D \to \mathbf{C}$ telle que
$$\forall z \in D, \quad \exp(\ell(z)) = z.$$

▷ EXEMPLE. La fonction
$$\ell\colon \left|\begin{array}{l} \mathbf{C}\setminus i\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ x+iy \longmapsto \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\operatorname{Arctan}(y/x) \end{array}\right.$$
est un logarithme sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

NOTATION. Pour $z \in \mathbf{C}^*$, on note $\operatorname{Arg} z$ l'unique argument de $z$ dans $]-\pi,\pi]$.

DÉFINITION-PROPOSITION 2.21. La *branche principale* du logarithme est la fonction
$$\operatorname{Log}\colon \left|\begin{array}{rl} \mathbf{C}\setminus ]-\infty,0] \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto \log|z| + i\operatorname{Arg} z. \end{array}\right.$$
C'est un logarithme.

THÉORÈME 2.22. Soit $D$ un ouvert et $f\colon D \to \mathbf{C}^*$ continue telle que $\exp(f(z)) = z$ pour tout $z \in D$. Alors $f$ est holomorphe sur $D$ et $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in D$.

*Preuve* Soit $z_0 \in D$. On a

$$\exp(f(z_0+h) - f(z_0)) = \frac{z_0+h}{z_0} = 1 + \frac{h}{z_0}.$$

Comme $f$ est continue, on a $w(h) := f(z_0+h) - f(z_0) \longrightarrow 0$. La fonction $w$ ne qu'en 0 sur un voisinage de 0. Comme l'exponentielle est dérivable en 0, on a

$$\frac{\exp(w(h)) - \exp(0)}{w(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 1.$$

Il existe alors une fonction $\varepsilon$ définie sur un voisinage $V$ de 0 et tendant vers 0 en 0 telle que

$$\forall h \in V, \quad \exp(w(h)) - 1 = w(h)[1 + \varepsilon(h)].$$

Alors pour tout $h \in V$, on a

$$w(h) = \frac{\exp(w(h)) - 1}{1 + \varepsilon(h)},$$

donc

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{1 + h/z_0 - 1}{1 + \varepsilon(h)} = \frac{h}{z_0(1+\varepsilon(h))},$$

donc

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{z_0(1+\varepsilon(h))} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{z_0}.$$

□

COROLLAIRE 2.23. La fonction Log est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \left]-\infty, 0\right]$.

DÉFINITION-PROPOSITION 2.24. Soient $\alpha \in \mathbf{C}$ et $\ell\colon G \to \mathbf{C}$ un logarithme. Alors la fonction

$$p_\alpha : \left| \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto z^\alpha := \exp[\alpha \ell(z)] \end{array} \right.$$

est holomorphe sur $G$ et $p'_\alpha(z) = \alpha z^{\alpha-1}$ pour tout $z \in G$.

▷ EXEMPLE. On prend $G := \mathbf{C} \setminus \left]-\infty, 0\right]$ et $\ell := \mathrm{Log}$. Trouvons $i^i$. On a

$$i^i = \exp[i \,\mathrm{Log}(i)] = \exp\left[i\left(0 + i\frac{\pi}{2}\right)\right] = e^{-\pi/2}.$$

NOTATION. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $z \in \mathbf{C}$, on pose $n^z := e^{z \ln n}$

THÉORÈME 2.25. La série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^z$ converge uniformément sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geqslant 1 + \varepsilon\}$ avec $\varepsilon > 0$ et converge normalement sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 1\}$.

◇ REMARQUE. Il suffit de remarquer que $|n^z| = n^{\mathrm{Re}\, z}$ pour tous $z \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

## 2.2 INTÉGRALES ET PRIMITIVES

DÉFINITION 2.26. Soit $U$ un intervalle de $\mathbf{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbf{C}$ est (continûment) dérivable si $u := \mathrm{Re}\, f$ et $v := \mathrm{Re}\, f$ sont (continûment) dérivables. Dans ce cas, on a $f' = u' + iv'$.

LEMME 2.27. Soient $\gamma\colon I \to D \subset \mathbf{C}$ dérivable et $f\colon D \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable et

$$(f \circ \gamma)'(t) = f' \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t), \quad t \in I.$$

DÉFINITION 2.28. Une fonction continue $F\colon I \to \mathbf{C}$ est une primitive d'une fonction $f\colon I \to \mathbf{C}$ si $F$ est dérivable et $F' = f$.

THÉORÈME 2.29. Soit $f\colon I \to \mathbf{C}$ continue. Alors

1. la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$ ;
2. pour toute primitive $F$ de $f$, alors

$$\forall r, s \in I, \quad \int_r^s f(t)\,\mathrm{d}t = F(s) - F(r).$$

PROPOSITION 2.30 *(changement de variables).* Soient $J \subset \mathbf{R}$ un intervalle, $\varphi\colon J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $f\colon I \to \mathbf{C}$ continue. Alors pour tous $r, s \in J$, on a

$$\int_r^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

PROPOSITION 2.31. Soient $f, g\colon I \to \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

# 2.3 INTÉGRALES SUR UN CHEMIN

## 2.3 Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 2.32. Soient $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $f\colon D \to \mathbf{C}$ continue telles que $D \supset \gamma(I)$. On pose

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

▷ EXEMPLES. 1. Le chemin constant est la fonction $t \longmapsto c$ avec $c \in \mathbf{R}$.
2. Soient $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Le chemin $\gamma(t) := tz_2 + (1-t)z_1$ décrit le segment $[z_1, z_2]$.
3. Soient $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Le chemin $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ avec $t \in [a, b]$ décrit un arc du cercle de centre $z_0$ et de rayon $r$.

DÉFINITION 2.33. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma\colon I \to \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $\gamma := \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ et

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

DÉFINITION 2.34. Deux chemins $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ et $\tilde{\gamma}\colon \tilde{I} \to \mathbf{C}$ continûment dérivables sont *équivalents* s'il existe une bijection $\varphi\colon \tilde{I} \to I$ continûment dérivable telle que $\varphi' > 0$ et $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

THÉORÈME 2.35. Soient $I := [a, b]$ et $I := \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]$. Si $\gamma$ et $\tilde{\gamma}$ sont équivalents, alors

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

*Preuve* Cela résulte du changement de variables $u = \varphi(t)$. □

VOCABULAIRE. On dit qu'une fonction $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{C}$ est continûment dérivable (ou lisse) si elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et les limites de sa dérivée $\gamma'(t)$ quand $t \to b^-$ et $t \to a^+$ existent.

PROPOSITION 2.36. Soient $\gamma, \gamma_1, \gamma_2\colon I \to \mathbf{C}$ des chemins lisses par morceaux et $f, g\colon D \to \mathbf{C}$ telles que $\gamma(I) \subset D$. Alors
1. $\int_\gamma (f+g)(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$;
2. $\int_\gamma cf(z)\,\mathrm{d}z = c\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ pour tout $c \in \mathbf{C}$;
3. $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$;
4. $\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ avec $\gamma^- := \gamma \circ \varphi$ et $\varphi\colon t \in [a, b] \longmapsto b + a - t \in [a, b]$.

PROPOSITION 2.37. Soient $\tilde{D}$ et $D$ deux ouverts de $\mathbf{C}$, $g\colon \tilde{D} \to D$ holomorphe telle que $g'$ soit continue et $\tilde{\gamma}\colon I \to \tilde{D}$ un chemin lisse par morceaux. On pose $\gamma := g \circ \tilde{\gamma}$. Soit $f\colon D \to \mathbf{C}$ continue sur $\gamma(I)$. Alors

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(g(\xi))g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

PROPOSITION 2.38. Soient $I$ un segment fermé de $\mathbf{R}$, $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux et $f\colon D \to \mathbf{C}$ continue sur $\gamma(I) \subset D$. Alors

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \|f\|_{\infty,\gamma(I)} L(\gamma) \quad \text{avec} \quad L(\gamma) = \int_I \left|\gamma'(t)\right|\mathrm{d}t$$

THÉORÈME 2.39. Soient $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\gamma(I)$

qui converge uniformément sur $\gamma(I)$ vers $f\colon \gamma(I) \to \mathbf{C}$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

THÉORÈME 2.40. Soient $f\colon D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ continue et $F\colon D \to \mathbf{C}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction $F$ est holomorphe sur $D$ et vérifie $F' = f$ ;

(ii) pour tous $z_1, z_2 \in D$ et tout chemin lisse par morceaux $\gamma\colon [a,b] \to D$ tel que $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$, on a
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1).$$

*Preuve* $\Rightarrow$ On suppose (i). Soient $z_1, z_2 \in \mathscr{D}$ et $\gamma\colon [a,b] \to D$ un chemin lisse par morceaux tel que $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$. On suppose que $\gamma$ est lisse. Alors
$$\begin{aligned}\int_I f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [F\circ\gamma(t)]_a^b = F(z_2) - F(z_1).\end{aligned}$$
On procède de même si $\gamma$ est lisse par morceaux.

$\Leftarrow$ On suppose (ii). Soit $c \in D$. Comme $D$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{\mathrm{B}(c,r)} \subset D$. Soit $z \in \mathrm{B}(c,r)$. On note $\gamma\colon t \in [0,1] \longmapsto (1-t)c + tz$. Alors
$$F(z) - F(c) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,$$
donc
$$\begin{aligned}\frac{F(z)-F(c)}{z-c} - f(c) &= \frac{1}{z-c}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - f(c) \\ &= \frac{1}{z-c}\int_\gamma [f(z) - f(c)]\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$
donc
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(c)}{z-c} - f(c)\right| &\leqslant \frac{1}{|z-c|}\|f - f(c)\|_{[c,z]} L(\gamma) \\ &= \|f - f(c)\|_{[c,z]} \xrightarrow[z\to c]{} 0.\end{aligned}$$
Donc la fonction $F$ est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point $c \in D$ et vérifie $F'(c) = f(c)$. □

DÉFINITION 2.41. Une fonction $F\colon D \to \mathbf{C}$ est un primitive si une des propositions (i) et (ii) du théorème précédent est vérifiée.

PROPOSITION 2.42. 1. Si $F' = 0$, alors $F$ est constante.
2. Si $F$ et $\tilde{F}$ sont deux primitives de $f$, alors $F - \tilde{F}$ est constante.

DÉFINITION 2.43. Une fonction $f\colon D \to \mathbf{C}$ est intégrable si elle admet une primitive sur $D$.

◇ REMARQUE. Si $f$ est intégrable dans $D$, alors $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout chemin lisse par morceaux et fermé $\gamma$, *i. e.* tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

THÉORÈME 2.44 *(critère d'intégrabilité)*. Soient $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f\colon D \to \mathbf{C}$ continue. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction $f$ est intégrable sur $D$ ;

(ii) pour tout chemin lisse par morceaux et fermé $\gamma$, on a $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

*Preuve* Montrons le sens réciproquement. On suppose (ii). Il suffit de montrer que $F\colon z \longmapsto \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ est une primitive de $f$ où un chemin lisse $\gamma_z$ joint un point $z_0 \in D$ à $z$. □

## 2.3 Théorème de CAUCHY

LEMME 2.45 (GOURSAT). Soit $f\colon D \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors pour tout triangle $T \subset D$, on a

$$\int_{\partial T} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

*Preuve* Soit $T \subset D$ un triangle. Remarquons d'abord que $\max_{z,w\in T} |w-z| \leqslant L(\partial T)$. On le découpe en quatre triangles $T_1$, $T_2$, $T_3$ et $T_4$. Soit $k_1 \in [\![1,4]\!]$ tel que

$$\left|\int_{\partial T_{k_1}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| = \max_{1\leqslant i\leqslant k}\left|\int_{\partial T_i} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right|.$$

Alors

$$\left|\int_{\partial T} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant 4\left|\int_{\partial T_{k_1}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right|.$$

De même, on découpe le triangle $T_{k_1}$ en quatre triangle et on prend un sous-triangle $T_{k_1,k_2}$ tel que

$$\left|\int_{\partial T} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant 4^2\left|\int_{\partial T_{k_1,k_2}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right|.$$

Par récurrence immédiate, on construit une suite décroissante de triangles $(T_{k_1,\dots,k_n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left|\int_{\partial T} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right|.$$

Par construction, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} T_{k_1,\dots,k_n}$ est réduite à un point $c \in D$ par le théorème des compacts emboîtés car $\operatorname{diam} T_{k_1,\dots,k_n} \longrightarrow 0$. Comme $f$ est holomorphe, pour $z \in D$, on pose

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c) & \text{si } z \neq c,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors la fonction $g$ est continue et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(c)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f'(c)(z-c)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} g(z)(z-c)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} g(z)(z-c)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

puisque les fonctions $z \longmapsto f(c)$ et $z \longmapsto f'(c)(z-c)$ sont intégrables, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| &\leqslant \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} \|\cdot - c\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} L(\partial T_{k_1,\dots,k_n})\\ &\leqslant \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} L(\partial T_{k_1,\dots,k_n})^2\\ &\leqslant \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} \frac{L(\partial T)^2}{4^n},\end{aligned}$$

$$\left|\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} L(\partial T)^2.$$

Comme $g$ est continue et $g(c) = 0$, on a $\|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} \longrightarrow 0$ ce qui montre le lemme. ☐

THÉORÈME 2.46 (CAUCHY). Soient $G$ un ouvert connexe étoilé de $\mathbf{C}$ centré en $c \in \mathbf{C}$ et $f\colon G \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors la fonnction $f$ est intégrable dans $G$ et la fonction

$$F\colon z \in G \longmapsto \int_{[c,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

est un primitive de $f$.

*Preuve* Soit $z_0 \in G$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(z_0, r) \subset G$. Pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0, r)$, on a

$$\begin{aligned}F(z) - F(z_0) &= \int_{[c,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[c,z_0]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\ &= -\int_{[z,c]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[c,z_0]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\ &= \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

donc

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]}[f(\zeta)-f(z_0)]\,\mathrm{d}\zeta\right|$$
$$\leqslant \|f-f(z_0)\|_{[z_0,z]} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0.$$

Finalement, la fonction $F$ est $\mathbf{C}$-dérivable en $F'=f$. □

LEMME 2.47 *(GOURSAT renforcé).* Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$, $c\in D$ et $f\colon D\to\mathbf{C}$ holomorphe sur $D\setminus\{c\}$. Alors pour tout triangle $T\subset D$ tel que $c$ soit un des sommets, on a

$$\int_{\partial T} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

*Preuve* Il suffit de considérer, pour tout $\varepsilon>0$, un découpage du triangle $T$ en trois triangles $T_1$, $T_2$ et $T_3$ tels que $c\in T_3$ et $L(\partial T_3)<\varepsilon$ et d'appliquer le lemme de GOURSAT. □

THÉORÈME 2.48 *(CAUCHY renforcé).* Soient $G$ un ouvert connexe étoilé de $\mathbf{C}$ centré en $c\in\mathbf{C}$ et $f\colon G\to\mathbf{C}$ holomorphe sur $G\setminus\{c\}$. Alors la fonnction $f$ est intégrable dans $G$ et la fonction

$$F\colon z\in G\longmapsto \int_{[c,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

est un primitive de $f$.

*Preuve* On procède de même que dans la preuve du théorème de CAUCHY. □

THÉORÈME 2.49 *(formule de CAUCHY).* Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f\colon D\to\mathbf{C}$ holomorphe. Soient $r>0$ et $c\in D$ tels que $B:=\mathrm{B}(c,r)\subset D$ et $\overline{B}\subset D$. Alors pour tout $z\in B$, on a

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

*Preuve* Soit $z_0\in B$. Pour $z\in D$, on pose

$$g(z):=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z\neq z_0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors la fonction $g$ est continue sur $D$ et holomorphe sur $D\setminus\{c\}$. Soit $s>r$ tel que $B':=\mathrm{B}(c,s)\subset D$. Le lemme de CAUCHY renforcé assure que la fonction $g$ est intégrable sur $B'$. En particulier, pour tout chemin lisse et fermé $\gamma\colon B'\to C$, on a $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z=0$. On paramètre la frontière $\partial B$ par un chemin $\gamma$. Comme $B\subset B'$, on a

$$\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\,\mathrm{d}\zeta=0,$$

donc

$$f(z_0)\int_{\partial B}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z_0}=\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\quad\text{avec}\quad\int_{\partial B}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z_0}=2\pi i.$$ □

COROLLAIRE 2.50 *(formule du maximum).* Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f\colon D\to C$. Soient $r>0$ et $c\in D$ tels que $B:=\mathrm{B}(c,r)\in D$. Alors pour tout $\zeta\in B$, on a $|f(\zeta)|\leqslant\|f\|_{\partial B}$.

*Preuve* On paramètre $\partial B$ par le chemin $\gamma\colon t\in[0,2\pi]\longmapsto c+re^{it}\in\partial B$. Alors

$$\begin{aligned}|f(c)|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-c}\,\mathrm{d}z\right|\\&=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(c+re^{it})}{re^{it}}ire^{it}\,\mathrm{d}t\right|\\&=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}f(c+re^{it})\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\|f\|_{\partial B}.\end{aligned}$$

De plus, soit $\zeta\in B$. Alors

$$\begin{aligned}|f(\zeta)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial B}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z\right|\\&\leqslant\|f\|_{\partial B}\sup_{z\in\partial B}\left|\frac{r}{z-\zeta}\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \|f\|_{\partial B} \frac{r}{r-|\zeta|}.$$

Soit $k \in \mathbf{N}$. On peut remplacer $f$ par $f^k$ et on obtient

$$|f^k(\zeta)| \leqslant \|f^k\|_{\partial B} \frac{r}{r-|\zeta|},$$

donc

$$\left|f(\zeta)\right| \leqslant \|f\|_{\partial B} \left(\frac{r}{r-|\zeta|}\right)^{1/k}.$$

En laissant tendre $k$ vers $+\infty$, on obtient que $\left|f(\zeta)\right| \leqslant \|f\|_{\partial B}$. $\square$

## 2.4 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES ENTIÈRES

DÉFINITION 2.51. Soie $D$ un ouvert. On dit qu'une fonction $f\colon D \to \mathbf{C}$ est développable en série entière au voisinage d'un point $c \in D$ s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de complexes tels que $\mathrm{B}(c,r) \subset D$ et

$$\forall z \in \mathrm{B}(c,r), \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n.$$

LEMME 2.52. Soient $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux et $f\colon \gamma(I) \to \mathbf{C}$ continue. On pose

$$F\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \setminus \gamma(I) \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \qquad z \longmapsto \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta. \end{array}\right.$$

Alors la fonction $F$ est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\gamma(I)$ et, pour tout $c \in \mathbf{C}\setminus\gamma(I)$, elle est développable en série entière au voisinage de $c$ où les coefficients $a_n$ sont données par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta.$$

De plus, la fonction $F$ est infiniment $\mathbf{C}$-dérivable sur $\mathbf{C}\setminus\gamma(I)$ et, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}\setminus\gamma(I)$, on a

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta.$$

*Preuve* Soient $c \in \mathbf{C}\setminus\gamma(I)$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(c,r) \subset \mathbf{C}\setminus\gamma(I)$. Soient $\zeta \in \gamma(I)$ et $z \in \mathrm{B}(c,r)$. Alors

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - c}\frac{1}{1-w} \quad \text{avec} \quad w := \frac{z-c}{\zeta - c}.$$

Comme $|w| < 1$, on a

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

On obtient alors

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} (z-c)^n\, \mathrm{d}\zeta.$$

Or pour tous $\zeta \in \gamma(I)$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} (z-c)^n \right| \leqslant \frac{\|f\|_{\gamma(I)}}{r} \left| \frac{z-c}{\zeta - c}\right|^n.$$

La série $\sum f(\zeta)(\zeta-c)^{-(n+1)}(z-c)^n$ converge alors normalement. Cela permet d'intervertir l'intégrale et la somme, on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \right) (z-c)^n.$$ $\square$

THÉORÈME 2.53. Soient $D$ un ouvert de $C$, $c \in D$ et $f\colon D \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors $f$ est développable en série entière au voisinage de $c$.

*Preuve* Soit $r > 0$ tel que $B := \mathrm{B}(c,r) \subset D$. Le formule de CAUCHY donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Le critère précédent assure alors que la fonction $f$ est développable en série entière au voisinage de $c$. $\square$

◇ REMARQUE. Ceci montre que les fonctions holomorphes sur un ouvert $D$ sont infiniment $\mathbf{C}$-dérivable sur $D$.

THÉORÈME 2.54 *(de prolongement de* RIEMANN*).* Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$, $c \in D$ et $f\colon D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction $f$ se prolonge en une fonction holomorphe de $D$ dans $\mathbf{C}$ ;
(ii) la fonction $f$ se prolonge en une fonction continue de $D$ dans $\mathbf{C}$ ;
(iii) la fonction $f$ est bornée au voisinage de $c$ ;
(iv) quand $z \to c$, on a $(z-c)f(z) \longrightarrow 0$.

*Preuve* Comme l'holomorphie implique la continuité, les implications (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) sont vraies. Montrons la dernière implications. On suppose (iv). Quitte à considérer la fonction $z \longmapsto f(z-c)$, on peut supposer que $c = 0$. On pose $g\colon D \to \mathbf{C}$ la fonction définie par

$$\forall z \in D, \qquad g(z) = \begin{cases} zf(z) & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la fonction $g$ est continue en 0. On considère la fonction $h\colon z \in D \longmapsto zg(z)$. Alors

$$\frac{h(z)-h(0)}{z} = g(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 0,$$

donc la fonction $h$ est $\mathbf{C}$-dérivable en 0. Comme elle est holomorphe sur $D \setminus \{0\}$, elle est holomorphe sur $D$. Au voisinage de 0, on peut donc la développer en série entière et l'écrire comme

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Or $h(0) = h'(0) = 0$, donc $a_0 = a_1 = 0$ et

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^n, \quad z \neq 0.$$

Alors les fonctions $f$ et $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^n$ coïncident sur un ensemble $V \setminus \{0\}$ où $V$ est un voisinage de 0, donc la fonction $f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $D$. D'où (i). □

THÉORÈME 2.55 *(d'égalité).* Soient $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f, g\colon D \to \mathbf{C}$ holomorphes. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) les fonctions $f$ et $g$ sont égales sur $D$ ;
(ii) l'ensemble $S := \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans $D$ ;
(iii) il existe $c \in D$ tel que $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

*Preuve* L'implication (i) ⇒ (ii) est clairement vraie. On suppose (i). La fonction $h := f - g$ est holomorphe sur $D$. Soit $c \in D$ un point d'accumulation de $S$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $h^{(m)}(c) \neq 0$. On considère le plus petit tel entier $m \in \mathbf{N}$. Alors, au voisinage de $c$, on a

$$h(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k = (z-c)^m h_m(z) \quad \text{avec} \quad h_m(z) := \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^{k-m}.$$

La fonction $h_m$ est holomorphe sur une boule $B := \mathrm{B}(c, r)$ et elle est nulle sur $B \cap \mathbf{C} \setminus \{c\}$ et non nulle en $c$, donc elle n'est pas continue en $c$. Finalement, on a $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. D'où (iii).

On suppose (iii), *i. e.* il existe $c \in D$ tel que $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Montrons que la fonction $h := f - g$ est nulle sur $D$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $S_k := \{w \in D \mid h^{(k)}(w) = 0\}$ qui est un fermé de $D$. On pose $S := \bigcap_{k \in \mathbf{N}} S_k$ qui est un fermé non vide. Montrons qu'il est ouvert dans $D$. Soit $z_0 \in S$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(z_0, r) \subset D$. Montrons que $\mathrm{B}(z_0, r) \subset S$. Sur $\mathrm{B}(z_0, r)$, on peut écrire

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Comme $z_0 \in S$, on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc $h = 0$ sur $\mathrm{B}(z_0, r)$, donc $\mathrm{B}(z_0, r) \subset S$. Finalement, l'ensemble $S$ est à la fois ouvert et fermé dans $D$. Comme $D$ est connexe et $S \neq \emptyset$, on en déduit que $S = D$, *i. e.* la fonction $h$ est nulle sur $D$. D'où (i). □

COROLLAIRE 2.56. Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f\colon D \to \mathbf{C}$ holomorphe non localement constante. Alors pour tout $a \in \mathbf{C}$, l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ est discret, *i. e.* ne contient pas de point d'accumulation.

COROLLAIRE 2.57. Soient $\varphi\colon ]a, b[ \to \mathbf{R}$ et $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ tels que $]a, b[ \subset D$. Alors il existe une unique fonction holomorphe $f\colon D \to \mathbf{C}$ tel que $f|_{]a,b[} = \varphi$.

## 2.5 SUR LE CONCEPT D'HOLOMORPHIE

DÉFINITION 2.58. Soit $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction continue $f\colon D \to \mathbf{C}$ est localement intégrable sur $D$ s'il existe une famille d'ouverts $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de $\mathbf{C}$ telle que $D = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ et la fonction $f$ soit intégrable sur $U_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.

THÉORÈME 2.59. Soit $f\colon D \to \mathbf{C}$ continue. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction $f$ est holomorphe sur $D$;

(ii) pour tout triangle $T \subset D$, on a $\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$;

(iii) la fonction $f$ est localement intégrable sur $D$;

(iv) pour toute boule ouverte $B$ de $\mathbf{C}$ telle que $\overline{B} \subset D$ et tout $z \in D$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\ ;$$

(v) la fonction $f$ est développable en série entière au voisinage de tout point de $D$.

*Preuve* On utilise les différents théorèmes et lemmes pour montrer chaque implication. □

COROLLAIRE 2.60 *(holomorphie des intégrales)*. Soient $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux et $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $g\colon \gamma(I) \times D \to \mathbf{C}$ continue telle que, pour tout $w \in \gamma(I)$, la fonction $g(w,\cdot)$ soit holomorphe sur $D$. Alors la fonction

$$h\colon \left|\begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto \displaystyle\int_\gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta \end{array}\right.$$

est holomorphe sur $D$.

*Preuve* Pour cela, il suffit de vérifier le point (ii) du théorème précédent. Soit $T \subset D$ un triangle. Le théorème de FUBINI donne

$$\int_{\partial T} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial T}\int_\gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}z = \int_\gamma\int_{\partial T} g(\zeta, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\zeta = \int_\gamma 0\,\mathrm{d}z = 0.$$

car la fonction $g(\zeta,\cdot)$ est holomorphe pour tout $\zeta \in \gamma(I)$. On en déduit que la fonction $h$ est holomorphe. □

### 2.5 Formule de GUTZMER, principe du maximum et un théorème de LIOUVILLE

PROPOSITION 2.61 *(formule de* GUTZMER*)*. Soit $\sum a_n(z-c)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont on note $f\colon \mathrm{B}(c,R) \to \mathbf{C}$ la somme. Soit $r \in \left]0, R\right[$. On note

$$M(r) := \max_{z\in\partial \mathrm{B}(c,r)} |f(z)|.$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(c+re^{i\varphi})|^2\,\mathrm{d}\varphi \leqslant M(r)^2.$$

*Preuve* Soit $z := c + re^{i\varphi} \in \partial \mathrm{B}(c,r)$. Alors

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}\,\overline{(z-c)}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-i\varphi n},$$

donc

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n f(c+re^{i\varphi})e^{-i\varphi n}.$$

On obtient donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(c+re^{i\varphi})|^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n f(c+re^{i\varphi})e^{-i\varphi n}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Comme la série $\sum |a_n|\, r^n f(c+re^{i\varphi})e^{-i\varphi n}$ converge normalement, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(c+re^{i\varphi})|^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n \int_0^{2\pi} f(c+re^{i\varphi})e^{-i\varphi n}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \mathrm{B}(c,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{i\varphi})}{(re^{i\varphi})^{n+1}} rie^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(c + re^{i\varphi}) e^{-i\varphi n} \, \mathrm{d}\varphi.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{i\varphi})|^2 \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n 2\pi a_n r^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \qquad \square$$

COROLLAIRE 2.62. En reprenant les mêmes notations que précédemment, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $r \in \,]0, R[$, on a

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

*Preuve* Il suffit de remarquer que, pour tous $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|a_n|^2 r^{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leqslant M(r)^2. \qquad \square$$

COROLLAIRE 2.63. On suppose qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ et $r \in \,]0, R[$ tels que $|a_m| r^m = M(r)$. Alors

$$\forall z \in \mathrm{B}(c, R), \quad f(z) = a_m (z - c)^m.$$

*Preuve* La formule de GUTZMER donne alors

$$M(r)^2 = |a_m| r^{2m} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^{2n} \leqslant M(r)^2$$

ce qui implique que $|a_m| r^{2m} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^{2n}$. D'où $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{m\}$. $\square$

THÉORÈME 2.64 *(principe du maximum).* Soient $G$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f \colon G \to \mathbf{C}$ holomorphe. On suppose qu'il existe $c \in G$ tel que $|f(c)| = \|f\|_U$ avec un voisinage $U$ de $c$ dans $G$. Alors $f$ est constante sur $G$.

*Preuve* Sur une boule $\mathrm{B}(c, r)$, on peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - c)^n$. Quitte à réduire cette boule, on peut supposer que $\mathrm{B}(c, r) \subset U$. Alors comme $|f(c)| = \|f\|_U$, on a $|a_0| \geqslant M(r)$. Le corollaire précédent donne alors $f = a_0$ sur $\mathrm{B}(c, r)$. Le théorème d'égalité conclut donc que $f = a_0$ sur $G$. $\square$

VOCABULAIRE. Rappelons qu'une fonction $f \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est dite *entière* si elle est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et qu'elle est dite bornée si $\|f\|_D < +\infty$.

THÉORÈME 2.65 *(*LIOUVILLE*).* Toute fonction entière et bornée est constante.

*Preuve* Soit $f \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction entière et bornée. Au voisinage de 0 et en tout point $z \in \mathbf{C}$, la fonction $f$ se développe en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $r > 0$, on a $|a_n| \leqslant M(r)/r^n \leqslant \|f\|_{\mathbf{C}}/r^n$. En laissant tendre $r$ vers $+\infty$, on en déduit que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. D'où $f = a_0$ sur $\mathbf{C}$. $\square$

COROLLAIRE 2.66. On note $\Delta := \mathrm{B}(0,1) \subset \mathbf{C}$ et $H := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbf{C}$. Toute fonction holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\Delta$ est constante. En particulier, il n'existe pas de biholomorphisme de $\Delta$ dans $\mathbf{C}$ ou de $H$ dans $\mathbf{C}$.

## 2.5 Théorème de WEIERSTRASS

THÉORÈME 2.67. Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes de $D$ dans $\mathbf{C}$ qui converge localement uniformément vers une fonction $f \colon D \to \mathbf{C}$ sur $D$. Alors

1. la fonction $f$ est holomorphe ;
2. pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge localement uniformément vers $f^{(k)}$ sur $D$.

*Preuve* 1. Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge localement uniformément vers $f$, la fonction $f$ est continue. Pour tout triangle $T \subset D$, le théorème 2.39 et le lemme de GOURSAT

$$\int_{\partial T} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\partial T} \lim_{n \to +\infty} f_n(z) \, \mathrm{d}z = \lim_{n \to +\infty} \int_{\partial T} f_n(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

ce qui assure l'holomorphie de $f$.

2. Il suffit de montrer la convergence pour $k = 1$. Soit $c \in D$. Il existe $r > 0$ tel que $B := \mathrm{B}(c, 2r) \subset D$. Pour tout $z \in \mathrm{B}(c, r)$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta$$

ce qui permet d'écrire

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leqslant \|f_n - f\|_{\partial B} \frac{2r}{\min_{\zeta \in \partial B} |\zeta - z|^2} \leqslant \|f_n - f\|_{\partial B} \frac{2}{r},$$

donc

$$\|f_n' - f'\|_{\partial B} \leqslant \|f_n - f\|_{\partial B} \frac{2}{r}.$$

Cela montre la convergence locale uniforme de la suite $(f_n')_{n \in \mathbf{N}}$. ☐

## 2.5 Théorème de l'application ouverte

DÉFINITION 2.68. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques $X$ et $Y$ est dite *ouverte* si l'image $f(U)$ de tout ouvert $U$ de $X$ est un ouvert de $Y$.

THÉORÈME 2.69 *(d'existence de zéros).* Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$, $c \in D$ et $r > 0$ tels que $B := \mathrm{B}(c, r) \subset D$ et $\overline{B} \subset D$. Soit $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)|$. Alors $f$ admet un zéro sur $B$.

*Preuve* Raisonnons par l'absurde et supposons que $f$ ne s'annule pas sur $B$. Par hypothèse, elle ne s'annule pas sur $\overline{B}$. Par continuité, elle ne s'annule par sur un voisinage $U$ de $\overline{B}$. On considère $g : U \to \mathbf{C}$ définie par $g(z) = 1/f(z)$ pour tout $z \in U$. Dans ce cas, on a

$$|g(c)| > \max_{z \in \partial B} |g(z)|.$$

Or la formule de CAUCHYdonne

$$g(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{g(z)}{z - c} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(c + re^{it}) \,\mathrm{d}t \leqslant \max_{z \in \partial B} |g(z)|$$

ce qui est contradictoire. Donc la fonction $f$ admet un zéro sur $B$. ☐

THÉORÈME 2.70 *(de l'application ouverte).* Soient $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe et non constante. Alors $f$ est une application ouverte.

*Preuve* Soient $U$ un ouvert de $D$ et $c \in U$. Comme $f$ n'est pas constante, il existe une boule $V \subset U$ centrée en $c$ telle que $f(c) \neq f(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \partial V$. On pose

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{\zeta \in \partial V} |f(c) - f(\zeta)| > 0.$$

Montrons que $B := \mathrm{B}(f(c), \delta) \subset f(U)$. Soit $b \in B$. Il suffit de montrer que la fonction $g := f - b$ admet un zéro dans $V$. Pour cela, remarquons que, pour tout $\zeta \in \partial V$, on a

$$\begin{aligned} |g(\zeta)| &= |f(\zeta) - f(c) + f(c) - b| \\ &\geqslant |f(\zeta) - f(c)| - |f(c) - b| \\ &\geqslant 2\delta - \delta = \delta > |f(c) - b| = |g(c)|. \end{aligned}$$

Le théorème d'existence de zéros assure alors que la fonction $g$ admet un zéro dans $V$, *i. e.* il existe $z \in V$ tel que $b = f(z)$, donc $b \in f(V) \subset f(U)$. D'où $B \subset f(U)$. On en déduit que l'image $f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$. Donc $f$ est ouverte. ☐

# 2.6 THÉORIE DES RÉSIDUS

## 2.6 Notion de singularité et premiers théorèmes

DÉFINITION 2.71. Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $c \in D$. Soit $f : D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur $D \setminus \{c\}$. On dit que le point $c$ est une *singularité isolée* de $f$. De plus, on dit que cette singularité est

– *effaçable* (ou *apparente*) si $f$ peut être prolongée en une fonction holomorphe $\tilde{f} : D \to \mathbf{C}$ ;
– un *pôle* si $c$ n'est pas une singularité effaçable et s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que la fonction $g : z \in D \setminus \{c\} \longmapsto (z - c)^n f(z)$ puisse être prolongée en une fonction holomorphe $\tilde{g} : D \to \mathbf{C}$ ;
– *essentielle* si $c$ n'est ni effaçable ni un pôle.

PROPOSITION 2.72. Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$, $c \in D$ et $f : D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ holomorphe. Si $f$ est bornée sur $U \setminus \{c\}$ pour un voisinage $U$ de $c$ dans $D$, alors $c$ est une singularité effaçable de $f$.

*Preuve* Il suffit d'appliquer le théorème de prolongement de RIEMANN ☐

◇ REMARQUE. Si $f$ n'est pas bornée au voisinage de $c$, alors $c$ n'est pas une singularité effaçable. Si $c$ est un pôle, l'entier

$$m := \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid z \longmapsto (z-c)^n f(z) \text{ est bornée sur } U \setminus \{c\} \text{ pour un voisinage } U \text{ de } c \text{ dans } D\}$$

est appelée l'*ordre* du pôle $c$. Si $m = 1$, le pôle $c$ est dit *simple*

THÉORÈME 2.73. Soient $m \in \mathbf{N}^*$ et $f : D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la singularité $c$ est un pôle d'ordre $m$ de $f$ ;

(ii) il existe une fonction holomorphe $g : D \to \mathbf{C}$ telle que $g(c) \neq 0$ et

$$\forall z \in D \setminus \{c\}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m} ;$$

(iii) il existe un voisinage $U$ de $c$ dans $D$ et une fonction holomorphe $h : U \to \mathbf{C}$ qui ne s'annule pas sur $U \setminus \{c\}$ et dont $c$ est un zéro d'ordre $m$ tels que

$$\forall z \in U \setminus \{c\}, \quad f(z) = 1/h(z) ;$$

(iv) il existe un voisinage $U$ de $c$ dans $D$ et $M_*, M^* > 0$ tels que

$$\forall z \in U \setminus \{c\}, \quad \frac{M_*}{|z-c|^m} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{M^*}{|z-c|^m}.$$

*Preuve* • *(i) ⇒ (ii).* On suppose (i). La fonction $g : z \in D \setminus \{c\} \longmapsto (z-c)^m f(z)$ est holomorphe sur $D \setminus \{c\}$ et bornée au voisinage de $c$. Par la proposition précédente, la singularité $c$ est alors effaçable, donc on peut prolonger la fonction $g$ en une fonction holomorphe sur $D$, notée encore $g : D \to \mathbf{C}$. Montrons que $g(c) \neq 0$. Si $g(c) = 0$, alors on peut écrire

$$g(z) = (z-c)\tilde{g}(z), \quad \forall z \in D$$

avec une fonction $\tilde{g}$ holomorphe sur $D$ et, dans ce cas, la fonction $z \longmapsto \tilde{g}(z) = (z-c)^{m-1} f(z)$ est bornée au voisinage de $c$ ce qui contredit la minimalité de $m$.

• *(ii) ⇒ (iii).* On suppose (i). Comme $g$ ne s'annule par sur un voisinage $U$ de $c$, on prend $h : z \in U \longmapsto (z-c)^m / g(z)$.

• *(iii) ⇒ (iv).* On suppose (iii). On peut choisir un voisinage $U$ de $c$ dans $D$ tel que

$$h(z) = (z-c)^m \tilde{h}(z), \quad z \in U$$

où la fonction $\tilde{h}$ est holomorphe sur $U$, ne s'annule pas sur $U$ et vérifie

$$M_* := \inf_{z \in U} \frac{1}{|\tilde{h}(z)|} > 0 \quad \text{et} \quad M^* := \sup_{z \in U} \frac{1}{|\tilde{h}(z)|} < +\infty.$$

Pour $z \in U \setminus \{c\}$, on a

$$|f(z)| = \frac{1}{|z-c|^m} \frac{1}{|\tilde{h}(z)|},$$

ce qui implique la relation voulue.

• *(iv) ⇒ (i).* On suppose (iv). Alors la fonction $z \longmapsto (z-c)^m f(z)$ est bornée sur un voisinage de $c$, donc la singularité $c$ est un pôle d'ordre inférieur ou égal à $m$. Raisonnons par l'absurde et supposons que le pôle est d'ordre $n < m$. Alors la fonction $z \longmapsto (z-c)^n f(z)$ est bornée sur $V \setminus \{c\}$ pour un voisinage $V$ de $c$ dans $D$. Quitte à le réduire, on peut supposer que $V \subset D$. Or pour tout $z \in V \setminus \{c\}$, on a

$$|z-c|^{n-m} M_* \leqslant |z-c|^n |f(z)|.$$

Comme $n - m < 0$, le terme $|z-c|^{n-m}$ n'est pas borné au voisinage de $c$ alors que la relation précédente assure sa bornitude ce qui est absurde. Donc le pôle $c$ est d'ordre $m$. ☐

DÉFINITION 2.74. Soit $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction $D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ tend vers l'infini en un point $c \in \mathbf{C}$ si

$$|f(z)| \xrightarrow[z \to c]{} +\infty.$$

On note alors $\lim_{z \to c} f(z) = \infty$.

PROPOSITION 2.75. Soit $f \setminus D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors $c$ est un pôle si et seulement si $f$ tend vers l'infini en $c$.

*Preuve* ⇒ On suppose que $c$ est un pôle. Par le théorème 2.73, il existe $m \in \mathbf{N}^*$ et une fonction holomorphe $g : D \to \mathbf{C}$ telle que $g(c) \neq 0$ et

$$\forall z \in D \setminus \{c\}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}.$$

Comme $g$ est continue et vérifie $g(c) \neq 0$, il existe $r, M > 0$ tel que $|g(z)| > M$ pour tout $z \in \mathrm{B}(c, r)$. Alors pour $z \in \mathrm{B}(c, r)$, on a

$$|f(z)| > \frac{M}{|z-c|^m} \xrightarrow[z \to c]{} +\infty.$$

$\Leftarrow$ On suppose que $f$ tend vers l'infini en $c$. Il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in B \setminus \{c\}$ avec $B := \mathrm{B}(c, r)$. Alors la fonction

$$h\colon \left| \begin{array}{rcl} B \setminus \{c\} & \longrightarrow & \mathbf{C}, \\ z & \longmapsto & 1/f(z) \end{array} \right.$$

est holomorphe sur $B \setminus \{c\}$. Comme $h(z) \to 0$ quand $z \to c$, la fonction $h$ est bornée sur un voisinage de $c$, donc elle se prolonge en une fonction holomorphe $h\colon B \to \mathbf{C}$ sur $B$ en posant $h(c) = 0$. Par le même théorème, la singularité $c$ est un pôle. ☐

▷ EXEMPLES. – La fonction $z \longmapsto 1/z$ admet un pôle simple en 0.
– La fonction $z \longmapsto \sin(1/z)$ admet une singularité essentielle en 0.

THÉORÈME 2.76. Soient $c \in D$ et $f\colon D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $c$ est un pôle d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$ de $f$. Alors il existe $b_1, \dots, b_m \in \mathbf{C}$ avec $b_m \neq 0$ et une fonction holomorphe $\overline{f}\colon D \to \mathbf{C}$ tels que

$$\forall z \in D \setminus \{c\}, \quad f(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j}{(z-c)^j} + \overline{f}(z). \tag{$*$}$$

Les nombres $b_j$ et la fonction $\overline{f}$ sont uniquement déterminés par $f$.

*Preuve* Il existe une fonction holomorphe $g\colon D \to \mathbf{C}$ telle que $g(c) \neq 0$ et

$$\forall z \in D \setminus \{c\}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}.$$

Comme $g$ se développe en série entière au voisinage de 0, il existe $r > 0$ vérifiant $\mathrm{B}(c, r) \subset D$, des complexes $b_1, \dots, b_m \in \mathbf{C}$ et une fonction holomorphe $\overline{f}\colon \mathrm{B}(c, r) \to \mathbf{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathrm{B}(c, r), \quad g(z) = b_m + b_{m-1}(z-c) + \dots + b_1(z-c)^{m-1} + \overline{f}(z)(z-c)^m.$$

On en déduit la relation voulue sur $\mathrm{B}(c, r) \setminus \{c\}$. Grâce à la relation $(*)$, on définit la fonction $\tilde{f}$ sur $D \setminus \mathrm{B}(c, r)$ et elle est bien holomorphe sur $D$. Comme $g$ est unique, les coefficients $b_j$ et la fonction $\overline{f}$ sont aussi uniques. ☐

## 2.6 Singularités essentielles

Une conséquence du théorème précédent est la suivante : pour tout ouvert $D$ de $\mathbf{C}$, une singularité isolée $c \in D$ d'une fonction holomorphe $f\colon D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ est essentielle si $f$ n'est pas bornée au voisinage de $c$ et $f$ ne tend pas vers l'infini en $c$. Mais on peut en dire beaucoup plus.

THÉORÈME 2.77 *(sur les singularités essentielles).* Soient $c \in D$ et $f\colon D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la singularité $c$ est essentielle ;

(ii) pour tout voisinage $U$ de $c$ dans $D$, l'image $f(U \setminus \{c\})$ est dense dans $\mathbf{C}$.

*Preuve* Le sens réciproque vient de la remarque précédente. Directement, raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe un voisinage $U$ de $c$ dans $D$ telle que l'image $f(U \setminus \{c\})$ ne soit pas dense dans $\mathbf{C}$. Alors il existe $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{B}(a, r) \cap f(U \setminus \{c\}) = \emptyset$ ce qui revient à dire $|f(z) - a| > r$ pour tout $z \in U \setminus \{c\}$. La fonction

$$g\colon \left| \begin{array}{rcl} U \setminus \{c\} & \longrightarrow & \mathbf{C}, \\ z & \longmapsto & 1/(f(z) - a) \end{array} \right.$$

est holomorphe sur $U \setminus \{c\}$ et elle est bornée au voisinage de $c$. On en déduit que $c$ est une singularité effaçable de $g$. Mais alors, la fonction $f = 1/g + c$ admet une singularité effaçable en $c$ si $g(c) \neq 0$ ou un pôle en $c$ si $g(c) \neq 0$. Dans tous les cas, la singularité $c$ n'est pas essentielle. ☐

D'après ce théorème et le théorème de l'application ouverte, si $c$ est une singularité essentielle de $f$, alors $f(U \setminus \{c\})$ est à la fois ouverte et dense dans $\mathbf{C}$. En fait, on verra même que cette image est soit $\mathbf{C}$ tout entier soit $\mathbf{C}$ privé d'un point.

## 2.6 Théorème fondamental de l'algèbre

THÉORÈME 2.78 *(D'ALEMBERT-GAUSS).* Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Ce théorème est équivalent au théorème suivant.

THÉORÈME 2.79 *(factorisation des polynômes).* Tout polynôme $P(z) := a_0 + \cdots + a_n z^n \in \mathbf{C}[z]$ de degré $n \geqslant 1$ s'écrit comme un produit

$$P(z) = a_n(z - c_1)\dots(z - c_n).$$

Cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près.

Pour montrer ces théorèmes, on va s'appuyer sur le lemme suivant.

LEMME 2.80 *(de croissance).* Soit $P(z) := a_0 + \cdots + a_n z^n \in \mathbf{C}[z]$ un polynôme de degré $n \geqslant 0$. Alors il existe $R > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{B}(0, R), \quad 2^{-1}|a_n||z|^n \leqslant |P(z)| \leqslant 2|a_n||z|^n.$$

*Preuve* Le résultat est trivial pour $n = 0$. On suppose $n \geqslant 1$. On pose

$$R(z) := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k.$$

Alors pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a $|a_n||z|^n - R(z) \leqslant |P(z)| \leqslant |a_n||z|^n + R(z)$. Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{B}(0,1)$, on a $|z|^k \leqslant |z|^{n-1}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, donc $R(z) \leqslant |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Il suffit alors de prendre

$$R := \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right\}.$$

On vérifie alors que ce réel $R > 0$ fonctionne. □

*Preuve du théorème* Par l'absurde, supposons que $P$ n'admet par de racine dans $\mathbf{C}$. Alors la fonction

$$f : z \in \mathbf{C} \longmapsto 1/P(z) \in \mathbf{C}$$

est holomorphe sur $\mathbf{C}$. D'après le lemme de croissance, on a $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. On en déduit que $f$ est bornée. Le théorème de LIOUVILLE affirme que $f$ est constante ce qui est impossible car $n \geqslant 1$. Donc $P$ admet une racine dans $\mathbf{C}$. □

## 2.6 Logarithmes d'applications holomorphes

DÉFINITION 2.81. Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}^*$ une fonction holomorphe. Un *logarithme* de $f$ est une fonction holomorphe $g : D \to \mathbf{C}$ telle que

$$\forall z \in D, \quad \exp(g(z)) = f(z).$$

Une telle fonction $g$ vérifie

$$\forall z \in D, \quad g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

THÉORÈME 2.82. Soient $D$ un ouvert étoilé par rapport à un point $c \in D$ et $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas. Alors la fonction

$$g : \left| \begin{aligned} & D \longrightarrow \mathbf{C}, \\ & z \longmapsto b + \int_{[c,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \,\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \right.$$

où $b \in \mathbf{C}$ vérifie $\exp b = f(c)$ est un logarithme de $f$.

*Preuve* La fonction $f'/f$ est holomorphe sur l'ouvert étoilé $D$ par rapport à $c$, donc elle admet des primitives dans $D$ de la forme

$$z \longmapsto \int_{[c,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \,\mathrm{d}\zeta, \qquad b \in \mathbf{C}.$$

Comme $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ est surjective, il existe $b \in \mathbf{C}$ tel que $\exp b = f(c)$. On définit alors la fonction $g : D \to \mathbf{C}$ comme dans l'énoncé. Vérifions que $g$ est un logarithme de $f$. La fonction $h : z \in D \longmapsto f(z)\exp(-g(z))$ est holomorphe sur $D$ et, pour tout $z \in D$, on a

$$h'(z) = f'(z)\exp(-g(z)) - f(z)g'(z)\exp(-g(z)) = \left(f'(z) - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\exp(-g(z)) = 0.$$

On en déduit que $h$ est constante, *i. e.* il existe $C \in \mathbf{C}$ tel que $\exp(g(z)) = Cf(z)$ pour tout $z \in D$. Or $g(c) = b$ et $\exp b = f(c)$, donc $C = 1$. Cela montre que $g$ est un logarithme de $f$. □

◇ REMARQUE. Au lieu de prendre le segment $[c, z]$, on peut prendre n'importe quel chemin reliant $c$ à $z$ dans $D$.

THÉORÈME 2.83. Soient $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux et $c \in \mathbf{C} \setminus \gamma(I)$. Alors

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c} \in 2\pi i\mathbf{Z}.$$

*Preuve* On note $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$. Comme $\gamma(I)$ est compact, il existe des points $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ et des boules $U_1, \dots, U_n \in \mathbf{C}$ avec $n \geqslant 2$ tels que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![0, n]\!], & c \notin \overline{U_i}, \\ \forall i \in [\![1, n]\!], & \gamma_i := \gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i. \end{cases}$$

Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $z_i := \gamma(t_i)$. Sur chaque ouvert $U_i$, la fonction $z \longmapsto z - c$ ne s'annule pas. Soit $b_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\exp b_0 = z_0 - c$. On définit la fonction

$$g_1 : \left| \begin{array}{l} U_1 \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto b_0 + \displaystyle\int_{[z_0, z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c}. \end{array} \right.$$

Par une récurrence, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on définit une fonction $g_{i+1}\colon U_{i+1} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\forall z \in U_{i+1}, \quad g_{i+1}(z) = g_i(z_i) + \int_{[z_i, z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c}.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le théorème précédent assure $\exp g_i(z_i) = z_i - c$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, comme $\zeta \longmapsto 1/(\zeta - c)$ est holomorphe sur $U_i \cup U_{i+1}$ et la concaténation des chemins $[z_{i+1}, z_i]$ et $\gamma_{i+1}$ est un chemin fermé lisse par morceaux, on a

$$\frac{\exp g_{i+1}(z_{i+1})}{\exp g_i(z_i)} = \exp\left(\int_{[z_i, z_{i+1}]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c}\right) = \exp\left(\int_{\gamma_{i+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c}\right).$$

Comme le chemin $\gamma$ est fermé, on a $z_0 = z_n$, donc

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c}\right) = \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{i+1}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c}\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\exp g_{i+1}(z_{i+1})}{\exp g_i(z_i)} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{z_{i+1} - c}{z_- c} = 1.$$

ce qui assure la conclusion. ☐

DÉFINITION 2.84. Soit $\gamma I \to \mathbf{C}$ un chemin fermé lisse par morceaux. Pour $c \in \mathbf{C} \setminus \gamma(I)$, l'*indice* de $c$ par rapport à $\gamma$ est l'entier

$$\mathrm{Ind}_\gamma(c) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - c} \in \mathbf{Z}.$$

L'*intérieur* de $\gamma$ est l'ensemble

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{a \in \mathbf{C} \setminus \gamma(I) \mid \mathrm{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}.$$

Le chemin $\gamma$ est dit *fermé simple* si $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1$ pour tout $a \in \mathrm{Int}(\gamma)$.

▷ EXEMPLE. Soient $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. On considère le chemin $\gamma\colon t \in [0, 2\pi] \longmapsto z_0 + re^{it}$ paramétrisant le cercle de centre $z_0$ et de rayon $r$. Alors pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \partial\mathrm{B}(z_0, r)$, on a

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \mathrm{B}(z_0, r), \\ 0 & \text{si } a \in \mathbf{C} \setminus \overline{\mathrm{B}}(z_0, r). \end{cases}$$

On en déduit que $\mathrm{Int}(\gamma) = \mathrm{B}(z_0, r)$.

THÉORÈME 2.85. Soient $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $\gamma\colon I \to D$ un chemin fermé lisse tel que $\mathrm{Int}(\gamma) \subset D$. Alors

1. pour toute fonction holomorphe $f\colon D \to \mathbf{C}$, on a $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$;
2. pour toute fonction holomorphe $f\colon D \to \mathbf{C}$ et tout $a \in D \setminus \gamma(I)$, on a

$$f(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\,\mathrm{d}z.$$

*Preuve* On se place dans le cas où l'ouvert $D$ est étoilé. On a déjà vu le point 1. Montrons le point 2. Soient $f\colon D \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et $a \in D \setminus \gamma(I)$. On considère la fonction

$$f_1 : \left| \begin{array}{l} D \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ z \longmapsto \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}. \end{array} \right.$$

Comme $f$ est holomorphe sur $D$, la fonction $f_1$ est holomorphe sur $D \setminus \{a\}$ et bornée au voisinage de $a$, donc elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\tilde{f}_1\colon D \to \mathbf{C}$. On en déduit que

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \tilde{f}_1(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

La linéarité de l'intégrale donne alors la relation voulue. □

## 2.6 Résidus

### (i) Définition et théorème des résidus

DÉFINITION 2.86. Soient $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$, $c \in D$ et $f : D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Le *résidu* de $f$ en $c$ est le complexe

$$\operatorname{Res}_c f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{B}(c,r)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

où $r > 0$ est un réel tel que $\mathrm{B}(c,r) \subset D$. Cette définition ne dépend pas d'un tel réel $r$.

▷ EXEMPLE. Soit $f : D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe admettant un pôle $c$ d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$. On peut l'écrire sous la forme

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + \overline{f}(z)$$

sur $D$ où la fonction $\overline{f}$ est holomorphe sur $D$. Alors

$$\int_{\partial \mathrm{B}(c,r)} \overline{f}(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

De plus, on a déjà vu que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$\int_{\partial \mathrm{B}(c,r)} (z-c)^k\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1, \\ 2\pi i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit $\operatorname{Res}_c f = a_{-1}$.

THÉORÈME 2.87 *(des résidus)*. Soient $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $\gamma : I \to D$ un chemin fermé lisse par morceaux. Soit $S \subset D \setminus \gamma(I)$ une partie finie. Soit $f : D \setminus S \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$\sum_{c \in S \cap \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{Ind}_\gamma(c) \operatorname{Res}_c f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

*Preuve* On note $S = \{c_1, \dots, c_n\}$. On suppose que $f$ n'a pas de singularité essentielle. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la singularité $c_i$ est un pôle ou une singularité apparente de $f$, donc on peut écrire

$$f(z) = \frac{a_{i,-m_i}}{(z-c_i)^{m_i}} + \cdots + \frac{a_{i,-1}}{z-c} + \overline{f_i}(z)$$

où les entiers $m_i \in \mathbf{N}$ sont les ordres des singularités $c_i$ (valant 0 si $c_i$ est apparente) et on pose

$$h : \left| \begin{array}{rcl} D \setminus \{c_i\} & \longrightarrow & \mathbf{C}, \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=-m_i}^{-1} a_{i,k}(z-c_i)^k. \end{array} \right.$$

On remarque que la fonction $f - \sum_{i=1}^n h_i$ est holomorphe sur $D \setminus S$ et se prolonge donc en une fonction holomorphe sur $D$. On a donc

$$\int_\gamma \Big(f - \sum_{i=1}^n h_i\Big)(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{$*$}$$

Comme dans l'exemple précédent et avec le théorème de CAUCHY, pour $i \in [\![1, n]\!]$, comme les fonctions $z \longmapsto a_{i,k}(z-c_i)^k$ sont intégrable sur $D \setminus \{c_i\}$ pour $k \in [\![-m_i, -1]\!]$, on a

$$\int_\gamma h_i(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma a_{i,-1}(z-c_i)^{-1}\,\mathrm{d}z = a_{i,-1} \cdot 2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(c_i) = 2\pi i \operatorname{Res}_{c_i} f \operatorname{Ind}_\gamma(c_i).$$

Grâce à la relation $(*)$, cela montre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_{c_i} f \operatorname{Ind}_\gamma(c_i).$$ □

### (ii) Règles de calculs

PROPOSITION 2.88. Soient $f, g : D \setminus \{c\} \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes et $a, b \in \mathbf{C}$. Alors

$$\operatorname{Res}_c(af + bg) = a \operatorname{Res}_c f + b \operatorname{Res}_c g.$$

PROPOSITION 2.89. Soit $f\colon D\setminus\{c\}\to\mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $c$ est un pôle simple d'ordre $m\in\mathbf{N}^*$ de $f$. Par conséquent, on peut l'écrire sous la forme

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-c)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+\overline{f}(z)$$

sur $S$ où la fonction $\overline{f}$ est holomorphe sur un voisinage de $c$. Alors

$$\operatorname{Res}_c f=a_{-1}=\lim_{z\to c}f(z)(z-c).$$

*Preuve* On procède comme dans l'exemple précédent. □

PROPOSITION 2.90. Soient $h$ et $h$ deux fonctions holomorphes sur un voisinage de $c$ telles que $g(c)\neq 0$, $h(c)=0$ et $h'(c)\neq 0$. Alors la fonction $f:=g/h$ admet un pôle en simple en $c$ et

$$\operatorname{Res}_c f=g(c)/h'(c).$$

*Preuve* La fonction $h$ se développe en série entière au voisinage de 0 et, sur ce voisinage, on a

$$h(z)=h'(c)(z-c)+\frac{h''(c)}{2}(z-c)^2+\cdots,$$

donc

$$\lim_{z\to c}(z-c)f(z)=\frac{g(c)}{h'(c)}\neq 0.$$

Donc $c$ est un pôle simple de $f$ et la proposition précédent donne $\operatorname{Res}_c f=g(c)/h'(c)$. □

PROPOSITION 2.91. Soient $g$ et $h$ deux fonctions holomorphes sur un voisinage de $c$. On suppose que $c$ est un zéro d'ordre $m\in\mathbf{N}^*$ de $g$. On note $f:=hg'/g$. Alors

$$\operatorname{Res}_c f=m\cdot h(c).$$

*Preuve* Sur un voisinage $V$ de $c$, on peut écrire $g(z)=(z-c)^m\tilde{g}(z)$ où la fonction $\tilde{g}$ est holomorphe sur $V$ et ne s'annule pas en $c$. Alors pour tout $z\in V$, on a

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{m(z-c)^{m-1}\tilde{g}(z)+(z-c)^m\tilde{g}'(z)}{(z-c)^m\tilde{g}(z)}=\frac{m}{z-c}+\frac{\tilde{g}'(z)}{\tilde{g}(z)}.$$

Avec les propositions précédentes et comme la fonction $h\tilde{g}'/\tilde{g}$ est holomorphe sur $V$, on a

$$\operatorname{Res}_c f=m\cdot\operatorname{Res}_c\left(\frac{h(\cdot)}{\cdot-c}\right)+\operatorname{Res}_c\left(\frac{h\tilde{g}'}{\tilde{g}}\right)=m\cdot h(c).$$ □

PROPOSITION 2.92. Soient $g$ et $h$ deux fonctions holomorphes sur un voisinage de $c$. On suppose que $c$ est un pôle d'ordre $m\in\mathbf{N}^*$ de $g$. On note $f:=hg'/g$. Alors

$$\operatorname{Res}_c f=-m\cdot h(c).$$

*Preuve* Il existe une fonction holomorphe $\tilde{g}$ sur un voisinage $U$ de $c$ telle que $g(z)=\tilde{g}(z)/(z-c)^m$ pour tout $z\in U\setminus\{c\}$ et $\tilde{g}(c)\neq 0$. On procède alors de même que dans la preuve précédente. □

▷ EXEMPLE. On note $S:=\{e^{i\pi/4},e^{3i\pi/4},e^{5i\pi/4},e^{7i\pi/4}\}$ l'ensemble des racines du polynôme $X^4+1$ et on considère la fonction $f\colon z\in\mathbf{C}\setminus S\longmapsto z^2/(1+z^4)$. Le complexe $c:=e^{i\pi/4}$ est un pôle simple de $f$. Cette fonction est le quotient des deux fonctions définies par $g(z)=z^2$ et $h(z)=1+z^4$ qui sont holomorphes et vérifie $g(c)\neq 0$, $h(c)=0$ et $h'(c)\neq 0$. Alors

$$\operatorname{Res}_c f=\frac{g(c)}{h'(c)}=\frac{c^2}{4c^3}=\frac{e^{-i\pi/4}}{4}.$$

## 2.6 Comptage des zéros et des pôles

DÉFINITION 2.93. Soit $D$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction $f$ est dite *méromorphe* sur $D$ si elle est holomorphe sur $D\setminus S$ où l'ensemble $S\subset D$ est discret tel que tout point de $S$ soit une singularité apparente ou un pôle de $f$.

◇ REMARQUE. Quitter à prolonger $f$ en une fonction holomorphe, on peut considérer que les fonctions méromorphes $f$ n'ont pas de singularités apparentes.

THÉORÈME 2.94 *(de comptage).* Soient $D$ un ouvert étoilé de $\mathbf{C}$ et $f$ une fonction méromorphe sur $D$ ayant un nombre fini $N\in\mathbf{N}$ de zéros et un nombre fini $M\in\mathbf{N}$ de pôles. Soit $\gamma\colon I\to D$ un chemin lisse par morceaux, fermé et simple qui

ne passe par aucun zéro ou pôle de $f$. Alors
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = N - M.$$

*Preuve* On note $P \subset D$ l'ensemble des pôles de $f'/f$. La simplicité du chemin $\gamma$ et le théorème des résidus donnent
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{c\in P\cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Ind}_\gamma(c)\,\mathrm{Res}_c(f'/f) = \sum_{c\in P\cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}_c(f'/f).$$
Soit $c \in P$. Alors la singularité $c$ est soit un zéro soit un pôle. Si $c$ est un zéro d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$, on a $\mathrm{Res}_c(f'/f) = m$ et, si $c$ est un pôle d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$, on a $\mathrm{Res}_c(f'/f) = -m$. Cela montre le résultat. □

THÉORÈME 2.95 *(*ROUCHÉ*).* Soient $D$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, $f, g \colon D \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes et $\gamma \colon I \to D$ un chemin lisse par morceaux, fermé et simple. On suppose
$$\forall z \in \gamma(I), \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$
Alors $f$ et $g$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de $\gamma(I)$.

*Preuve* Pour tout $z \in \gamma(I)$, on a $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$, donc $|f(z)/g(z) - 1| < 1$. Soit $z \in \gamma(I)$. Alors il existe donc un voisinage $U_z$ de $z$ dans $\gamma(I)$ tel que $f/g(U) \subset \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$. Alors l'application $\mathrm{Log} \circ (f/g)$ est une primitive de $f'/f - g'/g$ dans $U_z$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \gamma(I)$, avec les théorème 2.59 et de CAUCHY, on a
$$\int_\gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right)\mathrm{d}z = 0.$$
On conclut alors en utilisant la linéarité de l'intégrale et le théorème de comptage. □