Surface de Riemann

Frank Loray

Master 2 de mathématiques fondamentales · Université de Rennes 1
Notes prises par Téofil Adamski (version du 12 octobre 2022)

Chapitre 1
Définition et premiers exemples

1.1. Surfaces de Riemann

Définition 1.1. Une *surface de Riemann* est une surface réelle connexe X muni d'un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, dit *complexe*, tels que les changements de cartes

$$\varphi_{i,j} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j), \qquad i,j \in I$$

soient holomorphes. Une *fonction holomorphe* sur un ouvert $U \subset X$ est une application $f \colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ tel que les composées

$$f|_{U\cap U_i} \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U\cap U_i)} \colon \varphi_i(U \cap U_i) \longrightarrow \mathbf{C}, \qquad i \in I$$

soient holomorphes.

Deux atlas définissant la même structure complexe sur X si leur réunion est encore un atlas complexe, c'est-à-dire si les cartes de l'une des deux structures sont holomorphes pour l'autre. On note $\mathscr{O}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset X$.

Définition 1.2. Une application $\phi \colon X \longrightarrow Y$ entre deux surfaces de Riemann est *holomorphe* si elle l'est dans les cartes, c'est-à-dire si les composées $\psi_k \circ \phi \circ \varphi_i^{-1}$, quand elles sont bien définies, sont holomorphe. Une telle application ϕ est un *morphisme* de surfaces de Riemann. Un *isomorphisme* est un morphisme bijectif dont l'inverse est un morphisme.

Remarque. Un morphisme bijectif est automatiquement un morphisme.

Exemples.
- Les ouverts connexes de $\mathbf{C}$ sont des surfaces de Riemann.
- On considère la sphère unité $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ et on note N son pôle nord et S son pôle sud. La *projection stéréographique* est l'application

$$\varphi_1 \colon \left| \begin{array}{l} U_1 \coloneqq \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \qquad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \dfrac{x_1}{1-x_3} + i\dfrac{x_2}{1-x_3}. \end{array} \right.$$

et on pose également

$$\varphi_2 \colon \left| \begin{array}{l} U_2 \coloneqq \mathbf{S}^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbf{C}, \\ \qquad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \dfrac{x_1}{1+x_3} - i\dfrac{x_2}{1+x_3}. \end{array} \right.$$

Montrons que celles-ci munissent la sphère $\mathbf{S}^2$ d'un atlas complexe. On trouve

$$\varphi_1^{-1}(x+iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right), \qquad x+iy \in \mathbf{C}$$

et on vérifie que l'application $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ est holomorphe puisque

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = 1/z, \qquad z \in \mathbf{C}^*.$$

Ainsi la sphère $\mathbf{S}^2$ muni de ces ouverts et des applications φ_1 et φ_2 est une surface de Riemann, notée $\hat{\mathbf{C}}$. Il s'agit d'une compactification holomorphe et on le voit comme $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.3. Un difféomorphisme local de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ est holomorphe si et seulement si, en tout point, sa jacobienne est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Ces matrices préservent les angles (ce sont des *transformations conformes*) et l'orientation. Ainsi une surface de Riemann est toujours orientée.

1.2. La sphère de Riemann

Proposition 1.4. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe. Alors une application holomorphe $f \colon U \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ est une fonction méromorphe $U \setminus f^{-1}(\{\infty\}) \longrightarrow \mathbf{C}$ sauf si $f = \infty$. Réciproquement, une fonction méromorphe sur U définit un morphisme $U \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$.

Preuve Une fonction $f \colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ est méromorphe si et seulement si, au voisinage de tout point de U, la fonction f ou $1/f$ est holomorphe (en effet, une des deux fonctions $\varphi_i \circ f$ doit être holomorphe). Le reste en découle. ◁

Proposition 1.5. Soient $f, g \colon X \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes sur une surface de Riemann X. S'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $f|_U = g|_U$, alors $f = g$.

Preuve Il suffit d'utiliser le théorème de prolongement analytique et la connexité de X. ◁

Proposition 1.6. Une surface de Riemann n'admet pas de fonction holomorphe non constante.

Preuve On utilise le principe du maximum. ◁

Définition 1.7. Une *fonction méromorphe* sur une surface de Riemann X est une morphisme de X dans $\hat{\mathbf{C}}$ qui n'est pas constante égale à l'infini. L'espace des fonctions méromorphes sur X est un corps $\mathscr{M}(X)$ pour l'addition et la multiplication.

Exemple. La proposition précédente énonce que $\mathscr{O}(\hat{\mathbf{C}}) = \mathbf{C}$. Pourtant l'ensemble $\mathscr{M}(\hat{\mathbf{C}})$ est bien plus gros et il s'agit de l'anneau $\mathbf{C}(z)$ (voir ci-dessous), il ne s'agit donc pas du corps des fractions de l'anneau $\mathscr{O}(\hat{\mathbf{C}})$.

Définition 1.8. Soit $\phi \colon X \longrightarrow Y$ un morphisme. Dans des cartes, on obtient une fonction $\tilde{\phi}$. On note m la multiplicité d'un point p de la fonction $\tilde{\phi}_{i,j}$ On dit que le morphisme ϕ prend la valeur p avec multiplicité p.

Remarque. On a $m > 0 \Leftrightarrow \tilde{\phi}'(x_0) = 0$. Ceci n'arrive que sur un ensemble discret.

Proposition 1.9. On a $\mathscr{M}(\hat{\mathbf{C}}) = \mathbf{C}(z)$.

Preuve Soit $f(z) = P(z)/Q(z) \in \mathbf{C}(z)$ une fraction rationnelle. Alors elle est méromorphe sur le plan $\mathbf{C} \subset \hat{\mathbf{C}}$. Si $f = 0$, alors elle est méromorphe sur $\hat{\mathbf{C}}$. Sinon la fonction $1/f$ est méromorphe sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbf{C}}$ dans la deuxième carte. D'où $f \in \mathscr{M}(\hat{\mathbf{C}})$.

Réciproquement, soit $f \in \mathscr{M}(\hat{\mathbf{C}})$ une fonction méromorphe. Pour tout point $y_0 \in \hat{\mathbf{C}}$, la préimage $f^{-1}(\{y_0\})$ est discrète et donc finie car la sphère $\hat{\mathbf{C}}$ est compacte. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{C}$ les zéros de la fonction f de multiplicité $m_1, \dots, m_k \geqslant 0$. Soient $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbf{C}$ les pôles de la fonction f de multiplicité $n_1, \dots, n_\ell \geqslant 0$. La fonction g définie par l'égalité

$$g(z) \coloneqq f(z)/R(z) \quad \text{avec} \quad R(z) \coloneqq \frac{(z-\alpha_1)^{m_1} \cdots (z-\alpha_k)^{m_k}}{(z-\beta_1)^{n_1} \cdots (z-\beta_\ell)^{n_\ell}}$$

est alors méromorphe sur $\mathbf{C}$, holomorphe à l'infini et non nulle. De la sorte, on obtient un morphisme $g\colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$. Si $g(\infty) \neq \infty$, alors la fonction g est bornée et holomorphe sur $\hat{\mathbf{C}}$, donc elle est constante, c'est-à-dire qu'on peut écrire $f = cR$ avec $c \in \mathbf{C}$ ce qui conclut ce cas. Mais si $g(\infty) = \infty$, alors la fonction $1/g$ vérifie le cas précédent et on obtient la même conclusion. ◁

Proposition 1.10. Soit $f\colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ un morphisme non constant. Soit $y_0 \in \hat{\mathbf{C}}$ un point. Alors le nombre de préimages $\sharp f^{-1}(\{y_0\})$ comptées avec multiplicités ne dépend pas du point y_0. On l'appelle le *degré* du morphisme f et on le note $\deg f$. Lorsque $f(z) = P(z)/Q(z)$, son degré est

$$\deg f = \max(\deg P, \deg Q).$$

Idée On procède en deux étapes.

- On montre que $\sharp f^{-1}(\{0\}) = \sharp f^{-1}(\{\infty\})$,
- puis que $\sharp f^{-1}(\{y_0\}) = \sharp f^{-1}(\{\infty\})$ en considérant la fonction $f - y_0$. ◁

Les applications de degré nul sont constantes. Celles de degré un sont les *applications de Moebius* : elles sont de la forme

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0.$$

De plus, elles sont bijectives et la réciproque est vraie.

Proposition 1.11. Les automorphismes de la sphère de Riemann sont les applications de Moebius.

On note $\operatorname{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ le groupe des automorphismes de la sphère de Riemann. Deux automorphismes

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{et} \qquad z \longmapsto \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

sont égaux si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbf{C}^*.$$

Ainsi le groupe $\operatorname{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ est isomorphe au groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$.

Proposition 1.12. Le groupe $\operatorname{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ agit 3-transitivement sur la sphère de Riemann. Autrement dit, pour tous triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \hat{\mathbf{C}}^3$ et $(y_1, y_2, y_3) \in \hat{\mathbf{C}}^3$ d'éléments distincts, il existe un unique automorphisme $f \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ tel que

$$f(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Idée On le montre d'abord pour le triplet $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, \infty)$: on trouve l'automorphisme

$$z \longmapsto \frac{z - x_1}{z - x_3} \bigg/ \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}.$$

Cela permet ainsi de conclure. ◁

Proposition 1.13 *(forme de Jordan).* Tout automorphisme $f \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ est conjugué dans le groupe $\operatorname{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ à un automorphisme de la forme

$$z \longmapsto \lambda z \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{C}^* \qquad \text{ou} \qquad z \longmapsto z + 1.$$

La sphère de Riemann $\hat{\mathbf{C}}$ peut-être également vu comme la droite projective $\mathbf{P}(\mathbf{C}^2)$, c'est-à-dire l'ensemble des droites vectoriels du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^2$. On note $(z : w)$ la classe d'équivalence dans la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'un vecteur $(z, w) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On peut munir l'ensemble $\mathbf{P}(\mathbf{C}^2)$ d'une structure complexe par les cartes

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{C}^2), \\ z &\longmapsto (z : 1) \end{aligned} \right. \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{aligned} \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{C}^2), \\ w &\longmapsto (1 : w). \end{aligned} \right.$$

Le changement de cartes est alors l'application

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{C}^* &\longrightarrow \mathbf{C}^*, \\ z &\longmapsto 1/z \end{aligned} \right.$$

et on retrouve la même structure que la sphère $\hat{\mathbf{C}}$. Le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ agit linéairement sur l'espace $\mathbf{C}^2$, donc on retrouve que le groupe $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$ agit sur l'ensemble $\mathbf{P}(\mathbf{C}^2)$.

Proposition 1.14. Soit
$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{R})$$
une matrice réelle de déterminant strictement positif. Alors les points suivants sont équivalents :
(i) la matrice A préserve les angles ;
(ii) elle commute avec la matrice
$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ;$$
(iii) on a $a = d$ et $b = -c$.

Proposition 1.15. Soit $f : U \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ tel que $df > 0$. Alors les points suivants sont équivalents :
(i) la fonction f est conforme ;
(ii) elle est holomorphe ;
(iii) elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann.

Conséquence. Une surface connexe orientée munie d'une métrique riemannienne (une forme quadratique non dégénérée sur l'espace tangent) est automatiquement munie d'une structure conforme.

Exemple. La sphère $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ est munie de la métrique induite par la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^3$. Alors on retrouve la sphère de Riemann.

Proposition 1.16. La projection stéréographique est conforme. En particulier, elle est holomorphe par rapport aux structures de surface de Riemann sur $\mathbf{S}^2$ et $\{x_3 = 0\}$.

Le groupe $\mathrm{SO}(3)$ préserve la métrique de la sphère $\mathbf{S}^2$, donc il préserve les angles et donc la structure conforme. Ses éléments définissent donc des automorphismes holomorphes sur la sphère de Riemann.

Proposition 1.17. On obtient alors une morphisme de groupes injectif
$$\mathrm{SO}(3) \longhookrightarrow \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}}) \simeq \mathrm{PGL}(2,\mathbf{C}).$$
et son image est
$$\mathrm{PSU}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a\bar{a} + b\bar{b} = 1,\ a, b \in \mathbf{C} \right\}.$$

Idée On considère l'*involution antipodale*
$$\tau : z \longmapsto -1/\bar{z}.$$
Elle commute avec les rotations. Cela implique que tout élément f dans l'image est dans $\mathrm{PSU}(2)$. Réciproquement, soit $g \in \mathrm{PSU}(2)$. Soit $f \in \mathrm{SO}(3)$ une rotation envoyant un point fixe de l'application g sur l'origine. Alors l'application $h := f \circ g \circ f^{-1}$ appartient à $\mathrm{PSU}(2)$ et fixe l'origine, donc elle est de la forme $h(z) = a/\bar{a} \times z \in \mathrm{SO}(3)$, donc $g \in \mathrm{SO}(3)$. ◁

Théorème 1.18 *(Dirichlet-Schwarz).* Toute surface de Riemann X homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^2$ est isomorphe à la sphère de Riemann.

Autrement dit, il n'y a qu'une seule structure complexe sur la sphère $\mathbf{S}^2$ à isomorphisme près.

1.3. Tores complexes

Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ deux complexes $\mathbf{R}$-indépendants. On note Γ le sous-groupe additif de $\mathbf{C}$ engendré par ces complexes.

Proposition 1.19. Le quotient $\mathbf{C}/\Gamma$ admet une unique structure de surface de Riemann telle que l'application quotient

$$\pi\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\Gamma$$

soit holomorphe et telle que l'espace $\mathbf{C}/\Gamma$ soit homéomorphe à un tore.

Le parallélogramme P reliant les points 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$ et ω_2 est le *domaine fondamental* du quotient $\mathbf{C}/\Gamma$. Toute classe d'équivalence modulo Γ rencontre ce dernier et son intérieur rencontre une seule fois chaque classe. En recollant les côtés du domaine fondamental, on obtient deux homéomorphismes. De plus, on ajoute les translations, qui sont holomorphes, comme changements de cartes.

Théorème 1.20. *Toute surface connexe compacte orientée est homéomorphe à la surface Σ_g de genre g pour un entier $g \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire à la surface « à g trous ».*

Théorème 1.21. *Deux tores $\mathbf{C}/\Gamma$ et $\mathbf{C}/\Gamma'$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\Gamma = \lambda\Gamma'$.*

1.4. Courbes algébriques

Soient $g \in \mathbf{N}$ un entier et $P(z) \coloneqq \prod_{k=1}^{2g+2}(z - z_k) \in \mathbf{C}[z]$ un polynôme de racines z_k deux à deux distinctes. On considère la courbe

$$X \coloneqq \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid w^2 = P(z)\}.$$

On pose $F(z, w) \coloneqq P(z) - w^2 \in \mathbf{C}[z, w]$. Comme $\partial_w F = -2w$, la courbe est lisse si $(z, w) \neq (z_k, 0)$. On peut donc paramétrer localement la courbe par $\mathbf{C} \simeq \{w = 0\}$ en dehors des points $(z_k, 0)$. Mais le polynôme ne peut s'annuler en ces points, donc on peut également paramétrer localement la courbe par $\mathbf{C} \simeq \{z = 0\}$ aux points $(z_k, 0)$. Ainsi l'ensemble X est une surface de Riemann.

Définition 1.22. Une *courbe holomorphe* est une surface réelle de $\mathbf{C}^2 \simeq \mathbf{R}^4$ dont le plan tangent est complexe.

Chapitre 2
Groupes fondamentaux et revêtements

2.1. Chemins, lacets, groupes fondamentaux

Définition 2.1. Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans l'espace X est une application continue $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$. Un *lacet* est un chemin $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Deux chemins γ_1 et γ_2 d'extrémités p et q sont *homotopes* et on note $\gamma_1 \sim \gamma_2$ s'il existe une application continue $F\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que

- $F(t,0) = \gamma_1(t)$;
- $F(t,1) = \gamma_2(t)$;
- $F(0,s) = p$;
- $F(1,s) = q$.

Notation. On note $\operatorname{path}(X,p,q)$ l'ensemble des chemins de X d'extrémités p et q, puis $\operatorname{loop}(X,p)$ l'ensemble des lacets de X d'extrémité p. On définit la concaténation $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ de deux chemins γ_1 et γ_2.

Définition 2.2. L'ensemble quotient $\pi_1(X,p) \coloneqq \operatorname{loop}(X,p)/{\sim}$ est un groupe pour la concaténation. L'élément neutre est la classe 1 du lacet constant égal au point p. L'inverse d'un élément $[\gamma] \in \pi_1(X,p)$ est la classe $[t \longmapsto \gamma(1-t)]$.

Exemple. Notons X le plan $\mathbf{R}^2$ privé d'un point. Alors le groupe fondamental $\pi_1(X,p)$ avec $p \in X$ est isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$. Plus généralement, le groupe fondamental du plan privé de n points est le groupe libre à n générateurs.

Proposition 2.3. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Alors les groupes fondamentaux $\pi_1(X,p)$ et $\pi_1(X,q)$ sont isomorphes. pour tous points $p,q \in X$.

Preuve Comme l'espace X est connexe par arcs, on prend un chemin $\gamma_0 \in \operatorname{path}(X,p,q)$. Alors l'application

$$\left|\begin{aligned} \pi_1(X,p) &\longrightarrow \pi_1(X,q), \\ [\gamma] &\longmapsto [\gamma_0^{-1} \cdot \gamma \cdot \gamma_0] \end{aligned}\right.$$

est un isomorphisme de groupes. ◁

Exemple. Le groupe fondamental du tore est le groupe $\langle \alpha, \beta \mid [\alpha,\beta] = 1 \rangle \simeq \mathbf{Z}^2$.

Définition 2.4. Un espace topologique connexe par arcs X est *simplement connexe* si son groupe fondamental est trivial.

Exemple. Les espaces $\mathbf{C}$ et $\hat{\mathbf{C}}$ sont simplement connexes.

Fonctiorialité. Soient $f\colon (X,p) \longrightarrow (Y,q)$ un morphisme d'espaces topologiques pointés, c'est-à-dire une application continue telle que $f(p) = q$. Alors l'application

$$f_*\colon \left|\begin{array}{rcl}\pi_1(X,p) & \longrightarrow & \pi_1(X,q),\\ [f] & \longmapsto & [f\circ\gamma]\end{array}\right.$$

est un morphisme de groupes.

2.2. Revêtements

Définition 2.5. Soit Y un espace connexe par arcs. Une application continue $f\colon X \longrightarrow Y$ est un *revêtement* si, pour tout point $q \in Y$, il existe un voisinage $V \subset Y$ du point q et une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts disjoints tels que

- $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i\in I} U_i$;
- pour chaque $i \in I$, la restriction $f\colon U_i \longrightarrow V$ soit un homéomorphisme.

Remarquons qu'un revêtement est un homéomorphisme local. Mais la réciproque est fausse.

Proposition 2.6. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un revêtement.

1. Soit $W \subset Y$ un ouvert connexe. Posons $Z := f^{-1}(W)$. Alors la restriction $f\colon Z \longrightarrow W$ est encore un revêtement.
2. Soit $X_0 \subset X$ une composante connexe. Alors la restriction $f\colon X_0 \longrightarrow Y$ est encore un revêtement.
3. Soit $f_i\colon X_i \longrightarrow Y$ un revêtement pour chaque indice $i \in [\![1,n]\!]$. Alors ils forment un revêtement $\bigsqcup_{i=1}^n X_i \longrightarrow Y$.

Définition 2.7. Un *revêtement trivial* de degré d est le revêtement

$$\bigsqcup_{i=1}^{d} Y_i \longrightarrow Y, \qquad Y_i \xrightarrow{\text{homéo.}} Y.$$

Exemples. L'application $z \in \mathbf{C} \longmapsto \exp z \in \mathbf{C}^*$ est un revêtement. Pour un entier $n \geqslant 1$, l'application $z \in \mathbf{C} \longmapsto z^n \in \mathbf{C}$ n'est pas un revêtement car ce n'est même pas un homéomorphisme local, mais l'application $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ est un revêtement. Pour un tore $\mathbf{C}/\Gamma$, la projection $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/\Gamma$ est un revêtement.

Proposition 2.8. Un revêtement $f\colon X \longrightarrow Y$ a la propriété de relèvement des chemins, c'est-à-dire que, pour tout chemin $\gamma \in \operatorname{path}(X,p,q)$ et tout point $\tilde{p} \in f^{-1}(\{p\})$, il existe un unique point $\tilde{q} \in X$ et un unique chemin $\tilde{\gamma} \in \operatorname{path}(X,\tilde{p},\tilde{q})$ tels que

$$f\circ\tilde{\gamma} = \gamma.$$

Preuve Comme l'image $\gamma([0,1])$ est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini d'ouverts de trivialisation $V_1,\dots,V_n \subset Y$. On suppose que $p \in V_1$ et $q \in V_n$. On décompose $\gamma = \gamma_1\cdots\gamma_n$ tel que $\gamma_i([0,1]) \subset V_i$. Il existe une unique composante connexe U_1 de $f^{-1}(V_1)$ contenant p. Posons $\tilde{\gamma}_1 := f|_{U_1}^{-1}\circ\gamma_1$ puisque la restriction $f|_{U_1}\colon U_1 \longrightarrow V_1$ est un homéomorphisme. Maintenant, on pose $p_1 := \gamma_1(1) \in V_1\cap V_2$ et $\tilde{p}_1 := \tilde{\gamma}_1(1)$. On peut relever le chemin γ_2 en un chemin $\tilde{\gamma}_2$ au-dessus de V_2 en partant de $\tilde{p}_1$. Ainsi de suite, on construit des chemins $\tilde{\gamma}_i$ et le chemin $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_1\cdots\tilde{\gamma}_n$ convient ◁

Un tel chemin $\tilde{\gamma}$ est appelé le *relèvement* du chemin γ. Attention, le relèvement d'un lacet n'est en général pas un lacet.

Proposition 2.9. Soient $f\colon X \longrightarrow Y$ un revêtement et $\gamma \in \operatorname{path}(X,p,q)$ un chemin. Pour tout point $\tilde{p}_i \in f^{-1}(\{p\})$, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}_i$ du chemin γ tel que $\tilde{\gamma}_i(0) = \tilde{p}_i$ et on pose alors $\tilde{q}_i \coloneqq \tilde{\gamma}_i(1)$. Alors l'application

$$\phi_\gamma : \left| \begin{array}{r} f^{-1}(\{p\}) \longrightarrow f^{-1}(\{q\}), \\ \tilde{p}_i \longmapsto \tilde{q}_i \end{array} \right.$$

est une bijection d'inverse $\phi_{\gamma^{-1}}$.

Remarque. Grâce au relèvement des homotopies, on vérifie que l'application ϕ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées du chemin γ.

Dans le cas $p = q$, on en déduit un morphisme de groupes $\pi_1(Y, p) \longrightarrow \mathfrak{S}(f^{-1}(\{p\}))$ qui associe à tout classe $[\gamma]$ l'application $\phi_{[\gamma]}^{-1}$, appelé la *monodromie* du revêtement f.

Exemple. On considère le revêtement $\exp \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^*$. Alors sa monodromie est le morphisme de groupes

$$\left| \begin{array}{r} \pi_1(\mathbf{C}^*, 1) \simeq \mathbf{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}(2i\pi\mathbf{Z}), \\ 1 \longmapsto (n \longmapsto n + 2i\pi). \end{array} \right.$$

De même, la monodromie du revêtement $z \in \mathbf{C}^* \longmapsto z^n \in \mathbf{C}^*$ est le morphisme de groupes

$$\left| \begin{array}{r} \pi_1(\mathbf{C}^*, 1) \simeq \mathbf{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}), \\ 1 \longmapsto (k \longmapsto k + 1). \end{array} \right.$$

Exercice 1. Montrer que

1. l'image de la monodromie est l'identité si et seulement si le revêtement est trivial ;
2. l'image agit transitivement si et seulement si l'espace X est connexe ;
3. les composantes connexes de l'espace X sont en bijection avec les orbites de l'ensemble $f^{-1}(\{p\})$ sous l'action de la monodromie.

Corollaire 2.10.
1. Le nombre de points dans la fibre est constant et c'est le degré du revêtement, notée $\deg f \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.
2. La fonction f est surjective.

Proposition 2.11. Soient $f \colon X \longrightarrow Y$ un relèvement et $g \colon Z \longrightarrow Y$ une application continue où l'espace Z est connexe par arcs et simplement connexe. Soient $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ et $z_0 \in Z$ trois points vérifiant $f(x_0) = y_0 = g(z_0)$. Alors il existe un unique relèvement $\tilde{g} \colon Z \longrightarrow X$ tel que

$$f \circ \tilde{g} = g \qquad \text{et} \qquad \tilde{g}(z_0) = x_0.$$

Preuve Soient $z_1 \in Z$ et $\gamma \in \operatorname{path}(Z, z_0, z_1)$. On pose $\underline{\gamma} \coloneqq g \circ \gamma \in \operatorname{path}(Y, y_0, y_1)$. On le relève en un chemin $\tilde{\gamma} \in \operatorname{path}(X, x_0, x_1)$ en partant du point x_0. On définit $\tilde{g}(z_1) \coloneqq x_1$. Il reste à montrer que le point x_1 ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin $\underline{\gamma}$. ◁

Corollaire 2.12. La restriction d'un revêtement $f \colon X \longrightarrow Y$ à un ouvert simplement connexe $V \subset Y$ est triviale.

2.3. Revêtements universels

Proposition 2.13. Soit $f \colon X \longrightarrow Y$ un revêtement avec X connexe par arcs et simplement connexe. Alors il satisfait la propriété universelle suivante :

> *pour tout revêtement $g \colon Z \longrightarrow Y$ avec Y connexe par arcs et pour tous points $x_0 \in X$ et $z_0 \in Z$ tels que $f(x_0) = g(z_0)$, il existe un unique revêtement $h \colon X \longrightarrow Z$ tel que $f = g \circ h$.*

En particulier, si Z est aussi simplement connexe, alors un tel revêtement h est un isomorphisme. On dit que le revêtement f est *universel*, il est unique à isomorphisme près.

Remarque. Soit Y une variété. Alors son groupe fondamental $\pi_1(Y, p)$ est dénombrable. En particulier, la fibre du revêtement universel est dénombrable.

Théorème 2.14. Soit X une variété connexe. Alors elle admet un revêtement universel.

Preuve Soit $x_0 \in X$. On note $\Pi(x_0, x) \coloneqq \mathrm{path}(X, x_0, x)/\sim$. On définit

$$X \coloneqq \{(x, [\gamma]) \mid x \in X,\ [\gamma] \in \Pi(x_0, x)\}.$$

Montrons que l'ensemble $\tilde{X}$ muni de la projection $u\colon (x, [\gamma]) \in \tilde{X} \longmapsto x \in X$ est le revêtement universel de l'espace X.

Pour commencer, munissons l'ensemble $\tilde{X}$ d'une topologie. Soit $(x, [\gamma]) \in \tilde{X}$. Soit U un voisinage simplement connexe du point x. On définit un voisinage ouvert de ce point par l'égalité

$$U_{[\gamma]} \coloneqq \{(x', [\gamma \cdot \sigma]) \mid x' \in U,\ \sigma \in \mathrm{path}(u, x, x')\}.$$

On considère alors la topologie engendrée par la base de voisinage constitué des ensembles $U_{[\gamma]}$ pour chaque voisinage simplement U du point x et pour chaque classe d'homotopie $[\gamma]$.

On vérifie que l'application u est un revêtement connexe en remarquant que $u^{-1}(U) = U_{[\gamma]}$ pour une classe $[\gamma] \in \Pi(x_0, x)$.

Montrons que l'espace $\tilde{X}$ est connexe. Un point $(x, [\gamma])$ est relié au point $(x_0, 1)$ par le chemin $t \longmapsto (\gamma(t), [\gamma^t])$ où la notation γ^t désigne le chemin

$$\gamma^t\colon s \longmapsto \gamma(ts).$$

Montrons qu'il est simplement connexe. Soit $t \longmapsto (x_t, [\gamma_t])$ un lacet dans $\tilde{X}$ base en $(x_0, 1)$. On construit l'homotopie par l'égalité

$$(s, t) \longmapsto (\gamma_t(s), [\gamma_t^s]). \qquad \triangleleft$$

2.4. Transformations de revêtement

Définition 2.15. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un revêtement. Un *automorphisme* du revêtement f est un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(X)$ tel que $f \circ \phi = f$. On note $\mathrm{Aut}(X/Y)$ l'ensemble des automorphismes du revêtement f.

L'ensemble $\mathrm{Aut}(X/Y)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X)$.

Définition 2.16. Un revêtement $f\colon X \longrightarrow Y$ est *galoisien* si le groupe $\mathrm{Aut}(Y/X)$ agit transitivement sur les fibres du revêtement f, c'est-à-dire si, pour tous points $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y_0\})$, il existe un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(X/Y)$ tel que $x_2 = \phi(x_1)$.

Théorème 2.17. Soit $u\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ le revêtement universel. Alors il est galoisien et $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X, x_0)$

Preuve Pour montrer qu'il est galoisien, on utilise la propriété universelle. $\triangleleft$

Exercice 2. Tout revêtement de degré 2 est galoisien.

Proposition 2.18. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un revêtement connexe. Alors le groupe $\mathrm{Aut}(Y/X)$ agit discrètement et sans point fixe sur X. De plus, le quotient $q\colon X \longrightarrow Z$ est un revêtement et il existe un revêtement $g\colon Z \longrightarrow Y$ tel que $f = g \circ q$. Enfin, le revêtement f est galoisien si et seulement si l'application g est un isomorphisme.

Proposition 2.19. Il existe une correspondance entre les revêtements connexes $f\colon X \longrightarrow Y$ d'un espace fixé Y et les sous-groupes $G \subset \mathrm{Aut}(\tilde{Y}/Y)$. De plus, le revêtement f est galoisien si et seulement si le sous-groupe G est normal.

Proposition 2.20. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un revêtement entre deux surfaces connexes. On suppose que X est une surface de Riemann. Alors il existe une unique structure de surface de Riemann sur X faisait de f une application holomorphe.

Preuve On choisit les cartes $\varphi_i \circ f$ où les applications $\varphi_i\colon U_i \longrightarrow \mathbf{C}$ sont les cartes sur Y. $\triangleleft$

Théorème 2.21 *(d'uniformisation, Poincaré-Koebe, 1907).* Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann $\hat{\mathbf{C}}$, le plan complexe $\mathbf{C}$ ou le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H} \coloneqq \{\mathrm{Im} > 0\}$.

Remarque. Une surface de Riemann admet, en tant que variété topologique, un revêtement universel. Par la proposition précédente, ce dernier munit la surface X d'une structure de revêtement holomorphe $\tilde{X} \longrightarrow X$ et alors $\tilde{X}$ est biholomorphe $\hat{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$. Autrement dit, l'espace X est le quotient par l'action d'un groupe d'automorphismes de $\hat{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$ qui est discrète et sans point fixe. Ce groupe est celui des transformations de revêtement qui se trouvent être holomorphes.

Comme tout élément de $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}}) = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ admet un point fixe, la seule surface de Riemann dont le revêtement universel est $\hat{\mathbf{C}}$ est $\hat{\mathbf{C}}$.

Proposition 2.22. $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}) = \mathrm{Aff}(\mathbf{C}) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}}) \mid \varphi(\infty) = \infty\}$.

Preuve Tout automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ tend vers l'infini en l'infini. On peut donc la prolonger en $\hat{\varphi}$ sur $\hat{\mathbf{C}}$. Alors ce prolongement est holomorphe. ◁

Ainsi les seules surfaces de Riemann dont le revêtement universel est $\mathbf{C}$ sont $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{C}/\Gamma$. Toutes les autres surfaces de Riemann sont uniformisées par $\mathbf{H}$ et

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{H}) = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \right\} \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}).$$

2.5. Revêtements ramifiés

Proposition 2.23. Soit $f\colon U \subset \mathbf{C} \longrightarrow V \subset \mathbf{C}$ une fonction holomorphe non nulle avec $f(0) = 0$. Alors il existe un voisinage $W \subset \mathbf{C}$ de l'origine et une fonction biholomorphe $\varphi\colon W \longrightarrow U$ tels que

- $\varphi(0) = 0$;
- $f \circ \varphi(z) = z^n$ pour $z \in W$.

Définition 2.24. Une application holomorphe $f\colon X \longrightarrow Y$ entre deux surfaces de Riemann est un *revêtement ramifié* si, pour tout point $y \in Y$, il existe un voisinage $U \subset Y$ du point y tel que

- $f^{-1}(U) = \bigsqcup V_i$;
- il existe des cartes locales $\varphi_i\colon V_i \longrightarrow \mathbf{C}$ et $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ telles que $\varphi \circ f = \varphi_i^{n_i}$.

On appelle *valeur critique* l'image d'un point de multiplicité $n > 1$, sinon une *valeur régulière*.

Les valeurs critiques forment un ensemble discret $\mathrm{Crit}(f) \subset Y$. La restriction $f|_{Y \setminus \mathrm{Crit}(f)}$ est alors un revêtement, dit le *revêtement lisse* de f. On appelle *degré* d'un revêtement ramifié le degré d du revêtement lisse. Alors pour $y \in Y$, la préimage $f^{-1}(\{y\})$ contient exactement d points comptés avec multiplicité.

Proposition 2.25. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann. On suppose qu'elle est propre, c'est-à-dire que toute préimage d'un compact est compacte. Alors l'application f est un revêtement ramifié.

Preuve Pour $y \in Y$, la préimage $f^{-1}(\{y\})$ est discrète et compacte, donc elle est finie. On fixe une carte $\varphi\colon V \longrightarrow \mathbf{C}$ au voisinage de y. Pour chaque i dans la fibre, il existe un biholomorphisme $\varphi_i\colon U_i \longrightarrow \mathbf{C}$ tel que $\varphi \circ f = \varphi_i^n$. Alors $V' = \bigcap_i f(U_i)$ est l'ouvert de trivialisation. ◁

Tout morphisme non constante entre deux surfaces de Riemann compactes a un degré $d = \sharp f^{-1}(\{y\})$ avec multiplicité.

Définition 2.26. Un revêtement $f\colon X \longrightarrow Y$ est *galoisien* si l'action de $\mathrm{Aut}(X/Y)$ est transitive sur les fibres.

Exemple. Le revêtement $z \longmapsto z^n$ est galoisien et son groupe des automorphismes est $\langle z \longmapsto e^{2i\pi/n} z\rangle$.

Notons $\chi(S)$ la caractéristique d'Euler d'une surface compacte S. Si Σ_g est la surface compacte de genre g, alors $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

Proposition 2.27 *(formule de Riemann-Hurwitz).* Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un revêtement ramifié de degré d entre deux surfaces de Riemann compactes. Alors

$$\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_{x \in X} (\mathrm{mult}(f, x) - 1).$$

Corollaire 2.28. Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un revêtement ramifié de degré d entre deux surfaces de Riemann compactes avec $g(X) = 0$. Alors $g(Y) = 0$. Plus généralement, on a $g(X) \geqslant g(Y)$ avec égalité si et seulement si $d = 1$ ou $g = 0$ ou ($g = 1$ et $i_{\mathrm{ram}} = 0$).

Théorème 2.29 *(Hurwitz).* Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g > 1$. Alors

$$\sharp \, \mathrm{Aut}(X) \leqslant 84(g - 1).$$

Chapitre 3

Fibrés vectoriels, fibrés en droite

3.1. Définition des fibrés

Définition 3.1. Un *fibré vectoriel holomorphe* de rang r sur une surface de Riemann X est la donnée d'une variété réelle V de classe $\mathscr{C}^\infty$ de dimension $2r+2$ avec un atlas complexe et d'une application holomorphe $\pi\colon V \longrightarrow X$ tels que, pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de l'espace X, on ait des fonctions holomorphes $\phi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbf{C}^r$ telles que

– $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \phi_i$;
– $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x,y) = (x, M(x)y)$ pour une matrice $M \in \mathrm{GL}_r(\mathscr{O}(U_i \cap U_j))$.

Chaque fibre $\pi^{-1}(x)$ hérite d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel de rang r. C'est un cas particulire de variété complexe de dimension $r+1$.

Exemple. Le fibré trivial est le fibré $V = X \times \mathbf{C}^r$.

Définition 3.2. Un *fibré en droite* est un fibre vectoriel de rang 1.

Définition 3.3. Une *section holomorphe* de V sur un ouvert $U \subset X$ est une application $\sigma\colon U \longrightarrow V$ telle que

– $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$;
– les composées $\phi_i \circ \sigma\colon U_i \longrightarrow U_i \times \mathbf{C}^r$ soient holomorphes.

Définition 3.4. Une application $\psi\colon V \longrightarrow W$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ entre deux fibrés vectoriels sur X est un *morphisme de fibrés vectoriels* si

– $\pi_V = \pi_W \circ \psi$;
– elle envoie toute section de V sur une section de W ;
– les restrictions $\psi\colon \pi_V^{-1}(x) \longrightarrow \pi_W^{-1}(x)$ sont linéaires.

C'est un *isomorphisme* lorsqu'il admet un morphisme inverse. En fait, c'est équivalent à avoir un isomorphisme en restriction à chaque fibre.

Proposition 3.5.
1. La restriction $V|_U \coloneqq \pi^{-1}(U)$ à un ouvert $U \subset X$ est un fibré vectoriel sur X.
2. On peut définir la somme directe et le produit tensoriel de deux fibrés.
3. Les classes d'isomorphismes de fibrés en droite forment un groupe pour le produit tensoriel.

Éclaircissons le dernier point. Une section non nulle σ_V de $V|_{U_i}$ va engendrer chaque fibre en tant qu'espace vectoriel de dimension 1. Ainsi $\sigma_V \otimes \sigma_W$ engendre $V \otimes W|_{U_i}$. Étant donnés les changements de cartes sur V et W

$$(x,y) \in U_i \times \mathbf{C} \longmapsto (x, a_{i,j}(x)y) \quad \text{et} \quad (x,y) \in U_i \times \mathbf{C} \longmapsto (x, n_{i,j}(x)y),$$

le changement de cartes sur $V \otimes W$ sera

$$(x,y) \in U_i \times \mathbf{C} \longmapsto (x, a_{i,j}(x)b_{i,j}(x)y).$$

L'élément neutre est le fibré trivial et l'inverse de V est

$$(x,y) \in U_i \times \mathbf{C} \longmapsto (x, a_{i,j}(x)^{-1}y).$$

Exemple. On prend $X = \hat{\mathbf{C}} = U_1 \cup U_\infty$. On note $z\colon U_0 \longrightarrow \mathbf{C}$ et $z_\infty\colon U_\infty \longrightarrow \mathbf{C}$ les deux cartes. Soit $k \in \mathbf{Z}$ un entier. On définit les applications

$$\phi_0\colon (z,w) \in L_k|_{U_0} \longmapsto (z,w) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} \qquad \text{et} \qquad \phi_\infty\colon (z,w) \in L_k|_{U_\infty} \longmapsto (z_\infty, w_\infty) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$$

qui induisent une variété complexe L_k où les changements de cartes sont

$$\phi_\infty \circ \phi_0^{-1}\colon \left| \begin{array}{l} \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}, \\ \quad (z,w) \longmapsto (1/z, w/z^k) \end{array} \right. .$$

On obtient alors un fibré $\pi\colon L_k \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$.

Lorsque $k = 0$, il est trivial, les sections holomorphes $\sigma\colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ sont des fonctions holomorphes $z \longmapsto w(z)$ et les sections holomorphes globales $\sigma\colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbf{C}$ sont constantes.

Prenons maintenant $k \geqslant 0$. Les sections holomorphes globales sont de la forme $z \longmapsto w = P(z)$ où P est un polynôme de degré au plus k. En effet, la fonction $\sigma|_{U_0}\colon z \longmapsto w = f(z)$ sont holomorphes et entière. Par ailleurs, $\sigma|_{U_\infty}\colon z_\infty \longmapsto 1/z^k f(1/z_\infty) = z_\infty^k f(1/z_\infty)$. On écrit $f(z) = \sum a_n z^n$ de sorte que $z_\infty^k f(1/z_\infty) = \sum a_n/z^{n-k}$. La fonction σ est donc holomorphes si et seulement si $a_n = 0$ pour $n - k \geqslant 0$, c'est-à-dire si f est polynôme de degré $\leqslant k$. L'espace des sections holomorphes de L_k est donc isomorphes à $\mathbf{C}^{k+1}$.

Lorsque $k < 0$, la seule section holomorphe globale est la section nulle.

L'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \longrightarrow \{\text{fibrés en droite sur } \hat{\mathbf{C}}\}, \\ k \longmapsto L_k \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes injectif.

Exercice 3. Déterminer les morphismes $L_{k_1} \longrightarrow L_{k_2}$.

Théorème 3.6 *(Birkhoff).* Tout fibré en droite sur $\hat{\mathbf{C}}$ est isomorphe à L_k pour $k \in \mathbf{Z}$.

Preuve Soit U_i un recouvrement de $\hat{\mathbf{C}}$. On a des applications de recouvrement $U_i \cap U_j \times \mathbf{C}$ donnée par $(z,w) \longmapsto (z, a_{i,j}(z)w)$. On traire le cas avec deux ouverts. Soient D_0 un disque $\{|z| < R\}$ et D_∞ un disque $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$ avec $r < R$. Alors $D_0 \cap D_\infty$ est un anneau. Alors l'application $1/z$ définit une application de D_0 dans D_∞. On obtient un fibré L

$$\left| \begin{array}{l} D_0 \cap D_\infty \times \mathbf{C} \longrightarrow D_0 \cap D_\infty \times \mathbf{C}, \\ \qquad (z,w) \longmapsto (z, f(z)w) \end{array} \right.$$

pour une fonction holomorphe non nulle f sur l'anneau $A \coloneqq D_0 \cap D_\infty$. Alors L est trivial si $1 \circ \phi_0 = \phi_\infty \circ f$. Un isomorphisme de L dans le fibré trivial est la donnée

- d'une fonction $\phi_0\colon (z,w) \longmapsto (z, f_0(z)w)$ pour une fonction holomorphe non nulle f_0 sur D_0 ;
- d'une fonction $\phi_\infty\colon (z,w) \longmapsto (z, f_\infty(z)w)$ pour une fonction holomorphe non nulle f_∞ sur D_0,

c'est-à-dire $f = f_0/f_\infty$. Si l'indice k de f est nulle, alors $g = \log f$ existe et

$$g = g_\infty + g_0 \quad \text{avec} \quad g_\infty = \sum_{n<0} a_n z^n \quad \text{et} \quad g_0 \coloneqq \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

et on pose $f = \exp(g_0)/\exp(-g_\infty)$. Sinon on pose $\tilde{f} \coloneqq f/z^k$ et on trouve aussi $L \simeq L_k$. ◁

3.2. Diviseurs

Définition 3.7. Un *diviseur* d'une surface de Riemann X est une somme formelle

$$D = \sum_{k=1}^{n} n_k[p_k]$$

où $p_k \in X$ et $n_k \in \mathbf{Z}$. L'ensemble des diviseurs est le groupe abélien libre engendré par les points de X.

Le diviseur d'une fonction méromorphe f sur X est $\operatorname{div}(f) \coloneqq \sum n_i[p_i] - \sum m_j[q_j]$ où les p_i sont les zéros de f et n_i leurs multiplicités, ainsi que les q_j sont les pôles de f et m_j leurs multiplicités. Plus généralement, si L est un fibré en droite sur X et $\sigma\colon X \longrightarrow L$ une section méromorphe de L (1), alors on peut définir son diviseur comme la famille $D_i \coloneqq \operatorname{div}(\sigma_i) = \sum n_k[p_k]$. On pose

$$D_i|_{U_i \cap U_j} \coloneqq \sum_{p_k \in U_i \cap U_j} n_k[p_k].$$

Alors

$$D_i|_{U_i \cap U_j} = D_j|_{U_i \cap U_j}.$$

On a $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$ et $\operatorname{div}(1/f) = -\operatorname{div} f$. Alors $\operatorname{div}(\sigma_i) = \operatorname{div}(u_{i,j}) + \operatorname{div}(\sigma_j) = D_j$. Finalement, il existe un diviseur D sur X tel que $D|_{U_i} = D_i = \operatorname{div}(\sigma)$, appelé le diviseur de σ. Alors l'application

$$\operatorname{div}\colon (\mathscr{M}(X), \times) \longrightarrow (\operatorname{Div}(X), +)$$

est un morphisme de groupes.

Si $\sigma\colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow L_k$ est une section holomorphe avec $k \geqslant 0$, alors $\operatorname{div}(\sigma) = \sum n_i[p_i]$ avec $\sum n_i = k$, c'est-à-dire elle est de degré k.

Remarque. Si σ est définie par un polynôme de degré $\ell < k$, alors elle s'annule avec multiplicité $k - \ell$ à l'infini.

Proposition 3.8. Soit D un diviseur de X. Alors il existe un fibré en droite, unique à isomorphisme près, admettant une section méromorphe σ de diviseur D. On le note $L(D)$.

Preuve Soit U_i un recouvrement de X. Localement, on peut trouver f_i sur U_i telle que $\operatorname{div}(f_i) = D|_{U_i}$. Sur $U_i \cap U_j$, on pose $u_{i,j}(z) = f_i(z)/f_j(z)$ qui est de diviseur nul, donc $u_{i,j} \in \mathscr{O}^*(U_i \cap U_j)$. On construit L en recollant les $(z, w) \in U_i \times \mathbf{C} \longmapsto (z, u_{i,j}(z)w) U_j \times \mathbf{C}$. Ces dernières satisfont la condition de cocycle

$$u_{i,k} = u_{i,j} u_{j,k}.$$

Les section σ_i se recollent en une section méromorphe globale qui satisfait $\operatorname{div}(\sigma) = D$.

Pour l'unicité, soient σ et σ' deux sections méromorphes sur deux fibrés $\pi\colon L \longrightarrow X$ et $\pi'\colon L' \longrightarrow X$. Alors on construit un morphisme en définissant

$$\phi_i\colon (z, w) \in U_i \times \mathbf{C} \longmapsto (z, f_i'(z)/f_i(z) \times w$$

qui se recollent en un isomorphisme $\phi\colon L \longrightarrow L'$. ◁

Proposition 3.9. Soient D et D' deux diviseurs sur X. Alors $L(D) \simeq L(D')$ si et seulement si $D - D' = \operatorname{div}(f)$ pour une fonction méromorphe non nulle $f \in \mathscr{M}(X)^{\times}$.

Preuve On note $u_{i,j}(z)$ les fonctions de transition. On suppose $L(D) \simeq L(D')$. Alors il existe un isomorphisme

$$\phi\colon (z_i, w_i) \longmapsto (z_i, \varphi_i(z) w_i)$$

avec $\varphi_i \in \mathscr{O}^*(U_i)$. Or

$$\varphi_i \cdot u_{i,j} = u'_{i,j} \cdot \varphi_j,$$

donc

$$\varphi_i \frac{u_i}{u_j} = \frac{u'_i}{u'_j} \varphi_j.$$

(1). Si les changements de cartes sont $(z, w) \longmapsto (z, u_{i,j}(z)w)$, une section méromorphe est une famille de fonctions méromorphes $\sigma_i\colon U_i \longrightarrow \mathbf{C}$ avec $\sigma_i(z) = u_{i,j}(z)\sigma_j(z)$ sur $U_i \cap U_j$.

Les $\varphi_i \cdot u_i/u_j$ se recollent en une fonction méromorphe globale f sur X. Alors

$$\operatorname{div} f|_{U_i} = \operatorname{div} \varphi_i + \operatorname{div} u_i - \operatorname{div} u_i' = D|_{U_i} - D'|_{U_i},$$

donc $D - D' = \operatorname{div} f$. ◁

Définition 3.10. Le *groupe de Picard* est le groupe des classes d'isomorphismes des fibrés en droites, noté $\operatorname{Pic}(X)$.

Proposition 3.11. On a une suite exacte

$$\mathscr{M}(X)^\times \longrightarrow \operatorname{Div}(X) \xrightarrow{L} \operatorname{Pic}(X)$$

et l'image de l'application div sont les diviseurs principaux, c'est-à-dire le noyau de L, noté $\operatorname{Prin}(X)$.

Théorème 3.12. L'application L est surjective. Autrement dit, tout fibré en droite L admet une section méromorphe non nulle $\sigma \colon X \longrightarrow L$ et donc $L \simeq L(D)$ avec $D := \operatorname{div} \sigma$.

Corollaire 3.13. On a $\operatorname{Pic}(X) \simeq \operatorname{Div}(X)/\operatorname{Prin}(X)$.

Proposition 3.14. Sur $\hat{\mathbf{C}}$, un diviseur $D = \sum n_i[p_i]$ est principale si et seulement si $\deg D = 0$.

Preuve La condition est nécessaire car $D = \operatorname{div} f$ avec $f \colon \hat{\mathbf{C}} \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ un revêtement ramifié : il y a autant de pôle que de zéro par compacité.

Réciproquement, soit D un diviseur principal. On sait construire un fraction rationnelle $f = R(z)$ qui le réalise. ◁

Corollaire 3.15. L'application $\deg \colon \operatorname{Pic}(\hat{\mathbf{C}}) \longrightarrow \mathbf{Z}$ est un isomorphisme.

Remarque. En général, l'application $\deg \colon \operatorname{Pic}(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$ est un morphisme de groupes.

Proposition 3.16. Soient X une surface de Riemann compacte et $f \in \mathscr{M}(X)^\times$. Alors $\deg f = 0$.

Définition 3.17. L'ensemble $\operatorname{Jac}(X)$ de classes d'isomorphismes de fibrés en droite de degré 0 est la *jacobienne* de X.

Proposition 3.18. Soit X une surface de Riemann de genre 1. Soient $p, q \in X$ deux points distincts. Alors $L([p]) \not\simeq L([q])$.

Preuve Sinon $L([p] - [q])$ est isomorphe au fibré trivial, donc il admet une section méromorphe σ tel que $\operatorname{div} \sigma = [p] - [q]$. Alors $\sigma \colon X \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ est un revêtement ramifié tel que $\sigma^{-1}(0) = [p]$, donc c'est un revêtement de degré 1, donc c'est un isomorphisme, donc la surface X est de genre 0 ce qui est impossible. ◁

En fait, pour $g = 1$, on a $\operatorname{Jac}(X) \simeq X$. Plus généralement, la jacobienne de X est un tore complexe de dimension g et

$$\operatorname{Pic}(X) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \operatorname{Jac}(X) \otimes L(n[p_0]).$$

3.3. Champs de vecteurs holomorphes

Un champs de vecteurs holomorphes est une fonction dont les coordonnées s'écrivent localement sous la forme $v_i = f_i(z_i)\partial_{z_i}$. Le fibré tangent TX est le fibré dont les sections sont des champs de vecteurs. On choisit $\varphi_i \colon U_i \longrightarrow \mathbf{C}$ et des champs de vecteurs holomorphes non nuls $v_i = f_i(z_i)\partial_{z_i}$. Si $v_i' = g_i(z_i)\partial_{z_i}$ est un champ de vecteur holomorphe sur U_i, alors

$$v_i' = \frac{g_i}{f_i} \cdot v_i.$$

Exemple. Sur $\hat{\mathbf{C}}$, l'opérateur ∂_z correspond à $-z_\infty^2 \partial_{z_\infty}$. Le premier champ de vecteur est non nul sur $\mathbf{C}$ et le second a un zéro double en l'infini. Ainsi le fibré tangent $T\hat{\mathbf{C}}$ est isomorphe à $L(-2[\infty])$.

Exemple. Le fibré en droite $\Omega^1_X = T^*X$ des 1-formes holomorphes $f_i(z_i)\,\mathrm{d}z_i$ est le dual de TX, c'est-à-dire qu'ils sont inverses l'un de l'autre pour la loi $\otimes$.

Exemple. Soit P un polynôme de degré $2g+2$ dont les racines sont simples. Considérons la courbe

$$C \coloneqq \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \mid w^2 = P(z)\}.$$

Sa compactification $X = C \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ est de genre g. En dérivant l'équation $w^2 = P(z)$, on obtient

$$2w\,\mathrm{d}w = P'(z)\,\mathrm{d}z,$$

donc l'expression

$$\frac{\mathrm{d}w}{P'(z)} = \frac{\mathrm{d}z}{2w}$$

définit une 1-forme holomorphe non nulle ω sur C. En effet, les quantités w et $P'(z)$ ne peut s'annuler en même temps sur C et donc l'une des deux est holomorphes. L'expression $z_\infty = 1/z$ définit une coordonnée locale au voisinage des infinis ∞_1 et ∞_2. On a

$$\begin{aligned} w^2 &= \sum_{i=0}^{2g+1} a_i z^i \\ &= \frac{1}{z_\infty^{2g+2}}[a_{2g+2} + \cdots + a_1 z_\infty^{2g+1} + a_0 z_\infty^{2g+2}] \end{aligned}$$

où l'expression entre crochet est localement holomorphe et non nulle en les infinis ∞_1 et ∞_2, donc on a deux fonctions u_1 et u_2 telles que

$$w = \frac{1}{z_\infty^{g+1}} u_i(z_\infty).$$

Alors

$$\omega = \frac{\mathrm{d}z}{2w} = -\frac{\mathrm{d}z_\infty}{z_\infty^2} / 2\frac{u_i(z_\infty)}{z_\infty^{g+1}} = -z_\infty^{g-1}\frac{\mathrm{d}z_\infty}{u_i(z_\infty)},$$

donc

$$\operatorname{div}\omega = (g-1)[\infty_1] + (g-1)[\infty_2].$$

Exercice 4.
- Si $\deg L < 0$, alors il n'existe pas de section holomorphe globale non nulle.
- Si $\deg L = 0$, alors il existe une section holomorphe globale non nulle si et seulement si $L = 0$.

Chapitre 4
Faisceaux et cohomologie

4.1. Faisceaux

Définition 4.1. Un *préfaisceau d'ensembles* sur un espace topologique X est la donnée
- d'un ensemble $F(U)$ pour chaque ouvert $U \subset X$;
- d'une application $\rho_V^U \colon F(U) \longrightarrow F(V)$ lorsque $V \subset U$

telle que, pour toute inclusion $W \subset V \subset U \subset X$, on ait
$$\rho_U^U = \mathrm{Id}_{F(U)} \qquad \text{et} \qquad \rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U.$$
Pour un élément $f \in F(U)$ et un ouvert $V \subset U \subset X$, on note $f|_V \coloneqq \rho_V^U(f)$.

Définition 4.2. Un *faisceau d'ensembles* sur X est un préfaisceau F sur X tel que, pour tout ouvert U et tout recouvrement $U = \bigsqcup_i U_i$, on ait les points suivants :
- si $f, g \in F(U)$ vérifient $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ pour tout i, alors $f = g$;
- si $f_i \in F(U_i)$ vérifient $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tous i et j, alors il existe un élément $f \in F(U)$ tel que $f|_{U_i} = f_i$ pour tout i.

Les éléments de l'ensemble $F(U)$ sont appelés les *section* du faisceau F sur l'ouvert U.

Exemples. – La famille $\mathscr{O}_X$ définie par $\mathscr{O}_X(U) \coloneqq \mathscr{O}(U)$ est un faisceau.
- De même, les fonctions méromorphes définissent un faisceau $\mathscr{M}_X$.
- De même, on a le faisceau $\mathscr{O}_X^*$ des fonctions holomorphes ne s'annulant pas et $\mathscr{M}_X^*$ des fonctions méromorphes non nulles.
- Soit $f \colon Y \longrightarrow X$ un revêtement étale (non ramifié). Alors son faisceau associé est défini par l'égalité
$$F(U) \coloneqq \{\sigma \colon U \longrightarrow f^{-1}(U) \text{ continue} \mid f \circ \sigma = \mathrm{Id}_U\}.$$
- Le *faisceau gratte-ciel* d'un ensemble E avec $p_0 \in X$ est défini par l'égalité
$$F(U) \coloneqq \begin{cases} E & \text{si } p_0 \in U, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$
- Le faisceau gratte-ciel avec $E = \mathbf{C}$ est un faisceau d'espaces vectoriels.

La *tige* d'un faisceau F en un point $p \in X$ est l'union disjointe $\bigcup_{p \in U} F(U)$ quotientée par la relation d'équivalence $\sim$ définie par l'équivalence
$$f \sim g \iff \exists W \subset U \cap V, \qquad f|_W = g|_W$$

pour toutes sections $f \in F(U)$ et $g \in F(V)$. On la note F_p. La projection

$$\rho_p^U : \left| \begin{array}{rcl} F(U) & \longrightarrow & F_p, \\ f & \longmapsto & [f]_p \end{array} \right.$$

est le *germe* au point p.

Exemple. On considère le faisceau $\mathscr{O}_{\mathbf{C}}$. La tige $(\mathscr{O}_{\mathbf{C}})_0$ est l'ensemble des séries convergentes en l'origine.

4.2. Homomorphismes de faisceaux

Définition 4.3. Un *morphisme* entre deux faisceaux F et G sur un même espace topologique X est la donnée de morphismes $\alpha_U : F(U) \longrightarrow G(U)$ pour chaque ouvert $U \subset X$ tels que, pour toute inclusion $V \subset U \subset X$, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & G(U) \arrow[d, "\tilde{\rho}_V^U"] \\ F(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & G(V) \end{tikzcd}$$

On note alors $\alpha : F \longrightarrow G$. C'est un *isomorphisme* si tous les morphismes α_U sont des isomorphismes.

Définition 4.4. Un morphisme $\alpha : F \longrightarrow G$ est un

- *monomorphisme* si le morphisme $\alpha_p : F_p \longrightarrow G_p$ est injectif pour tout point $p \in X$;
- *épimorphisme* si le morphisme $\alpha_p : F_p \longrightarrow G_p$ est surjectif pour tout point $p \in X$.

Proposition 4.5. Soit $\alpha : F \longrightarrow G$ un monomorphisme de faisceaux sur X. Alors pour tout ouvert U, l'application α_U est injective.

Preuve Soient $f, g \in F(U)$ deux sections telles que $\alpha_U(f) = \alpha_U(g)$. Alors $\alpha_x(f_x) = \alpha_x(g_x)$ pour tout $x \in U$, donc $f_x = g_x$ pour tout $x \in U$, donc $f = g$. ◁

La proposition est fausse pour des épimorphismes. En effet, la différentielle nous donne un morphisme de faisceaux $\mathrm{d} : \mathscr{O}_{\mathbf{C}^*} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbf{C}^*}$. Pour tout disque $U \subset \mathbf{C}^*$, une 1-forme ω peut s'écrire sous la forme $\omega = \mathrm{d}f$ avec $f := \int_{z_0}^z f$. Par contre, l'application $d(\mathbf{C}^*)$ n'est pas surjective car la forme $\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ n'est pas dans son image.

Proposition 4.6. Soit $\alpha : F \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux. S'il est un monomorphisme et un épimorphisme, alors c'est un isomorphisme, c'est-à-dire que chaque application α_U avec un ouvert U est un isomorphisme.

Preuve Soit $g \in G(U)$. Pour tout point $x \in U$, il existe un unique $f_x \in F_x$ tel que $g_x = \alpha_x(f_x)$. Sur U_i un voisinage de x, on a alors $g|_{U_i} = \alpha_{U_i}(f_i)$ avec $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$. Alors

$$\alpha_{U_i \cap U_j}(f_i|_{U_i \cap U_j}) = g|_{U_i \cap U_j} = \alpha_{U_i \cap U_j}(f_j|_{U_i \cap U_j}).$$

Comme α est un monomorphisme, on en déduit que $f_i = f_j$ sur $U_i \cap U_j$. Par la propriété de recollement, il existe une section $f \in F(U_i)$ telle que

$$\forall i, \qquad f|_{U_i} = f_i.$$

Alors $\alpha(f) = g$ sur chaque ouvert U_i dans G, donc $\alpha(f) = g$ dans $G(U)$. ◁

Exercice 5. Soit $\alpha : F \longrightarrow G$ un faisceau de groupes. Montrer que l'expression $F(U) := \operatorname{Ker} \alpha_U$ définit un faisceau de groupes. Montrer que l'expression $H(U) := \operatorname{Hom}(F(U), G(U))$ définit encore un faisceau de groupes.

Remarque. Attention, l'image n'est pas toujours un faisceau. En effet, considérons le morphisme de faisceaux $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbf{C}}^*$ définie par l'égalité

$$\alpha(U)\colon \left| \begin{aligned} \mathscr{O}(U) &\longrightarrow \mathscr{O}^*(U), \\ f &\longmapsto \exp(2i\pi f). \end{aligned} \right.$$

Alors son image n'est pas un faisceau. Prenons

$$U \coloneqq \mathbf{C}^*, \qquad U_1 \coloneqq \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+ \qquad \text{et} \qquad U_2 \coloneqq \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-.$$

Alors les fonctions $z \longmapsto z$ coïncident sur $\mathscr{O}^*(U_1)$ et $\mathscr{O}^*(U_2)$, mais la fonction $z \longmapsto z$ n'est pas l'exponentielle d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.

4.3. Préfaisceaux, suites exactes

Proposition 4.7. Soit F un préfaisceau. Alors il existe un faisceau F^+ et un morphisme de préfaisceaux $\theta\colon F^+ \longrightarrow F$ tels que, pour tout morphisme de préfaisceaux $\alpha\colon F \longrightarrow G$, il existe un unique morphisme de préfaisceau $\alpha^+\colon G \longrightarrow F^+$ tel que $\theta = \alpha^+ \circ \alpha$.

Exercice 6. Soit X un surface de Riemann et D un diviseur sur X. Soit $\mathscr{O}(\mathscr{D})$ le sous-faisceau de $\mathscr{M}_X$ défini par l'égalité

$$\mathscr{O}(D)(U) \coloneqq \{f \in \mathscr{M}_X(U) \mid \operatorname{div} f + D \geqslant 0\}$$

où $\sum n_i[p_i] \geqslant 0 \Leftrightarrow \forall i, n_i \geqslant 0$. Montrer que le faisceau $\mathscr{O}(D)$ est isomorphisme au faisceau des sections holomorphes de $L(D)$.

Définition 4.8. Le *support* d'un diviseur $D = \sum n_i[p_i]$ est l'ensemble $|D| \coloneqq \{p_i \mid n_i \neq 0\}$.

Définition 4.9. Une suite de morphismes de faisceaux de groupes

$$\cdots \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow \dots$$

est *exacte* en G si

$$\forall x \in X, \qquad \operatorname{Im} \alpha_x = \operatorname{Ker} \beta_x.$$

Une *suite exacte courte* est une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$$

et vérifiant

$$\forall x \in X, \qquad \operatorname{Ker} \alpha_x = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} \beta_x = H_x.$$

Exemple. La suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow 0$$

est exacte.

4.4. Cohomologie de Čech

Soit F un faisceau de groupes abéliens. Fixons $\mathscr{U} \coloneqq \{U_i\}_{i \in I}$ une recouvrement de X. On définit les groupes abéliens

$$\mathscr{C}^k(\mathscr{U}, F) \coloneqq \prod_{(i_0,\dots,i_k) \in I^{k+1}} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$$

et des *opérateurs de bord*

$$\delta\colon \left| \begin{aligned} \mathscr{C}^k(\mathscr{U}, F) &\longrightarrow \mathscr{C}^{k+1}(\mathscr{U}, F), \\ (f_{i_0,\dots,i_k})_{(i_0,\dots,i_k)\in I^{k+1}} &\longmapsto \Big(\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j f_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{k+1}}\Big)_{(i_0,\dots,i_{k+1})\in I^{k+2}} \end{aligned} \right..$$

Ce sont des morphismes de groupes et on a

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Les *cobords* sont les images

$$B^k(\mathscr{U}, F) \coloneqq \operatorname{Im}(\mathscr{C}^{k-1}(\mathscr{U}, F) \longrightarrow \mathscr{C}^k(\mathscr{U}, F))$$

et les *cocycles* les noyaux

$$Z^k(\mathscr{U}, F) \coloneqq \operatorname{Ker}(\mathscr{C}^k(\mathscr{U}, F) \longrightarrow \mathscr{C}^{k+1}(\mathscr{U}, F))$$

qui vérifiant $B^k \subset Z^k \subset \mathscr{C}^k$.

Définition 4.10. Le *k-ième groupe de cohomologie* du faisceau F est le quotient

$$H^k(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \coloneqq Z^k(\mathscr{U}, \mathscr{F})/B^k(\mathscr{U}, \mathscr{F})$$

où on pose $B^0 \coloneqq 0$ et $Z^0 \coloneqq \{(f_i) \mid f_i = f_j\}$ puis $H^0 = F(X)$.

Exemple. On a

$$Z^1 = \{(f_{i,j}) \mid \forall i, j, k,\ f_{j,k} - f_{i,k} + f_{i,j} = 0\}$$

et

$$B^1 = \{(f_i - f_j) \mid f_i \in F(U_i)\}.$$

Alors dans H^1, on a $(f_{i,j}) \sim (g_{i,j})$ si et seulement s'il existe $h_i, h_j \in \mathscr{C}^0$ tels que

$$f_{i,j} - g_{i,j} = h_i - h_j, \qquad \forall i, j.$$

Remarque. Sur $\hat{\mathbf{C}} = U_0 \cap U_\infty$, un fibré en droite est donnée par l'application

$$(z, w) \in U_0 \cap U_\infty \times \mathbf{C} \longmapsto \varphi(z, w) = (z, a_{0\infty}(z)w) \in U_0 \cap U_\infty \times \mathbf{C}$$

pour $a_{0\infty} \in \mathscr{O}^*(U_0 \cap U_\infty)$ formant un cocycle $(a_{0\infty})$. Alors $a_{00} = 1$ sur U_0, $a_{\infty\infty} = 1$ sur U_∞ et $a_{0\infty} = -a_{\infty 0}$. Ainsi $(a_{0\infty})$ est un cobord si et seulement si le fibré en droites est trivial. Par Birkhoff, on a

$$H^1(U, \mathscr{O}^*_{\hat{\mathbf{C}}}) \simeq \mathbf{Z}.$$

Définition 4.11. $V = (V_j)$ est un raffinement de $U = (U_i)$ si $\forall j, \exists \tau(j) = i, V_j \subset U_i$. On note alors $V < U$ et on considère l'application $\tau \colon J \longrightarrow I$.

Exemple. L'intersection de deux recouvrements U et V est un recouvrement plus fin que U et V.

Si $V < U$, on a une application de restriction

$$\left| \begin{array}{l} \mathscr{C}^k(U, F) \longrightarrow \mathscr{C}^k(V, F), \\ (f_{i_0,\dots,i_k}) \longmapsto (f_{\tau(j_0),\dots,\tau(j_k)}) \end{array} \right.$$

qui induit une application $Z^k(U, F) \longrightarrow Z^k(V, F)$ et une application $\rho_V^U \colon H^k(U, F) \longrightarrow H^k(V, F)$.

Définition 4.12. On définit

$$H^k(U, F) \coloneqq \varinjlim_U H^k(U, F).$$

C'est l'ensemble $\bigsqcup_U H^k(U, F)$ quotienté par le relation d'équivalence

$$H^k(U, F) \ni (f_i) \sim (g_i) \in H^k(V, F) \iff \exists W < U, V, \qquad \rho_W^U(f_i) = \rho_W^V(g_j).$$

On a un morphisme

$$\rho_X^U \colon H^k(U, F) \longrightarrow H^k(X, F).$$

Théorème 4.13 *(Leray).* Si U est tel que

$$\forall i_1, \dots, i_k, \qquad H^k(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}, F) = 0,$$

alors

$$H^k(U, F) = H^k(X, F).$$

Exemple. Le groupe de Picard $\operatorname{Pic}(X)$ s'identifie à $H^1(X, \mathscr{O}^*)$.

Lemme 4.14. Soit G un groupe. On note $\mathscr{G}$ le faisceau constant égal à G. Alors

$$H^1(X, \mathscr{G}) \simeq \operatorname{Hom}(\pi_1(X), G).$$

Pour un morphisme $\alpha\colon F \longrightarrow G$, on définit

$$\alpha^k\colon \left| \begin{aligned} &H^k(X,F) \longrightarrow H^k(X,G),\\ &(f_{i_0,\dots,i_k})_i \longmapsto (\alpha(U_{i_0,\dots,i_k})(f_{i_0,\dots,i_k}))_i. \end{aligned}\right.$$

Théorème 4.15. Soit $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H$ une suite exacte de faisceaux. Alors la suite longue

$$0 \longrightarrow H^0(F,X) \longrightarrow H^0(G,X) \longrightarrow H^0(H,X) \longrightarrow H^1(F,X) \longrightarrow \cdots$$

est exacte.

Exemples. Le groupe $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$ est isomorphe au groupe des fibrés en droite. Le groupe $H^1(X, \mathscr{M}^*)$ est trivial. Cela implique que $\operatorname{Pic}(X) \simeq \operatorname{Div}(X)/\operatorname{Div}(H^0(X,\mathscr{M}^*))$.

Lemme 4.16. $H^1(X,\Omega^1) \simeq \mathbf{C}$.

Preuve Soit $(\omega_{i,j}) \in H^1(X,\Omega^1)$. Alors $\omega_{i,j}$ est une 1-forme sur $U_{i,j}$. Alors $\omega_{i,j} = \omega_i - \omega_j$ sur $U_{i,j}$ pour une famille de 1-formes méromorphes ω_i. Alors

$$\operatorname{Res}(\omega_i|_{U_i\cap U_j}) = \text{somme des résidus de } \omega_i \text{ sur } U_i \cap U_j = \operatorname{Res}(\omega_j|_{U_i\cap U_j}).$$

On peut alors définir $\operatorname{Res}_X(\omega_i)_{i\in I}$ comme la somme des résidus de ω_i sur X. On obtient alors un morphisme de groupes $\operatorname{Res}_X\colon H^1(X,\Omega^1) \longrightarrow \mathbf{C}$. Montrons que c'est un isomorphisme.

Montrons sa surjectivité. Soit U_0 un des ouverts U_i. Soit $z\colon U_0 \longrightarrow \mathbf{C}$ le changement de coordonnées en $z_0 \in U_0$. On suppose $z_0 \notin U_i$ pour $i \neq 0$. On pose $\omega_0 = \mathrm{d}z/z$ sur U_0 et $\omega_i = 0$ sur U_i avec $i \neq 0$. Alors $\omega_{i,j} \coloneqq \omega_i - \omega_j$ est holomorphe $\in H^1(X,\Omega^1)$ et $\operatorname{Res}_X(\omega_i) = \operatorname{Res}_{z_0}(\omega_0) = 1$ ce qui montre la surjectivité.

Pour l'injectivité, soit (ω_i) telle que $\operatorname{Res}_X(\omega_i) = 0$. D'après Mittag-Leffler, il existe une 1-forme méromorphe globale ω telle que $-\tilde{\omega}_i \coloneqq \omega|_{U_i} - \omega_i$ soit holomorphe. Alors

$$\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_j = \omega_i - \omega_j = \omega_{i,j},$$

donc $(\omega_{i,j}) \sim 0$ dans $H^1(X,\Omega^1)$. ◁

Théorème 4.17 *(dualité de Serre).* Soient X une surface de Riemann compacte et L un fibré en droites. Alors l'application

$$H^0(X,\Omega^1 \otimes L^{-1}) \times H^1(X,L) \longrightarrow H^1(X,\Omega^1) \simeq \mathbf{C}$$

est bilinéaire qui induit une dualité entre les espaces vectoriels H^0 et H^1. De plus, l'application

$$\left| \begin{aligned} &H^0(X,\Omega^1 \otimes L^{-1}) \longrightarrow H^1(X,L)^\vee,\\ &\qquad\qquad \omega \longmapsto [(f_{i,j}) \longmapsto (f_{i,j}\omega)]. \end{aligned}\right.$$

Conséquence. Pour tout fibré en droites L, on a

$$\dim H^1(X,L) = \dim H^0(X,\Omega^1 \otimes L^{-1}).$$

Remarque. Si $\deg(\Omega^1 \otimes L^{-1}) < 0$, alors $\dim H^1(X,L) = 0$. De plus, on a

$$\dim H^0(X,L) \leqslant \deg L + 1.$$

Conséquences. Les espaces H^0 et H^1 sont de dimensions finies.

Notation. On note g_{a} le *genre arithmétique*, c'est-à-dire la dimension de l'espace $H^0(X,\Omega^1)$.

Remarque. Soit X compacte. En considérant un revêtement ramifié $f\colon X \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$, on obtient une 1-forme méromorphe $\omega \coloneqq f^*\,\mathrm{d}z$ sur X, par une étude locale aux points de ramifications et au-dessus de $\infty \in \hat{\mathbf{C}}$, on peut en déduit

$$\deg(\operatorname{div}(\omega)) = 2g - 2 = \deg \Omega^1.$$

Théorème 4.18 *(Riemann-Roch).* Soient X compacte et L un fibré en droite. Alors

$$\dim H^0(X,L) - \dim H^1(X,L) = \deg L + 1 - g_{\mathrm{a}}.$$

Preuve Si $L = 0$, alors $\dim H^0(X,0) = 0$, $\dim H^0(X,\Omega^1) = g_{\mathrm{a}}$ et $\deg 0 = 0$, donc la formule est vraie.

La formule est vraie pour $L = \mathscr{O}(D)$ si et seulement si elle est vraie pour $L_p = \mathscr{O}(D+[p])$ avec $p \in X$. On a une suite exacte

$$0 \xrightarrow{\alpha} L \longrightarrow L_p \longrightarrow \mathbf{C}_p \longrightarrow 0$$

où $\mathbf{C}_p$ est le faisceau gratte-ciel. En effet, l'image de α est les sections de L_p qui s'annulent en p. Le morphisme α envoie isomorphiquement les fibres de L sur celle de L_p sauf $\alpha|_p \colon L|_p \longrightarrow 0$, donc le quotient $L_p/\operatorname{Im}\alpha$ est nul partout sauf en 0 où il s'identifie à la fibre de L_p, donc $L_p/\operatorname{Im}\alpha \simeq \mathbf{C}_p$. D'où l'exactitude. On obtient alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X,L) \longrightarrow H^0(X,L_p) \longrightarrow H^0(X,\mathbf{C}_p) = \mathbf{C} \longrightarrow H^1(X,L) \longrightarrow H^1(X,L_p) \longrightarrow H^1(X,\mathbf{C}_p) = 0 \longrightarrow \cdots$$

Comme elle est exacte, entre deux termes nuls, la somme alternée des dimensions est nulle. ◁

Proposition 4.19. $\deg \Omega^1 = 2g_{\mathrm{a}} - 2$, donc $g_{\mathrm{a}} = g_{\mathrm{top}}$.

Preuve D'après Riemann-Roch, on a

$$g_{\mathrm{a}} - 1 = \dim \Omega^1 + 1 - g_{\mathrm{a}}.$$ ◁

Proposition 4.20. Si $g(X) = 0$, alors $X \simeq \hat{\mathbf{C}}$.

Preuve Si $L = \mathscr{O}([p])$ avec $p \in X$, alors

$$\dim H^0(X,L) - \underbrace{\dim H^0(X,\Omega^1 \otimes L^{-1})}_{0} = 1+1,$$

donc $\dim H^0(X,L) = 2$. Or

$$H^0(X,L) \simeq \{f \in \mathscr{M}(X) \mid \operatorname{div} f + [p] \geqslant 0]\} = \{f \text{ méromorphe avec au plus un pôle simple en } p\}.$$

Or la fonction 1 appartient à ce dernier ensemble. On peut donc écrire $H^0(X,L) = \operatorname{Vect}(1,f)$ pour une fonction f admet un pôle simple en p. Alors $f \colon X \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ est un revêtement ramifié de degré 1. ◁

Proposition 4.21. Il existe sur X compacte de genre g une fonction méromorphe non constante avec au plus $g+1$ pôles.

Preuve Même démonstration avec $L = \mathscr{O}([p_1] + \cdots + [p_{g+1}])$. ◁

Soit X de genre 1. Alors la dualité de Serre donne

$$h^0(0) - h^0(\Omega^1) = \deg 0 + 1 - g,$$
$$h^0(\Omega^1) - h^0(0) = \deg \Omega^1 + 1 - g.$$

Donc Ω^1 est de degré 0 et admet une section, donc il existe une 1-forme holomorphe non nulle ω sur W. En l'intégrant, on construit le revêtement universelle $\mathbf{C} \longrightarrow X$. On a

$$h^0(\mathscr{O}(n[p])) - h^*(\mathscr{O}(-n[p])) = n + 1 - g.$$

- Pour $n = 1$, on a $h^0(\mathscr{O}([p])) = 1$ et $H^0(X,\mathscr{O}([p])) = \operatorname{Vect}(1)$.
- Pour $n = 2$, il existe $f \in \mathscr{O}(2[p]) \setminus \mathscr{O}([p])$, c'est-à-dire une fonction avec un pôle double en p. Alors $f \colon X \longrightarrow \hat{\mathbf{C}}$ est un revêtement ramifié.
- Pour $n = 3$, on écrit $H^0(\mathscr{O}(3[p])) = \operatorname{Vect}(1,f,g)$ avec g qui admet un pôle triple. On obtient un plongement

$$(f,g) \colon X \longrightarrow \mathbf{C}^2 \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$$

dont l'image est un couple $P(X,Y) = 0$ de degré 3 en X et 2 en Y

Réciproquement, le revêtement

$$\left| \begin{aligned} \{P(x,y)=0\} &\longrightarrow \hat{\mathbf{C}}, \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned} \right.$$

est de genre 2.

Théorème 4.22. Soit X compacte. Si $\deg D \geqslant 2g+2$ et $H^0(X, \mathscr{O}(D)) = \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_N)$, alors l'application

$$\left| \begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbf{P}H^0(X, \mathscr{O}(D))^\vee, \\ x &\longmapsto \{f \in H^0(X, \mathscr{O}(D)) \mid f(x) = 0\} \end{aligned} \right.$$

est un plongement holomorphe d'image algébrique.