

Introduction aux théories de l'homotopie

Sinan YALIN

Master 2 de mathématiques fondamentales · Université de Nantes
Notes prises par Téofil ADAMSKI (version du 5 avril 2023)



Sommaire

1	Bases de la théorie des catégories	
1.1	Notion de catégories, premiers exemples	1
1.2	Foncteurs et transformations naturelles	2
1.3	Limites et colimites	5
1.4	Adjonctions	6
2	Théorie des l'homotopie dans les espaces topologiques	
2.1	Équivalence d'homotopie	9
2.2	Groupes d'homotopie et équivalences faibles	10
2.3	Fibrations	11
3	Catégories de modèles	
3.1	Définitions	15
3.2	Propriétés générales des catégories de modèles	16
3.3	Exemples	17
3.4	Localisation de catégorie homotopique	18
3.5	Homotopies	18
3.6	Le théorème de Whitehead et ses conséquences	22
4	Engendrement cofibrant et complexes de chaînes	
4.1	Résultats préliminaires	27
4.2	Argument du petit objet	28
4.3	Engendrement cofibrant	29
4.4	Complexes de chaînes	31

Chapitre 1

Bases de la théorie des catégories

1.1	Notion de catégories, premiers exemples	1
1.2	Foncteurs et transformations naturelles	2
1.3	Limites et colimites	5
1.4	Adjonctions	6

1.1. Notion de catégories, premiers exemples

Définition 1.1. Une *catégorie*, notée \mathcal{C} , est la donnée

- d’une classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ d’objets ;
- pour chaque objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d’un ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de *morphismes*
- pour chaque objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d’un morphisme $\text{id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$;
- pour chaque objet $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$, d’une application

$$\circ : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

vérifiant les points suivants :

- $f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f = f$ pour tous objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ pour tous morphismes f, g et h composables.

Une catégorie \mathcal{C} étant fixée, on écrira $f : X \longrightarrow Y$ lorsque $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. De plus, lorsqu’une seule catégorie entre en jeu, on ne la précisera pas nécessairement : par exemple, un morphisme fera référence à un morphisme de cette catégorie fixée.

Définition 1.2. Soit \mathcal{C} une catégorie. Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est un *isomorphisme* s’il existe un morphisme $g : Y \longrightarrow X$ tel que $g \circ f = \text{id}_X$ et $f \circ g = \text{id}_Y$.

Lorsque le morphisme f est un isomorphisme, un morphisme g tel que $g \circ f = \text{id}_X$ et $f \circ g = \text{id}_Y$ est unique et on le notera f^{-1} .

Définition 1.3. Une *sous-catégorie* d’une catégorie \mathcal{C} est une catégorie \mathcal{D} telle que $\text{ob}(\mathcal{D}) \subset \text{ob}(\mathcal{C})$ et, pour tous objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{D})$, on ait $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ de sorte que ces sous-ensembles soit stable pour la composition. Elle est *pleine* si

$$\forall X, Y \in \text{ob}(\mathcal{D}), \quad \text{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Remarque. – La classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ n’est pas nécessairement un ensemble. Mais lorsqu’il s’agit d’un ensemble, on dit que la catégorie \mathcal{C} est *petite*.

- Dans ce cours, on a suppose que les classes de morphismes sont des ensembles : on dit que la catégorie est *localement petite*.

Définition 1.4. Soit \mathcal{C} une catégorie. Un objet $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ est

- *initial* si, pour tout objet $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$, l’ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un singleton ;
- *final* si, pour tout objet $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$, l’ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ est un singleton ;

- nul s'il est initial et final.

Exemples. – Les ensembles munis des applications ensemblistes entre eux et de la composition usuelle forment une catégorie notée **Ens**.

- Les espaces topologiques munis des applications continues forment la catégorie **Top**. Dans cette dernière, les isomorphismes sont exactement les homéomorphismes. De plus, l'espace topologique \emptyset est initial et l'espace topologique $\{\bullet\}$ réduit à un point est final.
- Les espaces topologiques pointés forment la catégorie **Top_{*}**. Dans cette dernière, le singleton $\{\bullet\}$ est maintenant un objet nul.
- Les variétés lisses munies des applications lisses forment la catégorie **Man**.
- Soient k un corps et R un anneau. Les k -espaces vectoriels munis des applications k -linéaires forment la catégorie **Vect_k**. De même, on peut considérer la catégorie **Mod_R** des R -modules.

Exemples (de petites catégories). – On peut considérer une catégorie formée de deux objets et d'une unique flèche entre ces deux objets. Elle est petite.

- Les ensembles ordonnés peuvent être vu comme des catégories. Plus précisément, soit (E, \leq) une catégorie. On peut lui associer la catégorie dont les objets sont les éléments de E et, pour tous objets $x, y \in E$, il existe une unique flèche $x \rightarrow y$ si $x \leq y$.

Remarque. À une catégorie \mathcal{C} , on peut lui associer sa *catégorie opposée* qui a les mêmes objets mais dont on a renversé le sens des flèches. Il s'agit de la catégorie \mathcal{C}^{op} vérifiant

$$\text{ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{ob}(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

pour tous objets $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$.

Notation. Au lieu de noter $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, on notera simplement $X \in \mathcal{C}$. Il n'y a aucune ambiguïté à adopter cette notation car l'objet \mathcal{C} n'est pas un ensemble.

1.2. Foncteurs et transformations naturelles

Définition 1.5. Un *foncteur (covariant)* entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est la donnée

- pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, d'un objet $F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$;
- pour tous objets $X, Y \in \mathcal{C}$, d'une application

$$F(\cdot): \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

vérifiant les points suivants :

- pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, on a $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$;
- pour tous morphismes $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

On note $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Un *foncteur contravariant* entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} est un foncteur $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ ou, de manière équivalente, un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$.

Remarques. – Un foncteur envoie les isomorphismes sur les isomorphismes.

- On peut composer deux foncteurs : le neutre pour la composition est le foncteur $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ qui envoie tout objet sur lui-même et tout morphisme sur lui-même. L'ensemble $\text{End}(\mathcal{C})$ des endomorphismes $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est alors un monoïde associatif.

Exemples. – Associer un k -espace vectoriel à son dual et une application linéaire à sa transposée définit un foncteur covariant $-*: \mathbf{Vect}_k \rightarrow (\mathbf{Vect}_k)^{\text{op}}$ ou, de manière équivalente, un foncteur contravariant $-*: \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k$.

- Le foncteur **Top** \rightarrow **Ens** qui à un espace topologique associe son ensemble sous-jacent est appelé un *foncteur d'oubli*. On peut aussi définir le foncteur d'oubli **Ab** \rightarrow **Grp** entre la catégorie des groupes abéliens et celle des groupes et le foncteur d'oubli **Alg_R** \rightarrow **Mod_R** entre la catégorie des R -algèbres et celle des R -modules.

- Les groupes fondamentaux donnent un foncteur $\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$.
- L'homologie fournit des foncteurs $H_n: \mathbf{Ch}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ avec $n \geq 0$ de la catégorie des complexes de R -modules dans celle des R -modules.
- Soit \mathcal{C} une catégorie. Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est *représentable* s'il existe un objet X de \mathcal{C} tel que $F = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -)$ où le foncteur $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ associe à un objet Y l'ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et à un morphisme $f: Y \rightarrow Y'$ l'application $f \circ -$. Notons $\text{Fonc}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$ l'ensemble des foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$. Le *plongement de Yoneda* est l'application

$$h: \begin{cases} \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fonc}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens}), \\ X \mapsto h_X := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -). \end{cases}$$

Définition 1.6. Une *transformation naturelle* entre deux foncteurs $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée d'un morphisme $\tau_X: F(X) \rightarrow G(X)$ pour tout objet X de \mathcal{C} vérifiant la propriété suivante : pour tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\tau_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & G(Y) \end{array}$$

commute. On note $\tau: F \rightarrow G$. Il s'agit d'un *isomorphisme naturel* si chaque morphisme τ_X avec $X \in \mathcal{C}$ est un isomorphisme. On notera $F \cong G$.

Notation. Pour deux foncteurs $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, on note $\text{Nat}(F, G)$ l'ensemble des transformations naturelles entre les foncteurs F et G .

La notion de transformation naturelle permet de munir l'ensemble $\text{Fonc}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$ d'une structure de catégorie. L'application h est ainsi un foncteur.

Définition 1.7. Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une *équivalence de catégories* s'il existe un foncteur $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $G \circ f \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ et $F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$.

On va donner une définition équivalente à la notion d'équivalences de catégories.

Définition 1.8. Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est

- *fidèle* si, pour tous objets X et Y de \mathcal{C} , l'application $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ est injective ;
- *plein* si, pour tous objets X et Y de \mathcal{C} , elle est surjective ;
- *essentiellement surjectif* si, pour tout objet Y de \mathcal{D} , il existe un objet X de \mathcal{C} tel que les objets Y et $F(X)$ soient isomorphes.

Proposition 1.9. Un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Exemples. - La catégorie $\mathbf{Vect}_k^{\text{fin}}$ des k -espaces vectoriels de dimension finie est équivalente à la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes $n \rightarrow m$ sont les matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans le corps k .

- Un morphisme d'anneaux commutatifs $f: R \rightarrow S$ induit un foncteur $f^*: \mathbf{Mod}_S \rightarrow \mathbf{Mod}_R$. Si le morphisme f est un isomorphisme, alors le foncteur f^* est une équivalence de catégories. La réciproque est fautive. Les morphismes f induisant une équivalence de catégories f^* sont appelés les *équivalences de Morita*.
- La catégorie des anneaux commutatifs et celle des schémas affines sont équivalentes de façon contravariante.

Théorème 1.10 (lemme de Yoneda). Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. Soit X un objet de \mathcal{C} . Alors il existe une bijection

$$\text{Nat}(h_X, F) \cong F(X).$$

Démonstration. Considérons les applications

$$\Phi: \begin{array}{l} \text{Nat}(h_X, F) \longrightarrow F(X), \\ \tau \longmapsto \tau_X(\text{id}_X) \end{array} \quad \text{et} \quad \Psi: \begin{array}{l} F(X) \longrightarrow \text{Nat}(h_X, F), \\ x \longmapsto \tau_x \end{array}$$

où la transformation naturelle $\tau_x: h_X \longrightarrow F$ avec $x \in F(X)$ est définie par les applications

$$(\tau_x)_Y: \begin{array}{l} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow F(Y), \\ f \longmapsto F(f)(x) \end{array}$$

pour tous objets $Y \in \mathcal{C}$. Soit $x \in F(X)$ un élément. Montrons que la famille τ_x est une transformation naturelle. Soit $f: Y \longrightarrow Y'$ un morphisme de \mathcal{C} . Il faut vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\tau_x(Y)} & F(Y) \\ h_X(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y') & \xrightarrow{\tau_x(Y')} & F(Y') \end{array}$$

est commutatif. Pour tout morphisme $g: X \longrightarrow Y$, on a

$$\begin{aligned} (\tau_x)_{Y'}(f \circ g) &= F(f \circ g)(x) \\ &= F(f) \circ F(g)(x) \\ &= F(f) \circ (\tau_x)_Y(g). \end{aligned}$$

D'où $\tau_x \in \text{Nat}(h_X, F)$. On vérifie maintenant que les deux applications définies plus haut sont réciproques l'une de l'autre. Soit $x \in F(X)$ un élément. Alors

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(x) &= \Phi(\tau_x) \\ &= (\tau_x)_X(\text{id}_X) \\ &= F(\text{id}_X)(x) \\ &= \text{id}_{F(X)}(x) = x. \end{aligned}$$

Ceci montre $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{F(X)}$. Inversement, soit $\tau \in \text{Nat}(h_X, F)$ une transformation naturelle. Alors pour tout objet Y de \mathcal{C} et tout morphisme $f: X \longrightarrow Y$, comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{\tau_X} & F(X) \\ h_X(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & F(Y) \end{array}$$

commute, on trouve

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(\tau)_Y(f) &= \Psi(\tau_X(\text{id}_X))_Y(f) \\ &= (\tau_{\tau_X(\text{id}_X)})_Y(f) \\ &= F(f)(\tau_X(\text{id}_X)) \\ &= [F(f) \circ \tau_X](\text{id}_X) \\ &= [\tau_Y \circ h_X(f)](\text{id}_X) \\ &= \tau_Y(h_X(f)(\text{id}_X)) \\ &= \tau_Y(f \circ \text{id}_X) \\ &= \tau_Y(f) \end{aligned}$$

et donc $\Psi \circ \Phi(\tau) = \tau$. Ceci montre $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{Nat}(h_X, F)}$. On obtient donc deux bijections Φ et Ψ qui sont réciproques l'une de l'autre. \diamond

En particulier, le lemme de Yoneda appliqué au foncteur covariant $h_Y: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ donne une bijection $\text{Nat}(h_X, h_Y) \simeq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Ceci implique le résultat suivant.

Corollaire 1.11. Soit \mathcal{C} une catégorie. Alors le plongement de Yoneda

$$h: \begin{cases} \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Fonc}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens}), \\ X \longmapsto h_X = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -) \end{cases}$$

est un foncteur pleinement fidèle.

Remarque. La catégorie $\text{Fonc}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens})$ est la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{C}^{op} .

1.3. Limites et colimites

Définition 1.12. Soit \mathcal{C} une catégorie. Soient $f: A \rightarrow B$ et $g: A \rightarrow C$ deux morphismes. Un *poussé en avant* des morphismes f et g est un objet D muni de deux morphismes $B \rightarrow D$ et $C \rightarrow D$ vérifiant la propriété suivante :

pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & E, \end{array}$$

il existe un unique morphisme $D \rightarrow E$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \downarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \downarrow \end{array} E$$

Exemple. Le recollement de deux espaces topologiques est un poussé en avant.

Lemme 1.13. Si le poussé en avant existe, alors il est unique à isomorphisme près.

Dualement, on définit la notion de tiré en arrière.

Exemple. Le produit fibré d'espaces topologiques est un tiré en arrière.

Les limites et colimites généralisent ces constructions.

Définition 1.14. Soient \mathcal{C} une catégorie et \mathcal{I} une petite catégorie. Un *diagramme de forme \mathcal{I}* est un foncteur $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$.

Exemple. Un diagramme de forme \mathbf{N} équivaut à se donner une suite d'objets $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$.

Définition 1.15. Soit $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme de forme \mathcal{I} .

– Une *limite* du diagramme F est la donnée d'un objet L_F de \mathcal{C} muni de flèches $\alpha_i: L_F \rightarrow F(i)$ avec $i \in \text{ob}(\mathcal{I})$ satisfaisant les points suivants :

- pour toute flèche $f: i \rightarrow j$, on a $\alpha_j = F(f) \circ \alpha_i$;
- pour tout objet E de \mathcal{C} muni de flèches $\beta_i: E \rightarrow F(i)$ avec $i \in \text{ob}(\mathcal{I})$ telles que

$$\beta_j = F(f) \circ \beta_i \quad \text{pour toute flèche } f: i \rightarrow j,$$

il existe une unique flèche $h: E \rightarrow L_F$ telle que

$$\beta_i = \alpha_i \circ h, \quad i \in \text{ob}(\mathcal{I}).$$

Si elle existe, alors la limite est unique à isomorphisme près et on la note $\lim_{\mathcal{I}} F$.

– De manière duale, on définit la notion de *colimite*, notée $\text{colim}_{\mathcal{I}} F$ si elle existe.

Exemples (produit et coproduit). Si on regarde une petite catégorie \mathcal{S} sans flèches autre que les identités, un diagramme de forme \mathcal{S} est juste un ensemble d'objets $F(i)$ avec $i \in \text{ob}(\mathcal{S})$. Dans ce cas, la limite est appelée le *produit* des objets $F(i)$, notée $\prod_{i \in I} F(i)$, et la colimite est appelée le *coproduit* des objets $F(i)$, notée $\coprod_{i \in I} F(i)$.

Par exemple, dans la catégorie des ensembles, le produit de deux ensembles X et Y est le produit cartésien $X \times Y$ et leur coproduit est l'union disjointe $X \sqcup Y$.

Remarque. Dans le cas où la catégorie \mathcal{S} est infini, la limite et la colimite ne sont pas toujours isomorphes. Par exemple, dans la catégorie k -espaces vectoriels, on trouve

$$\lim_{n \in \mathbf{N}} k_n[t] = k[[t]] \quad \text{et} \quad \text{colim}_{n \in \mathbf{N}} k_n[t] = k[t]$$

où les flèches $k_n[t] \rightarrow k_m[t]$ avec $n \leq m$ sont les inclusions.

Définition 1.16. – Une petite catégorie \mathcal{S} est *filtrée* si elle n'est pas vide et elle satisfait les conditions suivantes :

- pour tous objets $i, j \in \mathcal{S}$, il existe un objet $k \in \mathcal{S}$ et des flèches $i \rightarrow k$ et $j \rightarrow k$;
- pour tous morphismes $f, g: i \rightarrow j$, il existe une flèche $h: j \rightarrow k$ telle que $h \circ f = h \circ g$.

Une petite catégorie \mathcal{S} est *cofiltrée* si la catégorie \mathcal{S}^{op} est filtrée.

- Une *(co)limite filtrée* est une (co)limite indexée par une catégorie (co)filtrée.

Exemple. Les limites séquentielles indexées par l'ensemble \mathbf{N} sont filtrées.

1.4. Adjonctions

Définition 1.17. Deux foncteurs $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ forment une *paire adjointe* s'il existe un isomorphisme de bifoncteurs

$$\text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \cong \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G(-)).$$

On dit que le foncteur F est un adjoint à gauche du foncteur G ou que le foncteur G est un adjoint à droite du foncteur F . On note $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$.

De manière plus explicite, dire que les foncteurs F et G sont adjoints signifie que, pour tous morphismes $f: X \rightarrow X'$ de \mathcal{C} et $g: Y \rightarrow Y'$ de \mathcal{D} , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ \uparrow - \circ F(f) & & \uparrow - \circ f \\ \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X'), Y) & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X', G(Y)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), Y') & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G(Y')) \\ \uparrow g \circ - & & \uparrow G(g) \circ - \\ \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \end{array}$$

commutent. Par ailleurs, pour tous objets $X \in \mathcal{D}$ et $Y \in \mathcal{C}$, on a des isomorphismes naturels

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(F \circ G(X), X) \cong \text{Mor}_{\mathcal{D}}(G(X), G(X)) \quad (*)$$

et

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, G \circ F(Y)) \cong \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(Y)). \quad (**)$$

Définition 1.18. – L'*unité* d'une paire adjointe (F, G) est la transformation naturelle

$$\text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$$

qui associe chaque objet $Y \in \mathcal{C}$ à l'antécédent du morphisme $\text{id}_{F(Y)}$ par la bijection (**).

- La *counité* d'une paire adjointe (F, G) est la transformation naturelle

$$F \circ G \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$$

qui associe chaque objet $X \in \mathcal{D}$ à l'antécédent du morphisme $\text{id}_{G(X)}$ par la bijection $(*)$.

Proposition 1.19. Soit $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction. Alors

1. deux transformations naturelles $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ et $\varepsilon: F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ sont l'unité et la counité de cette adjonction si et seulement si les composées

$$G(Y) \xrightarrow{\eta(G(Y))} G \circ F \circ G(Y) \xrightarrow{G(\eta(Y))} G(Y)$$

et

$$G(X) \xrightarrow{F(\eta(X))} F \circ G \circ F(X) \xrightarrow{\varepsilon(F(X))} F(X)$$

sont les identités pour tous objets $X \in \mathcal{D}$ et $Y \in \mathcal{C}$;

2. le foncteur F est pleinement fidèle si et seulement si l'unité est un isomorphisme naturel ;
3. le foncteur G est pleinement fidèle si et seulement si la counité est un isomorphisme naturel ;
4. le foncteur F est une équivalence de catégories si et seulement si l'unité et la counité sont des isomorphismes naturels.

Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ *préserve* (ou *commute avec*) les colimites si

$$F(\text{colim}_{i \in \mathcal{I}} X_i) \simeq \text{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(X_i)$$

pour toute petite catégorie \mathcal{I} et toute famille d'objet $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de \mathcal{C} . De même, on définit la notion de préservation des limites.

Proposition 1.20. Soit $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction. Alors le foncteur F préserve les colimites et le foncteur G préserve les limites.

On peut donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un adjoint. Pour cela, on donne d'abord une définition préliminaire.

Définition 1.21. Soit κ un cardinal infini.

- Un objet X d'une catégorie \mathcal{C} est κ -compact si le foncteur

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

commute avec les colimites filtrées indexées par toute petite catégorie de cardinal κ .

- Une catégorie est *localement présentable* si elle admet un ensemble de générateurs κ -compacts, c'est-à-dire si tout objet est une colimite filtrée de cardinal κ de générateurs κ -compacts, et si elle est stable par colimite.

Théorème 1.22. Soient \mathcal{C} une catégorie localement présentable et $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Alors ce dernier admet un adjoint à gauche si et seulement s'il commute avec les colimites.

Chapitre 2

Théorie des l'homotopie dans les espaces topologiques

2.1 Équivalence d'homotopie	9
2.2 Groupes d'homotopie et équivalences faibles	10
2.3 Fibrations	11

2.1. Équivalence d'homotopie

Définition 2.1. – Deux applications continues $f, g: X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques X et Y sont *homotopes* s'il existe une application continue

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

telle que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$. On notera $f \simeq g$.

- Une application continue $f: X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue $g: Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. On dit alors que les espaces topologiques X et Y sont *homotopes*.
- L'espace topologique X est *contractile* s'il est homotope à un point.

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

Exemples. Les homéomorphismes sont des équivalences d'homotopie, mais la réciproque est fautive. L'espace \mathbf{R}^n est contractile, mais la sphère \mathbf{S}^n ne l'est pas.

Définition 2.2. Soient $A \subset X$ une partie et $f, g: X \rightarrow Y$ deux applications continues coïncidant sur la partie A . Les applications f et g sont *homotopes relativement à la partie A* s'il existe une homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ les reliant telle que

$$\forall t \in [0, 1], \forall x \in A, \quad H(x, t) = f(x).$$

On notera $f \simeq g \text{ rel } A$

La relation d'homotopie relative est aussi une relation d'équivalence.

Définition 2.3. Une partie $A \subset X$ est un *rétracte par déformation* de l'espace X s'il existe une application continue $p: X \rightarrow A$ telle qu'en notant $i: A \rightarrow X$ l'inclusion, on ait

$$p \circ i = \text{id}_A \quad \text{et} \quad i \circ p \simeq \text{id}_X.$$

Elle est un *rétracte par déformation forte* si, de plus, on a $i \circ p \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$.

Exemple. La sphère \mathbf{S}^n est un rétracte par déformation forte de l'espace $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. En effet, une projection p satisfaisant la définition est, par exemple, l'application $x \mapsto x/\|x\|$ et on prend ensuite l'homotopie barycentrique.

Contre-exemple. La boule \mathbf{B}^{n+1} ne se rétracte pas sur son bord $\partial\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{S}^n$.

2.2. Groupes d'homotopie et équivalences faibles

Définition 2.4. – Soit X un espace topologique. On note $\pi_0 X$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'espace X .

- Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\pi_n(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopies relatives aux points bases des applications continues pointées $(\mathbf{S}^n, \bullet) \rightarrow (X, x_0)$. On l'appelle le n -ième groupe d'homotopie de l'espace topologique X au point x .

Notation. On note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $X \rightarrow Y$. On adopte la même notation dans le cas des espaces topologiques pointés.

Définition 2.5. – La *suspension* d'un espace topologique X est l'espace topologique

$$\Sigma X := (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\}, X \times \{1\}).$$

- La *suspension réduite* d'un espace topologique pointé (X, x_0) est l'espace topologique pointé

$$\Sigma(X, x_0) := (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\}, X \times \{1\}, \{x_0\} \times [0, 1]).$$

Exemple. On trouve $\Sigma(\mathbf{S}^n, \bullet) \cong (\mathbf{S}^{n+1}, \bullet)$. En particulier, la sphère \mathbf{S}^n est l'itération de n suspensions réduites de la sphère \mathbf{S}^0 .

Définition 2.6. Soient $f, g: \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ deux applications continues pointées. On définit l'application $f * g: \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ par la composée

$$\Sigma(X, x_0) \rightarrow \Sigma(X, x_0) / (X \times \{1/2\}) \cong \Sigma(X, x_0) \vee \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0).$$

Remarque. L'opération \vee est le coproduit dans la catégorie **Top**.

Proposition 2.7. 1. La classe d'homotopie de l'application $f * g$ ne dépend que de celles des applications f et g .

2. On a $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$.
3. L'application constante $c: \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ vérifie $f * c \simeq c * f \simeq f$.
4. Pour toute application continue pointée $f: \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, l'application

$$f^{-1}: \begin{cases} \Sigma(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), \\ (x, t) \mapsto f(x, 1 - t) \end{cases}$$

vérifie $f * f^{-1} \simeq f^{-1} \circ f \simeq c$.

5. Pour toutes applications continues pointées $f, g: \Sigma^2(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, on a $f * g \simeq g * f$.

On en déduit ainsi le corollaire suivant.

Corollaire 2.8. L'ensemble $[\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)]$ est un groupe commutatif pour la loi $*$. De plus, il est commutatif si l'espace topologique pointé (X, x_0) est la suspension d'un autre espace topologique pointé. En particulier, lorsque $n \geq 1$, l'ensemble $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe et, si $n \geq 2$, il est commutatif.

Proposition 2.9. 1. Toute application continue pointée $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induit un morphisme de groupes

$$f_*: \begin{cases} \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0), \\ [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]. \end{cases}$$

2. Une équivalence d'homotopie f induit un isomorphisme $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$.

Dans le cas $n = 0$, on peut également définir une application ensembliste $f_*: \pi_0 X \rightarrow \pi_0 X$. Si l'application f est une équivalence d'homotopie, alors cette dernière est une bijection.

Proposition 2.10. Les n -ièmes groupes d'homotopie fournissent un foncteur

$$\pi_n: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}.$$

Définition 2.11. Une application continue $f: X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie faible* si elle induit une bijection $f_*: \pi_0 X \rightarrow \pi_0 Y$ et, pour tout entier $n \geq 1$ et tout point $x_0 \in X$, elle induit un isomorphisme $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$. Deux espaces X et Y sont *faiblement homotopes* s'il existe un zig-zag fini d'équivalences faibles les reliant.

D'après la proposition précédente, une équivalence d'homotopie est une équivalence d'homotopie faible. Dans certains cas, on peut donner une réciproque.

Théorème 2.12 (*Whitehead, 1949*). Une application continue entre deux CW-complexes est une équivalence d'homotopie si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie faible.

2.3. Fibrations

Définition 2.13. – Une *fibration de Hurowiz* est une application continue $p: E \rightarrow B$ telle que, pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \longrightarrow & B, \end{array}$$

il existe un relèvement $X \times I \rightarrow E$ faisant commuter ce diagramme.

- Une *fibration de Serre* est une application continue $p: E \rightarrow B$ vérifiant la propriété suivante par rapports aux inclusions $[0, 1]^n \times \{0\} \rightarrow [0, 1]^{n+1}$ avec $n \in \mathbf{N}^*$.

Exemples. – Les projections sont des fibrations de Hurowiz.

- Les revêtements sont des fibrations de Serre.
- Les espaces fibrés sont des fibrations de Serre.

Définition 2.14. L'*espace des chemins* au-dessus d'une application continue $f: X \rightarrow Y$ est le pullback $P(f)$ où les projections de l'évaluation $ev_0: Y^I \rightarrow Y$ et l'application $f: X \rightarrow Y$. Autrement dit, il s'agit de l'espace topologique

$$P(f) = Y^I \times_Y X = \{(\gamma, x) \in Y^I \times X \mid \gamma(0) = f(x)\}.$$

Remarque. Lorsque $f = id_X$, on retrouve l'espace des chemins de l'espace topologique X .

Lemme 2.15. L'espace des chemins au-dessus de l'application f par une factorisation

$$X \hookrightarrow P(f) \rightarrow Y$$

où la flèche $X \hookrightarrow P(f)$ est une équivalence d'homotopie et la flèche $P(f) \rightarrow Y$ est l'évaluation au temps 1.

Démonstration. Montrons que l'évaluation $P(f) \rightarrow Y$ est une fibration de Hurowiz. On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{\varphi} & P(f) \\ \downarrow & & \downarrow ev_1 \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{\psi} & Y, \end{array}$$

Notons $\varphi(z) = (\gamma_z, x_z)$ pour chaque élément $(z, 0) \in Z \times \{0\}$. Comme le carré précédent commute, on trouve $\gamma_z(1) = \psi(z, 0)$. On définit le relèvement

$$\tilde{\psi}: \begin{cases} Z \times [0, 1] \rightarrow P(f), \\ (z, t) \mapsto (\gamma_z * \psi|_{\{z\} \times [0, 1]}, x_z) \end{cases}$$

Cette application factorise le carré. ◊

Remarque. – Soit $p: E \rightarrow B$ une fibration de Hurowitz où l'espace B est connexe par arcs. Alors les fibres sont toutes homotopes.

– Soient X un espace topologique connexe par arcs et $x_0 \in X$ un point. La fibre de l'évaluation

$$\text{ev}_1: P(\{x_0\} \hookrightarrow X) \rightarrow E$$

en un point $x \in X$ est l'espace des chemins reliant les points x_0 et x . Ce dernier est homéomorphe à l'espace des lacets pointés $\Omega_x X$. Les espaces de lacets pointés sont donc tous homotopes.

Théorème 2.16. Soit $p: E \rightarrow B$ une fibration de Serre où l'espace B est connexe par arcs. Soient $b_0 \in B$ et $f_0 \in F := p^{-1}(b_0)$ deux points. Alors la suite

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) \rightarrow \pi_n(F, f_0) \rightarrow \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0) \rightarrow \cdots$$

est une suite exacte longue où l'application $\pi_n(F, f_0) \rightarrow \pi_n(E, f_0)$ est celle induite par l'inclusion $F \rightarrow E$ et l'application $\pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ est celle induite par l'application p . Le bout de la suite exacte est la suite exacte d'ensembles pointés

$$\cdots \rightarrow \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0 F \rightarrow \pi_0 B.$$

Remarque. – On dit qu'une suite d'ensembles pointés

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

est exacte si $f(A) = g^{-1}(c)$.

– L'application $\partial: \pi_{n+1}(B, b_0) \rightarrow \pi_n(F, f_0)$ induit une bijection

$$\pi_1(B, b_0)/p_*\pi_1(E, f_0) \cong \pi_0 F.$$

Proposition 2.17. Les fibres d'une fibration de Serre dont la base est connexe par arcs sont faiblement homotopes entre elles.

Démonstration. Soit $p: E \rightarrow B$ une telle fibration. Soit $b \in B$ un point. Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow \cong & & \downarrow \text{id}_B \\ P(p) & \longrightarrow & B \end{array}$$

induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E_b & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow f & & \downarrow \cong & & \downarrow \text{id}_B \\ P(p)_b & \longrightarrow & P(p) & \longrightarrow & B \end{array}$$

où les notations E_b et $P(p)_b$ désignent les fibres des espaces E et $P(p)$ au point b . Par le théorème, ce dernier diagramme induit un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(E, \text{pt}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(B, b) & \longrightarrow & \pi_n(E_b, \text{pt}) & \longrightarrow & \pi_n(E, \text{pt}) & \longrightarrow & \pi_n(B, b) \\ \downarrow \cong & & \parallel & & \downarrow f_* & & \downarrow & & \parallel \\ \pi_{n+1}(P(p), \text{pt}) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(B, b) & \longrightarrow & \pi_n(P(p)_b, \text{pt}) & \longrightarrow & \pi_n(P(p), \text{pt}) & \longrightarrow & \pi_n(B, b). \end{array}$$

D'après le lemme de cinq, l'application f_* est un isomorphisme pour tout indice $n \geq 1$. Il reste à traiter le cas $n = 0$. On a $f_* \circ \partial_1 = \partial_2$ et donc $f_* \circ \overline{\partial}_1 = \overline{\partial}_2$ où les applications $\overline{\partial}_i$ sont celles de la dernière remarque si bien que l'application f_* est bijective. \diamond

Exemple. La projection $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ sur une coordonnée n'est pas une fibration de Serre.

Exemple. Considérons l'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}, \\ \theta \mapsto e^{i\theta}. \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une fibration de Serre. On obtient une suite exacte

$$\pi_k(\mathbf{R}) \rightarrow \pi_k(\mathbf{S}^1) \rightarrow \pi_{k-1}(\mathbf{Z})$$

où $\pi_{k-1}(\mathbf{Z}) = 0$ si $k \geq 2$ et $\pi_k(\mathbf{R}) = 0$ pour tout $k \geq 0$. On en déduit

$$\pi_k(\mathbf{S}^1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ \mathbf{Z} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Exercices

Exercice 1. 1. Par la propriété universelle du produit, on dispose d'une bijection

$$\text{Mor}_{\text{Top}_*}((Z, z_0), (X \times Y, (x_0, y_0))) \cong \text{Mor}_{\text{Top}_*}((Z, z_0), (X, x_0)) \times \text{Mor}_{\text{Top}_*}((Z, z_0), (Y, y_0)).$$

En particulier, pour $Z = \mathbf{S}^n$, sachant que cette dernière bijection passe à l'homotopie, on obtient une bijection

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0).$$

2. On peut faire agir le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur la sphère \mathbf{S}^d ce qui permet d'obtenir une application

$$p: \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{S}^d \rightarrow \mathbf{RP}^d$$

qui est un revêtement.

3. L'application p est donc une fibration de Serre et induit alors une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \pi_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \pi_n(\mathbf{S}^d) \rightarrow \pi_n(\mathbf{RP}^d) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \cdots$$

Or $\pi_k(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ pour $k \geq 1$ et $\pi_0(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\}$. Donc pour tout entier $n \geq 2$, on trouve un isomorphisme

$$\pi_n(\mathbf{S}^d) \cong \pi_n(\mathbf{RP}^d).$$

Pour $n = 0$, on trouve $\pi_0(\mathbf{RP}^d) = \pi_0(\mathbf{S}^d) = \{\bullet\}$. Pour $n = 1$ et $d \geq 2$, la suite exacte permet d'obtenir $\pi_1(\mathbf{RP}^d) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Avec la question 1, on en déduit

$$\pi_0(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{RP}^3) = \pi_0(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{RP}^2) = \{\bullet\}$$

et

$$\pi_1(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{RP}^3) = \pi_1(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{RP}^2) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

De plus, on trouve

$$\pi_n(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{RP}^3) = \pi_n(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{RP}^2) = \pi_n(\mathbf{S}^2) \times \pi_n(\mathbf{S}^3), \quad n \geq 2.$$

4. D'après la formule de Künneth, on trouve

$$\mathrm{H}_2(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{RP}^3) \cong \bigoplus_{i+j=2} \mathrm{H}_i(\mathbf{S}^2) \otimes \mathrm{H}_j(\mathbf{RP}^3) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

et

$$\mathrm{H}_2(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{RP}^2) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Ainsi les espaces $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{RP}^3$ et $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{RP}^2$ ne sont pas homotopes.

5. On peut en déduire qu'aucun isomorphisme $\pi_n(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{RP}^3) \rightarrow \pi_n(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{RP}^2)$ ne provient d'une application continue.

Chapitre 3

Catégories de modèles

3.1	Définitions	15
3.2	Propriétés générales des catégories de modèles	16
3.3	Exemples	17
3.4	Localisation de catégorie homotopique	18
3.5	Homotopies	18
3.6	Le théorème de Whitehead et ses conséquences	22

3.1. Définitions

Définition 3.1. On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

dans une catégorie. On dit que

- le morphisme i a la *propriété du relèvement à gauche par rapport au morphisme p* s'il existe une factorisation $C \rightarrow B$;
- le morphisme p a la *propriété du relèvement à droite par rapport au morphisme i* s'il existe une factorisation $C \rightarrow B$.

Pour une classe M de morphismes d'une catégorie \mathcal{C} , on note $\text{LLP}(M)$ et $\text{RLP}(M)$ les classes des morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche et à droite par rapport à tous les morphismes de la classe M .

Exemples. Les fibrations de Hurewicz et de Serres respectivement sont les applications continues ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux inclusions respectives

$$X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0, 1] \quad \text{et} \quad [0, 1]^n \times \{0\} \hookrightarrow [0, 1]^{n+1}.$$

Définition 3.2. Un morphisme $g: A \rightarrow B$ est un *rétract* d'un morphisme $f: X \rightarrow Y$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & \overbrace{\hspace{10em}} & & & \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \\ g \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & \end{array}$$

Exemple. Un morphisme est le rétract de lui-même.

Définition 3.3. Une *catégorie des modèles* est une catégorie \mathcal{C} muni de trois classes de morphismes

- W dont les morphismes sont appelés les *équivalences faibles* et notés avec une flèche surmontée du symbole \sim ;
- Fib dont les morphismes sont appelés les *fibrations* et notés avec une flèche \twoheadrightarrow ;
- Cof dont les morphismes sont appelés les *cofibrations* et notés avec une flèche \twoheadrightarrow ;

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) la catégorie \mathcal{C} est complète et cocomplète;
- (ii) pour tous morphismes $f: A \twoheadrightarrow B$ et $g: B \twoheadrightarrow C$, si deux des trois morphismes f , g et $g \circ f$ sont dans W , alors le troisième l'est aussi;
- (iii) tout rétract d'un élément de W (respectivement Fib et Cof) est encore un élément de W (respectivement Fib et Cof);
- (iv) pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & B \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ C & \twoheadrightarrow & D \end{array}$$

avec $i \in \text{Cof}$ et $p \in \text{Fib}$, il existe un relèvement $C \twoheadrightarrow B$ si et seulement si $i \in W$ ou $p \in W$;

- (v) tout morphisme $f: X \twoheadrightarrow Y$ admet des factorisation

$$X \twoheadrightarrow Z \xrightarrow{\sim} Y \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{\sim} Z \twoheadrightarrow Y$$

qui sont fonctorielles.

Une fibration ou une cofibration est *acyclique* si elle appartient à la classe W .

Définition 3.4. Soit \mathcal{C} une catégorie des modèles. Un objet X est

- *cofibrant* si le morphisme initial $0 \twoheadrightarrow X$ est une cofibration;
- *fibrant* si le morphisme final $X \twoheadrightarrow *$ est une fibration.

On note \mathcal{C}^c et \mathcal{C}^f les sous-catégories pleines des objets cofibrants et fibrants. Une *résolution cofibrante* (respectivement *fibrante*) est un morphisme $L \xrightarrow{\sim} X$ pour un objet cofibrant L (respectivement un morphisme $X \xrightarrow{\sim} R$ pour un objet fibrant R).

Remarque. D'après l'axiome (v), tout objet admet des résolutions fibrantes et cofibrantes qui sont de plus fonctorielles. On obtient ainsi deux foncteurs $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^c$ et $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^f$.

3.2. Propriétés générales des catégories de modèles

Proposition 3.5. Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles et $f: X \twoheadrightarrow Y$ un morphisme. Alors

1. c 'est une cofibration si et seulement si $f \in \text{LLP}(W \cap \text{Fib})$;
2. c 'est une cofibration acyclique si et seulement si $f \in \text{LLP}(\text{Fib})$;
3. c 'est une fibration si et seulement si $f \in \text{RLP}(W \cap \text{Cof})$;
4. c 'est une fibration acyclique si et seulement si $f \in \text{RLP}(\text{Cof})$;
5. c 'est une équivalence faible si et seulement s'il admet une factorisation $X \xrightarrow{\sim} Z \xrightarrow{\sim} Y$.

Démonstration. Montrons le premier point. Le sens direct découle de l'axiome (iv). Réciproquement, on suppose $f \in \text{LLP}(W \cap \text{Fib})$. D'après l'axiome (v), il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow \sim \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y. \end{array}$$

Mais comme $f \in \text{LLP}(W \cap \text{Fib})$, il existe un morphisme $g: Y \rightarrow Z$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{\quad g \quad} & Z & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & Y \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & & & &
 \end{array}$$

commute. Ainsi le morphisme f est un rétract de la cofibration \tilde{f} . D'après l'axiome (iii), il s'agit donc d'une cofibration. Ceci termine la preuve du point 1.

Le dernier point vient de l'axiome (v) combiné avec l'axiome (ii). Enfin, les autres points se montrent de la même manière que le premier. \diamond

Lemme 3.6. Soient \mathcal{C} une catégorie et M une classe de morphismes. Alors la catégorie $\text{LLP}(M)$ est stable par composition et par pushout et la catégorie $\text{RLP}(M)$ l'est par composition et pullback.

Démonstration. Montrons seulement la stabilité par composition de la catégorie $\text{LLP}(M)$, les autres propriétés se montrant de manière analogue. Soit $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ deux morphismes de $\text{LLP}(M)$. On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & A \\
 g \circ f \downarrow & & \downarrow p \\
 Z & \longrightarrow & D.
 \end{array}$$

avec $p \in M$. Comme $f \in \text{LLP}(M)$, il existe un relevé $Y \rightarrow A$. Mais comme $g \in \text{LLP}(M)$, il existe donc un relevé $Z \rightarrow A$. Ceci montre $g \circ f \in \text{LLP}(M)$. \diamond

Corollaire 3.7. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles. Alors

1. La donnée de deux classes W , Cof ou Fib caractérise la troisième classe ;
2. ces trois classes sont stables par compositions ;
3. les classes Cof et $W \cap \text{Cof}$ sont stables par pushout ;
4. les classes Fib et $W \cap \text{Fib}$ sont stables par pullback ;
5. les isomorphismes appartiennent à la classe $W \cap \text{Cof} \cap \text{Fib}$.

Démonstration. D'après la proposition 3.5, on peut écrire les égalités

$$\begin{aligned}
 \text{Cof} &= \text{LLP}(W \cap \text{Fib}), \\
 \text{Fib} &= \text{RLP}(W \cap \text{Cof}), \\
 W &= (W \cap \text{Fib}) \circ (W \cap \text{Cof}) = \text{RLP}(\text{Cof}) \circ \text{LLP}(\text{Fib})
 \end{aligned}$$

ce qui montre le premier point. Les deuxième, troisième et quatrième points sont des conséquences directes de la proposition 3.5 et du lemme 3.6. Enfin, pour le cinquième point, on remarque que un isomorphisme a la propriété de relèvement à gauche et à droite par rapport à toutes les classes de morphismes et appartient donc à la classe $\text{RLP}(\text{Cof}) \cap \text{LLP}(W \cap \text{Fib}) = W \cap \text{Fib} \cap \text{Cof}$. \diamond

3.3. Exemples

Exemple. Une catégorie complète et cocomplète \mathcal{C} admet une structure de catégorie de modèles dite triviale, c'est-à-dire où la classe W est celle des isomorphismes et où les classes Cof et Fib sont celles de tous les morphismes.

Exemples. La catégorie **Top** des espaces topologiques où l'on décrète que

- la classe W des équivalences faibles est celle des équivalences d'homotopie faible ;
- la classe Fib des fibrations est celle des fibrations de Serre ;

- les cofibrations sont les morphismes de la catégorie $\text{LLP}(W \cap \text{Fib})$

est une catégorie de modèles. Les cofibrations sont les *rétracts d'inclusions cellulaires généralisées*, elles comprennent les inclusions $\mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{B}^n$ qui, en un certain sens, engendrent toutes les cofibrations par un procédé limite. Dans ce cadre, la notion de résolution cofibrante correspond à la notion de résolution cellulaire.

Exemple. La catégorie \mathbf{Ch}_R^+ des complexes de R -modules concentrés en degrés positifs où l'on décrète que

- la classe W des équivalences faibles est celle des quasi-isomorphismes ;
- la classe Fib des fibrations est celle des morphismes surjectifs en chaque degré strictement positif ;
- la classe Cof des cofibrations est celle des morphismes injectifs en chaque degré et de conoyaux projectifs.

est une catégorie de modèles. Dans ce cas, les objets cofibrants sont les complexes constitués de R -modules projectifs.

3.4. Localisation de catégorie homotopique

Définition 3.8 (*localisation de Gabriel-Zisman*). Une *localisation* d'une catégorie \mathcal{C} par rapport à une classe W de morphismes est une catégorie $\mathcal{C}[W^{-1}]$ munie d'un foncteur $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$ vérifiant la propriété universelle suivantes : pour toute catégorie \mathcal{D} , le foncteur

$$- \circ L: \text{Fonc}(\mathcal{C}[W^{-1}], \mathcal{D}) \rightarrow \text{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

est pleinement fidèle et son image essentielle est constituée des foncteurs envoyant tout morphisme de W sur un isomorphisme de \mathcal{D} .

Autrement dit, le foncteur de localisation $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$ envoie les morphismes de W sur des isomorphismes de W et il est universelle pour cette propriété. Lorsqu'elle existe et que la classe W est implicite, la localisation est parfois appelée *catégorie homotopique* et notée $\text{Ho}(\mathcal{C})$.

Lorsqu'il en existe, la localisation est unique à équivalence de catégories près. On peut toujours construire une localisation, mais elle peut poser des problèmes de nature logique car la localisation peut ne pas être localement petite même si la catégorie \mathcal{C} l'est. Mais dans le cas d'une catégorie de modèles \mathcal{C} , on pourra montrer que la localisation $\mathcal{C}[W^{-1}]$ est effectivement localement petite.

3.5. Homotopies

Définition 3.9. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles.

- Un *objet en cylindre* sur un objet X est un objet $\text{Cyl}(X)$ tel que le morphisme $\text{id}_X \sqcup \text{id}_X$ admette une factorisation

$$X \sqcup X \twoheadrightarrow \text{Cyl}(X) \xrightarrow{\sim} X.$$

On notera $i_0, i_1: X \rightarrow X \sqcup X \rightarrow \text{Cyl}(X)$ les morphismes d'inclusion.

- Un *objet en chemins* sur un objet X est un objet $\mathcal{P}(X)$ tel que le morphisme $\text{id}_X \times \text{id}_X$ admette une factorisation

$$X \times X \twoheadrightarrow \mathcal{P}(X) \twoheadrightarrow X \times X.$$

On notera $p_1, p_2: \mathcal{P}(X) \rightarrow X \times X \rightarrow X$ les morphismes de projection.

Exemples. On se place dans la catégorie \mathbf{Top} . Soit X un objet.

- L'objet $X \times [0, 1]$ est en cylindre sur l'objet X . La fibration $X \times [0, 1] \xrightarrow{\sim} X$ est l'inclusion et la cofibration $X \sqcup X \rightarrow X \times [0, 1]$ est la réunion des inclusions $X \cong X \times \{0\} \rightarrow X \times [0, 1]$ et $X \cong X \times \{1\} \rightarrow X \times [0, 1]$.
- L'objet $X^{[0,1]}$ est en chemins sur l'objet X . La fibration est l'inclusion et la cofibration est le produit $X^{[0,1]} \rightarrow X^{\{0,1\}} \cong X \times X$ des évaluations aux extrémités.

Définition 3.10. Soient \mathcal{C} une catégorie de modèles et $f, g: X \rightarrow Y$ deux flèches parallèles.

- Une *homotopie à gauche* entre les morphismes f et g est un morphisme $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ telle que $f = H \circ i_0$ et $g = H \circ i_1$. Dans ce cas, on notera $f \sim_1 g$.
- Une *homotopie à droite* entre les morphismes f et g est un morphisme $H: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ telle que $f = p_0 \circ H$ et $g = p_1 \circ H$. Dans ce cas, on notera $f \sim_r g$.
- Les morphismes f et g sont *homotopes* s'ils le sont à droite et à gauche, c'est-à-dire $f \sim_1 g$ et $f \sim_r g$. Dans ce cas, on notera $f \sim g$.
- Le morphisme f est une *équivalence d'homotopie* s'il existe un morphisme $f': Y \rightarrow X$ tel que $f \circ f' \sim \text{id}_Y$ et $f' \circ f \sim \text{id}_X$.

Proposition 3.11. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles.

1. Si $f \sim_1 g$, alors $h \circ f \sim_1 h \circ g$.
2. Soit A un objet cofibrant. Alors la relation \sim_1 définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X)$.
3. Soit $p: X \twoheadrightarrow Y$ un morphisme fibrant acyclique. Alors il induit une bijection

$$p_*: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X)/\sim_1 \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y)/\sim_1$$

donnée par la composition par le morphisme p .

4. Soient Y un objet fibrant et $f, g: X \rightarrow Y$ deux morphismes. Si $f \sim_1 g$, alors $f \circ h \sim_1 g \circ h$.
5. L'homotopie à droite est stable par composition à droite.
6. Soit B un objet fibrant. Alors la relation \sim_r définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, B)$.
7. Soit $p: X \twoheadrightarrow Y$ un morphisme cofibrant acyclique. Alors il induit une bijection

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, B)/\sim_1 \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, B)/\sim_1$$

donnée par la précomposition par le morphisme p .

8. L'homotopie à droite entre morphismes de source cofibrante est stable par composition à gauche.

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3.12. Soient A un objet cofibrant et Y un objet fibrant.

- Pour tout objet X , le morphisme $X \rightarrow X \sqcup A$ est une cofibration et le morphisme $X \times Y \rightarrow X$ est une fibration.
- Soit $\text{Cyl}(A)$ un cylindre sur A . Alors les deux morphismes canoniques $A \rightarrow A \sqcup A \rightarrow \text{Cyl}(A)$ sont des cofibrations acycliques. De même, soit $\mathcal{P}(Y)$ un objet en chemins sur Y . Alors les deux morphismes canoniques $\mathcal{P}(Y) \rightarrow Y \times Y \rightarrow Y$ sont des fibrations acycliques.

Démonstration. – On utilise le fait que le pushout d'une cofibration est encore une cofibration. En effet, on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & X \sqcup A \end{array}$$

De même pour le morphisme $X \times Y \rightarrow X$.

- On sait déjà que l'application $A \sqcup A \rightarrow \text{Cyl}(A)$ est une cofibration. Avec le premier point du lemme, le morphisme considéré est donc une cofibration. De plus, il s'agit d'une équivalence faible. De même pour l'autre assertion. \diamond

Démonstration de la proposition. 1. Soient $f, g: X \rightarrow Y$ et $h: Y \rightarrow Z$ trois morphismes. On suppose $f \sim_1 g$. Soit $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ une homotopie à gauche entre les morphismes f et g . Alors le morphisme $h \circ H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Z$ définit une homotopie entre les morphismes $h \circ f$ et $h \circ g$. D'où $h \circ f \sim_1 h \circ g$.

2. Pour la symétrie de la relation \sim_1 sur $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X)$, il suffit d'échanger les deux facteurs du coproduit $A \sqcup A$. Pour la réflexivité, le morphisme $\text{Cyl}(A) \rightarrow A \rightarrow X$ est une homotopie à gauche entre le morphisme f et lui-même.

Montrons que la relation \sim_1 est transitive sur $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X)$ ce qui conclura le point. Soient $f, g, h: X \rightarrow Y$ trois morphismes tels que $f \sim_1 g$ et $g \sim_1 h$. On note $H: \text{Cyl}(A) \rightarrow X$ et $H': \text{Cyl}(A)' \rightarrow X$ deux homotopies. On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & \text{Cyl}(A)' \\ i_1 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)' \end{array}$$

Mais les deux morphismes

$$A \xrightarrow{i_0} A \sqcup A \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(A) \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)$$

et

$$A \xrightarrow{i'_1} A \sqcup A \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(A) \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)$$

induisent un morphisme $A \sqcup A \rightarrow \text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)$. Par ailleurs, les équivalences faibles $\text{Cyl}(A) \rightarrow A$ et $\text{Cyl}(A)' \rightarrow A'$ se factorisent, par propriété universelle du pushout, en un morphisme $\text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)' \rightarrow A$ qui est une équivalence faible. De plus, les deux morphismes

$$A \xrightarrow{i_0} \text{Cyl}(A) \longrightarrow A$$

et

$$A \xrightarrow{i'_1} \text{Cyl}(A) \longrightarrow A$$

sont égales à l'identité id_A , donc les morphismes

$$A \xrightarrow{i_0} \text{Cyl}(A) \longrightarrow \text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)' \longrightarrow A$$

et

$$A \xrightarrow{i'_1} \text{Cyl}(A) \longrightarrow \text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)' \longrightarrow A$$

sont aussi égales à l'identité id_A puisque $\text{id} \sqcup \text{id} = \text{id}$. De la sorte, on a obtenu un objet en cylindre $\text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)'$ sur A à partir des morphismes i_0 et i'_1 .

Construisons l'homotopie. On peut écrire le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i'_0} & \text{Cyl}(A)' \\ i_1 \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cyl}(A) & \longrightarrow & \text{Cyl}(A) \sqcup \text{Cyl}(A)' \\ & \searrow H & \downarrow \tilde{H} \\ & & X \end{array}$$

Par propriété universelle du pushout, les morphismes H et H' se factorisent en un morphisme \tilde{H} qui est bien une homotopie à gauche entre les morphismes f et h . Ceci montre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

3. Toute homotopie H entre les morphismes f et g induit une homotopie $p \circ H$ entre les morphismes $p \circ f$ et $p \circ h$, donc l'application considérée

$$p_* : \begin{cases} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X)/\sim_1 \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, Y)/\sim_1, \\ [f] \longmapsto [p \circ f]. \end{cases}$$

est bien définie. Soit $f: A \rightarrow Y$ un morphisme. Alors par la propriété du relèvement, il existe un unique morphisme f' faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow f' & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ce qui montre la surjectivité de l'application p_* . Il reste à montrer son injectivité pour conclure. Soient $f, g: A \rightarrow X$ deux morphismes tels que $p \circ f \sim_1 p \circ g$. On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & \text{Cyl}(A) & \longleftarrow & A \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & X & & \\ & & \downarrow p & & \\ & & Y & & \end{array}$$

qui induit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{f \sqcup g} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

Le morphisme \tilde{H} définit donc une homotopie à gauche entre les morphismes f et g ce qui montre que l'application p_* est injective.

4. Soit $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ une homotopie à gauche entre les morphismes f et g . Soit $h: W \rightarrow X$ un morphisme. Soit $W \sqcup W \rightarrow \text{Cyl}(W) \xrightarrow{\sim} W$ un objet en cylindre sur W . On factorise le morphisme $\text{Cyl}(X) \xrightarrow{\sim} X$ sous la forme

$$\text{Cyl}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(X)' \xrightarrow{\sim} X$$

d'après l'axiome (v). On obtient alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{H} & Y \\ \downarrow \sim & \nearrow H' & \downarrow \\ \text{Cyl}(X)' & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

qui nous fournit une homotopie H' où l'on a un objet en cylindre

$$X \sqcup X \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(X)' \xrightarrow{\sim} X.$$

On a alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
W \sqcup X & \xrightarrow{i' \circ (h \sqcup h)} & \text{Cyl}(X)' \\
\downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \sim \\
\text{Cyl}(W) & \longrightarrow & X
\end{array}$$

qui nous donne une homotopie $H' \circ \tilde{H}$ entre les morphismes $f \circ h$ et $g \circ h$. \diamond

Corollaire 3.13. Soit A un objet cofibrant et Y un objet fibrant. Alors la relation d'homotopie, la relation d'homotopie à gauche et celle à droite coïncident. En particulier, elles définissent une relation d'équivalence sur les flèches de la catégorie \mathcal{C}^{cf} des objets fibrant et cofibrant.

Démonstration. Soient $f, g: A \rightarrow Y$ deux morphismes homotopes à gauche par une homotopie $H: \text{Cyl}(A) \rightarrow Y$. On cherche un objet en chemin $Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(Y) \twoheadrightarrow Y \times Y$ sur Y et une homotopie à droite $K: A \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ entre les morphismes f et g . On sait que le morphisme canonique $i_0: A \rightarrow A \sqcup A \rightarrow \text{Cyl}(A)$ est une cofibration acyclique car l'objet A est fibrant.

Notons j la composée $\text{Cyl}(A) \rightarrow A \rightarrow Y$. Alors on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\
\downarrow i_0 & & \nearrow \tilde{K} & & \downarrow \\
\text{Cyl}(A) & \xrightarrow{(j, H)} & Y \times Y & &
\end{array}$$

car $H \circ i_0 = f = j \circ i_0$. On pose ensuite $K := \tilde{K} \circ i_1$. Alors

$$\text{pr}_0 \circ K = j \circ i_1 = f \circ \text{id}_A = f$$

et

$$\text{pr}_1 \circ K = H \circ i_1 = g.$$

Ainsi le morphisme K est une homotopie à droite entre les morphismes f et g . De même, on utilise le fait que l'objet Y est fibrant pour montrer que, si $f \sim_r g$, alors $f \sim_l g$. \diamond

3.6. Le théorème de Whitehead et ses conséquences

Théorème 3.14 (Whitehead). Un morphisme $A \rightarrow X$ entre deux objets fibrant et cofibrant est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soit $f: A \rightarrow X$ une équivalence faible. On peut la factoriser sous la forme

$$A \xrightarrow{\sim} C \xrightarrow{\sim} X.$$

On dispose du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
A & \xlongequal{\quad} & A \\
\downarrow q & \nearrow r & \downarrow \\
C & \longrightarrow & \bullet
\end{array}$$

puisque l'objet A est fibrant. Par ailleurs, le morphisme q induit une bijection

$$q_*: [C, C] \rightarrow [A, C]$$

qui envoie la classe $[q \circ r]$ sur la classe $[q \circ r \circ q] = [q]$. Mais elle envoie aussi la classe $[\text{id}_C]$ sur la classe $[q]$ ce qui implique $r \circ q = \text{id}_A$ et $q \circ r \sim \text{id}_C$. Donc le morphisme q est une équivalence d'homotopie. Il en va de même du morphisme p et donc du morphisme f .

Réciproquement, soit $f: A \rightarrow X$ une équivalence d'homotopie. Soit $g: X \rightarrow A$ un inverse à homotopie près. On factorise le morphisme f sous la forme

$$A \xrightarrow{\sim} C \xrightarrow{p} X.$$

Pour conclure, on veut montrer que le morphisme p est une équivalence faible. Soit $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow X$ une homotopie entre les morphismes $f \circ g$ et id_X . On dispose du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q \circ g} & C \\ \downarrow \sim & \nearrow H' & \downarrow p \\ \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{H} & X. \end{array}$$

On pose $s := H' \circ i_1$ de sorte que $p \circ s = \text{id}_X$. Comme le morphisme q est une équivalence faible, la première partie de la preuve assure qu'il admet un inverse r à homotopie près. Comme $p \circ q = f$, on peut écrire $p \sim p \circ q \circ r \sim f \circ r$. Comme $s \sim q \circ g$, on peut aussi écrire

$$s \circ p \sim q \circ g \circ p \sim q \circ g \circ f \circ r \sim q \circ r \sim \text{id}_C,$$

donc la composée $s \circ p$ est une équivalence faible. Mais on dispose du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} C & \xlongequal{\quad} & C & \xlongequal{\quad} & C \\ \downarrow p & & \downarrow s \circ p & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{p} & X \\ \underbrace{\hspace{10em}} & & & & \end{array}$$

ce qui assure que le morphisme p est un rétracte du morphisme $s \circ p$ et donc est une équivalence faible. \diamond

Proposition 3.15. 1. Soient A un objet, $\text{Cyl}_0(A)$ un objet un cylindre sur A et X un objet fibrant. Alors pour tous morphismes $f, g: A \rightarrow X$, si $f \sim_1 g$, alors ils sont homotopes via une homotopie sur $\text{Cyl}_0(A)$.

2. La version duale avec les objets en chemin est aussi vraie.

Démonstration. Montrons uniquement le premier point. Soit $H: \text{Cyl}(A) \rightarrow X$ une homotopie à gauche entre les morphismes f et g . Notons $i_0, i_1: A \rightarrow \text{Cyl}(A)$ les morphismes canoniques. D'après l'axiome (v), on factorise le morphisme $\text{Cyl}(A) \rightarrow A$ sous la forme

$$\text{Cyl}(A) \xrightarrow{\sim} C \xrightarrow{\sim} A.$$

On obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A \sqcup A & \longrightarrow & \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{\sim} & C \\ \downarrow & & \nearrow \ell & & \downarrow \sim \\ \text{Cyl}_0(A) & \longrightarrow & & & A. \end{array}$$

On obtient alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{H} & X \\ \downarrow \sim & \nearrow H' & \downarrow \\ C & \longrightarrow & \bullet. \end{array}$$

La composée $H' \circ \ell$ est alors une homotopie à gauche entre les morphismes f et g . En effet, la commutativité du premier diagramme implique que les composées

$$A \sqcup A \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}_0(A) \rightarrow C \rightarrow X$$

et

$$A \sqcup A \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(A) \longrightarrow C \longrightarrow X$$

sont les mêmes. Par commutativité du second diagramme, cette dernière composée est égale au morphisme

$$f \sqcup g: A \sqcup A \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(A) \longrightarrow X. \quad \diamond$$

Lemme 3.16 (*Brown*). Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories de modèles. Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur qui envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrant sur des équivalences faibles. Alors il envoie les équivalences faibles entre objets cofibrant sur des équivalences faibles.

Démonstration. Soit $f: A \xrightarrow{\sim} B$ une équivalence faible où les objets A et B sont fibrant. Par l'axiome (v), on factorise le morphisme $f \sqcup \text{id}_B: A \sqcup B \rightarrow B$ sous la forme

$$A \sqcup B \xrightarrow{\sim} C \xrightarrow{\sim} B.$$

On considère le pushout

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & & \downarrow i_2 \\ A & \xrightarrow{i_1} & A \sqcup B \end{array}$$

puisque les objets A et B sont cofibrant et que les cofibrations sont stables par pushout. Les composée

$$f = (f \sqcup \text{id}_B) \circ i_1 = p \circ q \circ i_1$$

et

$$\text{id}_B = (f \sqcup \text{id}_B) \circ i_2 = p \circ q \circ i_2$$

sont des équivalences faibles, donc les morphismes $q \circ i_1$ et $q \circ i_2$ sont des cofibrations acycliques par l'axiome (ii), donc les morphismes $F(q \circ i_1)$ et $F(q \circ i_2)$ sont des équivalences faibles. Or

$$\text{id}_{F(B)} = F(\text{id}_B) = F(p) \circ F(q \circ i_2),$$

donc le morphisme $F(p)$ est une équivalence faible. Ainsi le morphisme $F(f) = F(p) \circ F(q \circ i_1)$ est une équivalence faible. \diamond

Corollaire 3.17. 1. Soit A un objet cofibrant. Soit $h: X \rightarrow Y$ une équivalence faible entre objets fibrant. Alors elle induit une bijection

$$h_*: [A, X]^\ell \rightarrow [A, Y]^\ell.$$

2. Soit X un objet fibrant. Soit $h: B \rightarrow A$ une équivalence faible entre objets cofibrant. Alors elle induit une bijection

$$h_*: [A, X]^r \rightarrow [B, X]^r.$$

Démonstration. Montrons le premier point. Considérons le foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie un objet X sur l'ensemble $[A, X]^\ell$. On applique le lemme de Brown à ce foncteur \diamond

Proposition 3.18. Les ensembles de classes d'homotopie $[A, B]_{\mathcal{C}}$ où les objets A et B sont fibrant et cofibrant forment les ensembles de morphismes d'une catégorie notée $\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}})$.

Théorème 3.19. La catégorie $\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}})$ est la localisation $\mathcal{C}^{\text{cf}}[W^{-1}]$. Le foncteur de localisation

$$L^{\text{cf}}: \mathcal{C}^{\text{cf}} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}})$$

agit comme l'identité sur les objets et comme le quotient par la relation d'homotopie sur les morphismes.

Démonstration. Soit $F: \mathcal{C}^{\text{cf}} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur envoyant les équivalences faibles sur des isomorphismes. On veut montrer l'existence et l'unicité à équivalence faible d'une factorisation

$$\mathcal{C}^{\text{cf}} \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}}) \longrightarrow \mathcal{D}.$$

Commençons par l'unicité. Soient $\bar{F}, \tilde{F}: \text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}}) \rightarrow \mathcal{D}$ deux factorisations du foncteur F . Alors ils coïncident sur les objets. Par ailleurs, pour toute classe d'homotopie $[f]$ dans $\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}})$, on trouve $\bar{F}[f] = F(f) = \tilde{F}[f]$. D'où $\bar{F} = \tilde{F}$ et l'unicité du foncteur \bar{F} .

Montrons à présent son existence. Soient $f, g: A \rightarrow B$ deux morphismes homotopes à gauches de \mathcal{C}^{cf} . Soit $H: \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ une homotopie à gauche entre les morphismes f et g . Notons $i_0, i_1: A \rightarrow \text{Cyl}(A)$ et $s: \text{Cyl}(A) \rightarrow A$ les morphismes canoniques. Ce sont des équivalences faibles et ils sont donc envoyés sur des isomorphismes par le foncteur F . Mais les relations $s \circ i_0 = \text{id}_A$ et $s \circ i_1 = \text{id}_A$ donnent

$$F(s) \circ F(i_0) = \text{id}_{F(A)} \quad \text{et} \quad F(s) \circ F(i_1) = \text{id}_{F(A)}.$$

Ceci donne $F(i_0) = F(s)^{-1} = F(i_1)$. Or les relations $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$ deviennent

$$F(f) = F(H) \circ F(i_0) = F(H) \circ F(i_1) = F(g).$$

On peut donc factoriser le foncteur F par le foncteur de localisation. \diamond

Rappelons qu'on a défini des foncteurs de résolutions cofibrantes $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^c$. Alors la composée $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^c \rightarrow \mathcal{C}$ est munie d'une transformation naturelle vers le foncteur $\text{id}_{\mathcal{C}}$: pour tout objet X de \mathcal{C} , on obtient une factorisation

$$0 \twoheadrightarrow Q(X) \xrightarrow{\sim} X.$$

De même avec les résolutions fibrantes : on a un foncteur $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^f$. On dispose alors d'un foncteur $R \circ Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{cf}}$ qui est isomorphe au foncteur $Q \circ R$.

Proposition 3.20. Les inclusions

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{cf}} & \hookrightarrow & \mathcal{C}^c \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^f & \hookrightarrow & \mathcal{C} \end{array}$$

induisent des équivalences de catégories

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{cf}}[W^{-1}] & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}^c[W^{-1}] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathcal{C}^f[W^{-1}] & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{C}[W^{-1}]. \end{array}$$

Démonstration. Montrons que le foncteur d'inclusion $I: \mathcal{C}^f \hookrightarrow \mathcal{C}$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{C}^f[W^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$. Le foncteur composé $\mathcal{C}^f \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$ envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes. Il se factorise donc en un foncteur

$$\bar{I}: \mathcal{C}^f[W^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}].$$

Construisons-lui un inverse. Le foncteur composé $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^f \rightarrow \mathcal{C}^f[W^{-1}]$ envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes d'après l'axiome (ii). Il se factorise dans en un foncteur

$$\bar{R}: \mathcal{C}[W^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}^f[W^{-1}].$$

Montrons que les foncteurs composés $\bar{I} \circ \bar{R}$ et $\bar{R} \circ \bar{I}$ sont isomorphes aux identités. On dispose de la transformation naturelle $\text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow I \circ R$ qui induit une transformation naturelle

$$\text{id}_{\mathcal{C}[W^{-1}]} \rightarrow \bar{I} \circ \bar{R}.$$

Mais cette dernière est un isomorphisme naturel puisque la composée $\text{id}_{\mathcal{C}} \circ I \circ R$ est une transformation naturelle faible. De même pour l'autre composé. On en déduit que les foncteurs \bar{I} et \bar{R} sont des équivalences de catégories, inverses l'une de l'autre. \diamond

Théorème 3.21. 1. L'inclusion $\mathcal{C}^{\text{cf}} \rightarrow \mathcal{C}$ induit une équivalence de catégories

$$\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}}) \cong \mathcal{C}[W^{-1}] = \text{Ho}(\mathcal{C}).$$

2. Pour deux objets X et Y , on dispose d'une bijection

$$\text{Mor}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(X, Y) \cong [Q(X), R(Y)]_{\mathcal{C}}.$$

3. Un morphisme de \mathcal{C} induit un isomorphisme de $\text{Ho}(\mathcal{C})$ si et seulement si c'est une équivalence faible.

Démonstration. On vient de montrer le premier point. Montrons le deuxième point. Les deux foncteurs $I: \mathcal{C}^{\text{cf}} \rightarrow \mathcal{C}$ et $Q \circ R \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{cf}}$ induisent des isomorphismes naturels

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}[W^{-1}]}(X, Y) \simeq [Q(R(X)), Q(R(Y))].$$

Pour tout objet A de \mathcal{C} , on dispose d'un morphisme naturel

$$f_A: Q(A) \xrightarrow{\sim} A$$

et, pour tout objet B de \mathcal{C} , d'un morphisme naturel

$$c_B: B \xrightarrow{\sim} R(B).$$

Ainsi on trouve des applications

$$[Q(R(X)), Q(R(Y))] \xrightarrow{(f_{R(Y)})_*} [Q(R(X)), R(Y)] \xrightarrow{(Q(c_X))_*} [Q(X), R(Y)].$$

dont les sources sont cofibrantes et les buts fibrants. La composée est donc une bijection. Ceci conclut le deuxième point

Enfin, montrons le troisième point. Si le morphisme f est une équivalence faible de \mathcal{C} , alors sa classe $[f]$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}[W^{-1}]$ par définition. Réciproquement, on suppose que le morphisme $f: A \rightarrow B$ de \mathcal{C} induit un isomorphisme $[f]$ de $\mathcal{C}[W^{-1}]$. On dispose du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Q(R(A)) & \xrightarrow{Q(R(f))} & Q(R(B)) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

L'axiome (ii) montre alors que le morphisme f est une équivalence faible si et seulement si le morphisme $Q(R(f))$ l'est. Dans le carré commutatif induit dans $\text{Ho}(\mathcal{C})$, les flèches verticales sont des isomorphismes et le morphisme $[f]$ en est aussi un, donc le morphisme $[Q(R(f))]$ est un isomorphisme et il en va de même du morphisme $[Q(R(f))]_{\text{Ho}(\mathcal{C}^{\text{cf}})}$. Ainsi le morphisme $Q(R(f))$ est une équivalence d'homotopie entre objets de \mathcal{C}^{cf} . Par le théorème de Whitehead, il s'agit d'une équivalence faible. \diamond

Chapitre 4

Engendrement cofibrant et complexes de chaînes

4.1	Résultats préliminaires	27
4.2	Argument du petit objet	28
4.3	Engendrement cofibrant	29
4.4	Complexes de chaînes	31

4.1. Résultats préliminaires

Lemme 4.1. Soit M une classe de morphismes dans une catégorie \mathcal{C} . Alors les classes $\text{LLP}(M)$ et $\text{RLP}(M)$ sont stables par rétracte.

Démonstration. Considérons un rétracte

$$\begin{array}{ccccc}
 & \overbrace{\hspace{10em}} & & & \\
 A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \\
 \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \\
 & \underbrace{\hspace{10em}} & & &
 \end{array}$$

où $f \in \text{LLP}(M)$. Montrons que $g \in \text{LLP}(M)$. Soit

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow g & & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

un carré commutatif où $p \in M$. On obtient alors un morphisme $h: Y \rightarrow C$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{i} & Y & \longrightarrow & B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

Alors le morphisme $h \circ i$ est le relèvement recherché. \diamond

Lemme 4.2. Soit \mathcal{C} une catégorie admettent des colimites. Soit G une \mathbf{N} -suite muni de morphisme i^k . Notons $G^\infty := \text{colim}_{k \in \mathbf{N}} G^k$ et i^∞ la composition transfinie des morphismes i^k . On suppose que ces derniers appartiennent à la classe $\text{LLP}(M)$. Alors $i^\infty \in \text{LLP}(M)$.

Démonstration. On fait de la chasse aux diagrammes! \diamond

4.2. Argument du petit objet

À présent, on considère un ensemble $\mathcal{F} := \{\alpha_i : A_i \rightarrow B_i\}_{i \in I}$ de flèches de la catégorie \mathcal{C} . On considère un morphisme $f : X \rightarrow Y$. On souhaite le factoriser sous la forme

$$X \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, f) \rightarrow Y$$

où le morphisme $i_\infty : X \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, f)$ est un « complexe \mathcal{F} -cellulaire relatif » et où le morphisme $p_\infty : G^\infty(\mathcal{F}, f) \rightarrow Y$ appartient à $\text{RLP}(\mathcal{F})$.

Définition 4.3. – Un objet A de \mathcal{C} est \mathbf{N} -petit si, pour tout foncteur $B_\bullet : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{C}$, le morphisme canonique

$$\text{colim}_{n \in \mathbf{N}} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B_n) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim}_{n \in \mathbf{N}} B_n) \quad (*)$$

est bijectif.

– Soit \mathcal{M} une classe de morphisme. Un objet A de \mathcal{C} est \mathbf{N} -petit relativement à la classe \mathcal{M} si le morphisme (*) est bijectif pour les suites de flèches de \mathcal{M} .

Exemples. – Dans la catégorie \mathbf{Mod}_R , les R -modules de présentation finie sont \mathbf{N} -petits.

– Dans la catégorie \mathbf{Ch}_R , les complexes de chaînes bornées de R -modules finiment présentés sont \mathbf{N} -petits.

On introduit l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{F}, f)$ des carrés commutatifs c de la forme

$$\begin{array}{ccc} A_{i_c} & \xrightarrow{u_c} & X \\ \downarrow \alpha_{i_c} & & \downarrow f \\ B_{i_c} & \xrightarrow{v_c} & Y. \end{array}$$

On démarre cette construction récursive par le pushout. On trouve le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{c \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, f)} A_{i_c} & \xrightarrow{\coprod u_c} & X \\ \downarrow \coprod \alpha_{i_c} & & \downarrow i_1 \\ \coprod_{c \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, f)} B_{i_c} & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}, f) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \searrow p_1 \\ \xrightarrow{\coprod v_c} \end{array} \begin{array}{c} X \\ \\ Y. \end{array}$$

La construction se poursuit par récurrence sur l'entier n en posant

$$p_0 = f, \quad i_0 = \text{id}_X \quad \text{et} \quad G^{n+1}(\mathcal{F}, f) = G^1(\mathcal{F}, p_n).$$

Le morphisme i_{n+1} est obtenu grâce au pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{c \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, p_n)} A_{i_c} & \xrightarrow{i_n \circ \dots \circ i_0 \circ \coprod u_c} & G^n(\mathcal{F}, f) \\ \downarrow \coprod \alpha_{i_c} & & \downarrow i_{n+1} \\ \coprod_{c \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, p_n)} B_{i_c} & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}, f) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{p_n} \\ \searrow p_{n+1} \\ \xrightarrow{\coprod v_c} \end{array} \begin{array}{c} G^n(\mathcal{F}, f) \\ \\ Y. \end{array}$$

Cette construction vérifie le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{i_1} & G^1(\mathcal{F}, f) & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{i_n} & G^n(\mathcal{F}, f) & \longrightarrow & \cdots \\
 \downarrow f & & \downarrow p_1 & & & & \downarrow p_n & & \\
 Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & \cdots & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & \cdots
 \end{array}$$

On note

$$G^\infty(\mathcal{F}, f) := \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} G^n(\mathcal{F}, f)$$

ainsi que $i_\infty: X \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, f)$ la composée transfinie des morphismes i_n et $p_\infty: G^\infty(\mathcal{F}, f) \rightarrow Y$ celle des morphismes p_n .

Définition 4.4. Un *complexe \mathcal{F} -cellulaire relatif* est une composée de pushouts de morphismes de la classe \mathcal{F} .

Lemme 4.5. Supposons que les domaines de flèches de \mathcal{F} sont petits relativement à la classe des complexes \mathcal{F} -cellulaire. Alors $p_\infty \in \operatorname{RLP}(\mathcal{F})$.

Démonstration. Chaque objet A_i est petit relative aux complexes \mathcal{F} -cellulaire. En particulier, on trouve une bijection

$$\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, G^n(\mathcal{F}, f)) \cong \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A_i, G^\infty(\mathcal{F}, f)).$$

Ainsi tout morphisme $u: A_i \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, f)$ se factorise par l'objet $G^n(\mathcal{F}, f)$ pour un certain entier n . Considérons un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{u} & G^\infty(\mathcal{F}, f) \\
 \downarrow \alpha_i & & \downarrow p_\infty \\
 B_i & \xrightarrow{v} & Y
 \end{array}$$

Ce dernier diagramme peut se réécrire sous la forme

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_i & \xrightarrow{u} & G^n(\mathcal{F}, f) & \xrightarrow{i_n} & G^{n+1}(\mathcal{F}, f) & \longrightarrow & G^\infty(\mathcal{F}, f) \\
 \downarrow f & & \downarrow p_n & \nearrow r & \downarrow p_{n+1} & & \downarrow p_\infty \\
 B_i & \xrightarrow{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y
 \end{array}$$

Le morphisme $r: B_i \rightarrow G^{n+1}(\mathcal{F}, f)$ vient de la construction de l'objet $G^{n+1}(\mathcal{F}, f)$. En effet, comme le premier carré appartient à $\mathcal{S}(\mathcal{F}, p_n)$, le morphisme $\prod B_i \rightarrow G^{n+1}(\mathcal{F}, f)$ induit des morphismes $r: B_i \rightarrow G^{n+1}(\mathcal{F}, f)$. On en déduit le relèvement $B_i \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, f)$. \diamond

4.3. Engendrement cofibrant

Définition 4.6. Soit I un ensemble de flèches.

- Une *I -cofibration* est un morphisme de la classe $\operatorname{Cof}(I) := \operatorname{LLP}(\operatorname{RLP}(I))$.
- Une *I -fibration* est un morphisme de la classe $\operatorname{Fib}(I) := \operatorname{RLP}(\operatorname{LLP}(I))$.

Remarques. – Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles. Alors les cofibrations sont les Cof-cofibrations.

- On a $\operatorname{RLP}(\operatorname{Cof}(I)) = \operatorname{RLP}(I)$ et $\operatorname{LLP}(\operatorname{Fib}(I)) = \operatorname{LLP}(I)$.
- Si $I \subset J$, alors $\operatorname{RLP}(J) \subset \operatorname{RLP}(I)$, donc $\operatorname{Cof}(I) \subset \operatorname{Cof}(J)$.

Définition 4.7. Une catégorie de modèles \mathcal{C} est à *engendrement cofibrant* s'il existe deux ensembles de morphismes I et J vérifiant les points suivants :

- les domaines des flèches de l'ensemble I (respectivement J) sont petits relativement à la classe $\text{Cell}(I)$ des complexes I -cellulaire (respectivement J -cellulaire) relatifs ;
- $\text{Fib} = \text{RLP}(J)$;
- $W \cap \text{Fib} = \text{RLP}(I)$.

Lemme 4.8. On a $\text{Cell}(I) \subset \text{Cof}(I)$.

Démonstration. Comme $I \subset \text{Cof}(I)$ et les classes de la forme $\text{LLP}(M)$ sont stables par composée transfinie et pushout, on obtient $\text{Cell}(I) \subset \text{Cof}(I)$. \diamond

Lemme 4.9. Soit I un ensemble de flèches dont les domaines sont petits relativement à la classe $\text{Cell}(I)$. Alors toute I -cofibration est un rétracte d'un complexe I -cellulaire relatif.

Démonstration. Soit $f: A \rightarrow B$ une I -cofibration. Par l'argument du petit objet, on la factorise sous la forme $f = p \circ i$ où $i \in \text{Cell}(I)$ et $p \in \text{RLP}(I)$. On obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ \downarrow f & \nearrow r & \downarrow p \\ B & \xlongequal{\quad} & B. \end{array}$$

Un tel morphisme r existe puisque $p \in \text{RLP}(I) = \text{RLP}(\text{Cof}(I))$. On obtient donc le diagramme de rétraction

$$\begin{array}{ccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow f & & \downarrow i & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{r} & C & \xrightarrow{p} & B \\ & \searrow & \text{id}_B & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

ce qui conclut. \diamond

Proposition 4.10. Soit \mathcal{C} une catégorie de modèles à engendrement cofibrant. Notons I (respectivement J) l'ensemble des fibrations (respectivement des cofibrations acyclique) génératrices. Alors

1. les cofibrations sont les I -cofibrations ;
2. toute cofibration est un rétracte d'un complexe I -cellulaire relatif ;
3. toute cofibration acyclique est une J -cofibration ;
4. toute cofibration acyclique est un complexe J -cellulaire relatif ;

Démonstration. Les points 1 et 3 viennent de la définition. En effet, on a $\text{LLP}(\text{Fib} \cap W) = \text{Cof}$. Or $\text{Fib} \cap W = \text{RLP}(I)$, donc $\text{Cof} = \text{LLP}(\text{RLP}(I)) = \text{Cof}(I)$. On a aussi

$$\text{LLP}(\text{Fib}) = \text{Cof} \cap W = \text{LLP}(\text{RLP}(J)) = \text{Cof}(J).$$

Les points 2 et 4 découlent des points 1 et 3 et du lemme précédent. \diamond

Théorème 4.11. Soit \mathcal{C} une catégorie complète et cocomplète. Soit W une classe de morphismes. Soient I et J deux ensembles de morphismes. Alors la catégorie \mathcal{C} admet une structure de catégorie de modèles à engendrement cofibrant où

- les équivalences faibles sont les morphismes de W ;
- l'ensemble I est un ensemble de cofibrations génératrices ;
- l'ensemble J est un ensemble de fibrations acycliques génératrices

si et seulement si les points suivants sont vérifiés :

1. la classe W est stable par rétracte et a la propriété « deux sur trois » ;
2. les domaines de I sont petits par rapport à la classe $\text{Cell}(I)$;

3. les domaines de J sont petits par rapport à la classe $\text{Cell}(J)$;
4. $\text{Cell}(J) \subset W \cap \text{Cof}(I)$;
5. $\text{RLP}(I) \subset W \cap \text{RLP}(J)$;
6. $W \cap \text{Cof}(I) \subset \text{Cof}(J)$ ou $W \cap \text{RLP}(J) \subset \text{RLP}(I)$.

Démonstration. On suppose les points 1 à 6. On définit, dans la catégorie \mathcal{C} , les classes

- W pour les équivalences faibles ;
- $\text{Cof}(I)$ pour les cofibrations ;
- $\text{RLP}(J)$ pour les fibrations.

Montrons qu'on a une structure de catégorie de modèles. L'axiome (i) est supposé dans l'énoncé. Pour l'axiome (ii), il est contenu dans le point 1. Pour l'axiome (iii), la classe $\text{Cof}(I) = \text{LLP}(\text{RLP}(I))$ est stable par rétracte et de même pour la classe $\text{RLP}(J)$.

Vérifions l'axiome (v). Grâce au point 2, on peut appliquer l'argument du petit objet pour factoriser tout morphisme f en un morphisme i de $\text{Cell}(I)$ suivi d'un morphisme p de $\text{RLP}(I)$. Mais comme $\text{Cell}(I) \subset \text{Cof}(I)$, le morphisme i est une cofibration. Et d'après le point 5, le morphisme p est une fibration acyclique. De même, on montre l'autre factorisation. Enfin, la factorisation est fonctorielle puisque toutes les constructions le sont.

Vérifions l'axiome (iv). On va utiliser le point 6. Supposons que $W \cap \text{Cof}(I) \subset \text{Cof}(J)$. Par définition, cela signifie que les cofibrations acycliques sont des J -cofibrations. Or

$$\text{Cof}(J) = \text{LLP}(\text{RLP}(J)) = \text{LLP}(\text{Fib}).$$

La première partie de l'axiome (iv) est donc montrée. Soit $f: X \xrightarrow{\sim} Y$ une fibration acyclique. Montrons que $f \in \text{RLP}(\text{Cof}(I)) = \text{RLP}(I)$. L'argument du petit objet produit un factorisation du morphisme f sous la forme $f = p \circ i$ avec $i \in \text{Cell}(I)$ et $p \in \text{RLP}(I)$. Par l'axiome 5, on trouve $p \in W \cap \text{RLP}(J)$, c'est-à-dire que le morphisme p est un fibration acyclique. Par l'axiome (ii), comme les morphismes p et f sont des équivalences faibles, le morphisme i en est aussi une. Ainsi $i \in W \cap \text{Cof}(I) \subset \text{Cof}(J) = \text{LLP}(\text{Fib})$. Donc il existe un relèvement qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ \downarrow i & \nearrow \sim & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Ainsi le morphisme f est un rétracte du morphisme p , dans $f \in \text{RLP}(I)$.

Enfin, les points 3 et 4 dans la définition de catégorie de modèles à engendrement cofibrant découlent des égalités $\text{Fib} = \text{RLP}(J)$ et $\text{Fib} \cap W = \text{RLP}(I)$. \diamond

4.4. Complexes de chaînes

Théorème 4.12. Il existe une structure de modèles, dite *projective*, sur la catégorie \mathbf{Ch}_R^+ telle que

- les équivalences faibles soient les quasi-isomorphismes ;
- les fibrations soient les surjections en chaque degré strictement positif ;
- les cofibrations soient les injections en chaque degré telles que, en chaque degré, leurs conoyaux soient un R -module projectif.

Il existe aussi une variante de ce théorème pour les complexes de chaînes non bornés.

Théorème 4.13. Il existe une structure de modèles, dite *projective*, sur la catégorie \mathbf{Ch}_R telle que

- les équivalences faibles soient les quasi-isomorphismes ;
- les fibrations soient les surjections en chaque degré ;
- les cofibrations soient les injections scindées en chaque degré telles que, en chaque degré, leurs conoyaux soient un R -module projectif.

On va montrer le premier théorème. Pour cela, on a besoin de la définition suivante.

Définition 4.14. Soit $n \geq 1$ un entier.

– On définit le complexe de R -modules D^n par l'égalité

$$D_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, n-1, \\ Rb_{n-1} & \text{si } k = n-1, \\ Re_n & \text{si } k = n, \end{cases}$$

et $d(e_n) = b_{n-1}$.

– On définit le complexe de R -modules S^n par l'égalité

$$D_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ R & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on dispose d'une inclusion $i_n: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$. On considère l'ensemble I des inclusions i_n et l'ensemble J des applications triviales $0 \rightarrow D^n$. On va dire que

- un morphisme est une fibration s'il appartient à la classe $\text{RLP}(J)$;
- un morphisme est une cofibration s'il appartient à la classe $\text{Cof}(I)$;

Montrons que ceci fournit une structure de catégorie de modèles.

Axiome (i). La catégorie \mathbf{Mod}_R est complète et les limites et colimites dans la catégorie \mathbf{Ch}_R se construisent degré par degré. Ainsi la catégorie \mathbf{Ch}_R est complète et cocomplète.

Point 1 du dernier théorème. Les isomorphismes de R -modules sont stables par rétracte et ont la propriété « deux sur trois », donc les quasi-isomorphismes ont aussi cette propriété par fonctorialité des modules d'homologie.

Point 2 du dernier théorème. Les complexes 0 et S^n sont des complexes bornés de R -modules finiment présentés.

Proposition 4.15. 1. Un morphisme $D^n \rightarrow X$ équivaut à la donnée d'un élément du R -module X_n .
2. Un morphisme est une fibration si et seulement si il est surjectif en chaque degré.

Démonstration. 1. Soit $f: D^n \rightarrow X$ un morphisme. Par linéarité, ce dernier est déterminé par les images $f(b_{n-1})$ et $f(e_n)$. De plus, il commute avec les différentiels si bien que

$$f(b_{n-1}) = f(de_n) = df(e_n).$$

Donc il est totalement déterminé par l'image $f(e_n)$.

2. Soit p une fibration. Alors $p \in \text{RLP}(J)$. Par le premier point, un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est donc la donnée d'un élément $y_n \in Y_n$. Un relèvement dans ce carré est la donnée d'un élément $x \in X_n$ tel que $p(x_n) = y_n$. Ainsi le morphisme p est surjectif en chaque degré. \diamond

Proposition 4.16. 1. Un morphisme $S^n \rightarrow X$ équivaut à la donnée d'un n -cycle de X .
2. Un morphisme f est une fibration acyclique si et seulement si $f \in \text{RLP}(I)$.

Démonstration. 1. Soit $f: S^n \rightarrow X$. Alors il est déterminé par l'image des générateurs e_n . Mais on peut écrire $df(e_n) = f(de_n) = 0$.

2. Soit $p: X \rightarrow Y$ un morphisme. L'ensemble des carrés commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est en bijection avec l'ensemble E des couples $(y, x) \in Y_n \oplus Z_{n-1}(X)$ tels que $p(x) = dy$. Ainsi un relèvement dans un tel carré est donné d'un élément $z \in X_n$ tel que $dz = x$ et $p(z) = y$.

Supposons que $p \in \text{RLP}(I)$. Soit $y \in Z_n(Y)$. Alors $dy = 0$, donc le couple $(y, 0)$ appartient à l'ensemble E , donc il existe un élément $z \in X_n$ tel que $dz = 0$ et $p(z) = 0$. Ainsi l'application $Z_n(p)$ est surjective et donc l'application $H_n(p)$ est surjective.

On en déduit aussi que l'application p_n est surjective. En effet, soit $y \in Y_n$. Alors $dy \in Z_{n-1}(Y)$, donc il existe un élément $x \in Z_{n-1}(X)$ tel que $p(x) = dy$. Alors $(y, x) \in E$ et donc il existe un élément $z \in X_n$ tel que $p(z) = y$.

Soit $x \in Z_n(y)$ un élément tel que $p(x) = dy$ pour un certain élément $y \in Y_{n+1}$. Alors $(y, x) \in E$, donc il existe un élément $z \in X_n$ tel que $dz = x$. Ainsi l'application p est injective et donc un quasi-isomorphisme.

Réciproquement, soit $p: X \xrightarrow{\sim} Y$ une fibration acyclique. On montre que $p \in \text{RLP}(I)$, c'est à dire que, pour tout élément $(y, x) \in Y_n \oplus Z_{n-1}(X)$ tel que $p(x) = dy$, il existe un élément $z \in X_n$ tel que $dz = x$ et $p(z) = y$. En effet, comme l'application p est surjective en chaque degré, on trouve une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \ker p \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0.$$

Comme l'application p est un quasi-isomorphisme, son noyau $\ker p$ est acyclique. Soit $w \in X_n$ un élément tel que $p(w) = y$. Alors $dp(w) = p(dw) = dy = p(x)$, donc $p(dw - x) = 0$, donc $dw - x \in (\ker p)_{n-1}$. De plus, on trouve $d(dw - x) = d^2w - dx = 0$, donc $dw - x \in Z_{n-1}(\ker p)$, donc $dw - x \in B_{n-1}(\ker p)$, donc il existe un élément $v \in (\ker p)_{n-1}$ tel que $dv = dw - x$, donc $x = d(w - v)$. On pose $z := w - v$. Alors $dz = x$ et $p(z) = p(w) - p(v) = y$. \diamond

Il nous reste à caractériser les cofibrations acycliques.

- Lemme 4.17.**
1. Soit A un complexe cofibrant. Alors chaque R -module A_n est projectif.
 2. Soit A un complexe borné inférieurement composé de R -modules projectifs. Alors il est cofibrant.

Démonstration.

1. Soit $q: M \longrightarrow N$ une surjection entre deux R -modules. Soit $f: A_{n-1} \longrightarrow N$ un morphisme de R -modules. On introduit le complexe $D^n(M)$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

concentré en degrés n et $n - 1$ et où la flèche $M \longrightarrow M$ est l'identité. Le morphisme q induit un morphisme de complexes $D^n(M) \longrightarrow D^n(N)$ égal à q en degré $n - 1$ et n et à zéro ailleurs. Comme le morphisme q est surjectif et les complexes $D^n(M)$ et $D^n(N)$ sont acycliques, l'application $D^n(M) \xrightarrow{\sim} D^n(N)$ est une fibration acyclique. Le morphisme f induit un morphisme $A \longrightarrow D^n(N)$ défini par f en degré $n - 1$, $f \circ d$ en degré n et zéro ailleurs. Comme A est cofibrant, on trouve un relèvement $A \longrightarrow D^n(M)$ qui induit le morphisme cherché $A_{n-1} \longrightarrow M$.

2. Soit $p: X \xrightarrow{\sim} Y$ une fibration acyclique. Soit $g: A \longrightarrow Y$ un morphisme. On veut construire un relèvement $h: A \longrightarrow X$. On le construit par récurrence : on va construire des morphismes $h_n: A_n \longrightarrow X_n$ tels que $p_n \circ h_n = g_n$ et $d \circ h_n = h_{n-1} \circ d$. Comme A est borné inférieurement, on peut démarrer la récurrence. Supposons que de tels morphismes h_k sont définis pour $k < n$. Comme A_n est projectif et p_n surjectif, il existe $f: A_n \longrightarrow X_n$ tel que $p_n \circ f = g_n$. Soit $K := \ker p$. Posons $F := d \circ f - h_{n-1} \circ d: A_n \longrightarrow X_{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned} p_{n-1} \circ F &= p_{n-1}df - p_{n-1}h_{n-1}d \\ &= dp_n f - g_{n-1}d \\ &= dg_n - g_{n-1}d = 0. \end{aligned}$$

Donc $F: A_n \rightarrow K_{n-1}$. Comme p est une surjection acyclique, son noyau K est acyclique, donc $Z_{n-1}(K) = B_{n-1}(K)$. De plus, on trouve $d \circ F = d^2 f - dh_{n-1}d = 0$, donc $F: A_n \rightarrow \text{Im } d_n$. Comme A_n est projectif, le morphisme F se factorise donc en $F = d_n \circ G$ avec $G: A_n \rightarrow K_n$. On pose $h_n := f - G$. Ce morphisme convient. En effet, on trouve

$$p_n \circ h_n = p_n f - p_n G = p_n f = g_n$$

et

$$dh_n = df - dG = df - F = h_{n-1}d. \quad \diamond$$

Lemme 4.18. Soient A un complexe cofibrant et B un complexe acyclique. Alors tout morphisme $A \rightarrow B$ est homotope au morphisme nul.

Démonstration. On rappelle que deux morphismes $f, g: X \rightarrow Y$ sont homotopes s'il existe des morphismes $h_n: X_n \rightarrow Y_{n+1}$ tels que

$$dh_n + h_{n-1}d = f - g.$$

Soit $f: A \rightarrow B$ un morphisme. Soit P le complexe défini par l'égalité

$$P_n := B_n \oplus B_{n+1}$$

muni de la différentielle $d(x, y) = (dx, x - dy)$. L'application $P \rightarrow B$ de projection sur la première composante est une surjection et son noyau est le complexe $B[-1] := (B_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est acyclique. Donc l'application $P \rightarrow B$ est une fibration acyclique. Ainsi le morphisme f se factorise en un morphisme $g: A \rightarrow P$ qui est de la forme $g = (f, D)$. Mais on a $dg = gd$ avec

$$\begin{aligned} dg &= d(f, D) = (df, f - dD), \\ gd &= (fd, Dd) \end{aligned}$$

ce qui donne $f - dD = Dd$ et conclut. \diamond

Proposition 4.19. Un morphisme $i: A \rightarrow B$ est un cofibrant si et seulement si c'est une injection scindée en chaque degré de conoyau cofibrant.

Démonstration. On sait que $\text{Cof} = \text{LLP}(W \cap \text{Fib})$. Supposons que le morphisme i est une cofibration. Soit $A \rightarrow D^{n+1}(A)$ le morphisme défini par l'identité en degré n , d_A en degré $n+1$ et zéro ailleurs. Alors le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & D^{n+1} \\ \downarrow & \nearrow r & \downarrow \sim \\ B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commute ce qui assure l'existence d'un tel relèvement r . En particulier, on trouve $r_n \circ i_n = \text{id}_{A_n}$. Ainsi le morphisme i est une injection scindée en chaque degré.

Il reste à voir que le conoyau est cofibrant. On a un pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \text{coker } i \end{array}$$

avec $i \in \text{Cof}(I) = \text{LLP}(\text{Cof}(I))$ où la classe $\text{LLP}(-)$ est stable par pushout, donc le conoyau $\text{coker } i$ est cofibrant.

Réciproquement, supposons que le morphisme i soit une injection scindée en chaque degré de conoyau cofibrant. Montrons que $i \in \text{LLP}(W \cap \text{Fib})$. On considère un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow p \sim \\ B & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

En degré n , le morphisme i_n est une injection scindée de conoyau projectif. Notons C son conoyau. Alors $B_n \cong A_n \oplus C_n$. Le morphisme canonique $B \rightarrow C$ commute avec les différentielles, donc la différentielle de B est de la forme $d(-, c) = (-, dc)$. De plus, l'injection $A \rightarrow B$ commute aussi avec les différentielles, donc $d(a, 0) = (da, 0)$. Donc $d(a, c) = (da + \tau(c), dc)$ pour une certaine application $\tau: C_n \rightarrow A_{n-1}$. On a

$$0 = d^2(a, c) = d(da + \tau(c), dc) = (d^2a + d\tau(c) + \tau(dc), d^2c) = ((d\tau + \tau d)(c), 0),$$

donc $d\tau + \tau d = 0$. On en déduit $g(a, c) = pf(a) + \sigma(c)$ avec $\sigma: C_n \rightarrow Y_n$. (Preuve non terminée.) \diamond

Proposition 4.20. 1. Un morphisme $i: A \rightarrow B$ est dans $\text{Cof}(J)$ si et seulement si c'est une injection de conoyau projectif en tant que complexe.
2. Toute élément de $\text{Cof}(J)$ est une cofibration acyclique.

Ce conclut la preuve de l'engendrement cofibrant par les ensembles de morphismes I et J de la catégorie \mathbf{Ch}_R . Les deux notions d'homotopie coïncident alors.