Topologie algébrique

Tobias Schmidt

Master 1 de mathématiques fondamentales · Université de Rennes 1
Notes prises par Téofil Adamski (version du 10 mars 2021)

Chapitre 1

Déformations continues

La méthode de la topologie algébrique consiste à associer à un espace des « invariants » de l'algèbre comme des nombres, des groupes ou des années. On veut justement que ces « invariants » soient invariants par déformation continue de la topologie. En particulier, si deux espaces sont homéomorphes, alors ils auront les mêmes invariants. Par exemple, le nombre de composantes connexes est un invariant.

Notation. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Dans toute la suite, on considérera
- la norme euclidienne $\| \ \|$ sur $\mathbf{R}^n$;
- la sphère $\mathbf{S}^n \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$;
- la boule fermée $\mathbf{B}^n \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

1.1 Déformation d'espace topologique

1.1.1 Homéomorphisme et homotopie

Définition 1.1. Un *homéomorphisme* entre deux espaces topologiques X et Y est une bijection continue $f \colon X \longrightarrow Y$ telle que sa réciproque $f^{-1} \colon Y \longrightarrow X$ soit continue. On notera alors $X \cong Y$.

▷ Exemples. – La sphère $\mathbf{S}^n$ privée d'un point est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ et un tel homéomorphisme est la projection stéréographique.
– Les espaces $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{S}^1$ sont homéomorphes par l'application bien définie

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{R}/\mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}, \\ \overline{r} &\longmapsto e^{2i\pi r}. \end{aligned} \right.$$

Définition 1.2. Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications $f, g \colon X \longrightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad H(x,1) = g(x) \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Une telle application H est une *homotopie* entre f et g. On notera alors $f \sim g$.

Notation. Pour toute homotopie $H \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ entre f et g et pour tous éléments $x \in X$ et $s \in [0,1]$, on notera $H_s(x) \coloneqq H(x,s)$.

Définition 1.3. Soit $A \subset X$. Deux applications $f, g \colon X \longrightarrow Y$ coïncidant sur A sont *homotopes relativement* à A s'il existe une homotopie $F \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que

$$H_s|_A = f|_A \qquad \text{pour tout } s \in [0,1].$$

On notera alors $f \sim_A g$.

▷ Exemple. Soient $C \subset \mathbf{R}^n$ un convexe et $f, g\colon X \longrightarrow C$ deux applications continues. Alors l'application

$$H\colon \left| \begin{array}{l} X \times [0,1] \longrightarrow C, \\ \quad (x,s) \longmapsto sf(x) + (1-s)g(x) \end{array} \right.$$

est une homotopie entre f et g, appelée l'*homotopie barycentrique* entre f et g. De plus, si f et g coïncidant sur une partie $A \subset X$, alors cette homotopie est relative à A.

Proposition 1.4. L'homotopie est une relation d'équivalence sur les applications continues de X dans Y. Il en va de même pour l'homotopie relative à une partie $A \subset X$.

Preuve La réflexivité est évidente et le symétrie l'est aussi en prenant les chemins inverses. Montrons la transitivité. Soient $f, g, h\colon X \longrightarrow Y$ des applications continues. On suppose qu'il existe une homotopie F entre f et g et une homotopie G entre g et f. Maintenant, considérons l'application $\tilde{H}\colon X \times [0,2] \longrightarrow Y$ définie par

$$\tilde{H}(x,s) = \begin{cases} F_s(x) & \text{si } s \in [0,1], \\ G_{s-1}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme suivant assure que ce dernière est continue. Par conséquent, l'application

$$(x,s) \in X \times [0,1] \longmapsto \tilde{H}(x, 2s)$$

est une homotopie entre f et h. ☐

Lemme 1.5 *(concaténation d'applications continues sur des fermés).* Soient $F_1, F_2 \subset X$ deux fermés tels que $F_1 \cup F_2 = X$. Soient $f_1\colon F_1 \longrightarrow X$ et $f_2\colon F_2 \longrightarrow X$ deux applications continues coïncidant sur $F_1 \cap F_2$. Alors l'extension naturelle $f\colon X \longrightarrow Y$ est continue.

Proposition 1.6. Soient $f_1, f_2\colon X \longrightarrow Y$ deux applications homotopes et $g_1, g_2\colon Y \longrightarrow Z$ deux applications homotopes. Alors les applications $g_1 \circ f_1$ et $g_2 \circ f_2$ sont homotopes.

Preuve Soient F une homotopie entre f_1 et f_2 et G une homotopie entre g_1 et g_2. Alors l'application

$$H\colon \left| \begin{array}{l} X \times [0,1] \longrightarrow Z, \\ \quad (x,s) \longmapsto G(F(x,s), s) \end{array} \right.$$

est une homotopie entre $g_1 \circ f_1$ et $g_2 \circ f_2$. ☐

Proposition 1.7. Soit $f\colon X \longrightarrow \mathbf{S}^n$ une application continue non surjective. Alors elle est homotope à une application constante.

Preuve Soit $x_0 \in \mathbf{S}^n \setminus \operatorname{Im} f$. Notons $p\colon \mathbf{S}^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la projection stéréographique. Alors les application $p \circ f\colon X \longrightarrow \mathbf{R}^n$ et $g\colon X \longrightarrow \{0\}$ sont homotopes par l'homotopie barycentrique. D'après la proposition précédente, les applications f et $p^{-1} \circ g$ sont homotopes où cette dernière application est constante. ☐

Proposition 1.8. Soient $f, g\colon X \longrightarrow \mathbf{S}^n$ deux applications continues telles que $\operatorname{Im} f \cup \operatorname{Im} g \neq \mathbf{S}^n$. Soit $A \subset X$. Si $f|_A = g|_A$, alors $f \sim_A g$.

1.1.2 Rétraction, équivalence d'homotopie

Définition 1.9. Soit $Y \subset X$. Une application continue $r\colon X \longrightarrow Y$ est une *rétraction* si $r|_Y = \mathrm{Id}_Y$. On dit que le sous-espace Y est un *rétract* de X s'il existe une rétraction de X dans Y.

▷ Exemples. L'espace $\mathbf{R} \times \{0\}$ est un rétract de $\mathbf{R}^2$ par la rétraction

$$r\colon \left| \begin{array}{l} \quad \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \times \{0\}, \\ (x,y) \longmapsto (x,0). \end{array} \right.$$

DÉFINITION 1.10. Un sous-espace $Y \subset X$ est un *rétract par déformation* de X s'il existe une rétraction $r\colon X \longrightarrow Y$ telle que, en notant $\iota\colon Y \longrightarrow X$ l'inclusion, la composée $\iota \circ r$ soit homotope à Id_X relativement à Y, *i. e.* telle qu'il existe une homotopie $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow X$ vérifiant

$$H(x,0) = x, \quad H(x,1) = r(x) \quad \text{et} \quad H(y,s) = y$$

pour tous $x \in X$, $y \in Y$ et $s \in [0,1]$.

▷ EXEMPLES. L'espace $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation sur $\mathbf{S}^{n-1}$. En effet, l'application

$$r\colon \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^n \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{S}^{n-1}, \\ x & \longmapsto & x/\|x\| \end{array} \right.$$

est une rétraction, donc l'homotopie barycentrique donne une homotopie entre r et $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n \setminus \{0\}}$ relativement à $\mathbf{S}^{n-1}$.

DÉFINITION 1.11. Une application continue $f\colon X \longrightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue $g\colon Y \longrightarrow X$ telle que $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$ et $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$. On dit alors que l'application g est un *inverse à homotopie près* de f et que les deux espaces X et Y sont *homotopiquement équivalents* et on note $X \sim Y$.

◇ REMARQUE. Tout rétract par déformation $Y \subset X$ de X est homotopiquement équivalent à X puisqu'en notant $r\colon X \longrightarrow Y$ une rétractation et $\iota\colon Y \longrightarrow X$ l'inclusion, les définitions donnent

$$r \circ \iota = \mathrm{Id}_Y \quad \text{et} \quad \iota \circ r \sim \mathrm{Id}_X .$$

Cependant, la réciproque est fausse.

PROPOSITION 1.12. 1. Deux espaces homéomorphes sont homotopiquement équivalents.
2. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques.

Preuve Le première point est clair. Montrons le second point et, en particulier, la transitivité de la relation. Soient X, Y et Z trois espaces topologiques tels que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. Soient $f\colon X \longrightarrow Y$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ deux applications continues. On note $f'\colon Y \longrightarrow X$ et $g'\colon Z \longrightarrow Y$ leurs inverses respectifs à homotopies près. Alors la proposition 1.6 assure $(g \circ f) \circ (f' \circ g) \sim g \circ \mathrm{Id}_Y \circ g' \sim \mathrm{Id}_Z$. En procédant de même, on a $(f' \circ g') \circ (g \circ f) \sim \mathrm{Id}_X$. Cela montre $X \sim Z$. □

DÉFINITION 1.13. Un espace X est *contractile* s'il est homotopiquement équivalent à un singleton.

▷ EXEMPLE. Tout sous-ensemble convexe non vide $C \subset \mathbf{R}^n$ est contractile. En effet, pour tout point $c \in C$, l'inclusion $r\colon \{c\} \longrightarrow C$ est une rétraction et l'homotopie barycentrique donne une homotopie entre r et Id_C.

1.1.3 Connexité

On souhaite exhiber un invariant simple : il s'agit du nombre de composantes connexes d'un espace topologique.

DÉFINITION 1.14. Un espace topologique X est *connexe* si l'on ne peut pas l'écrire comme une union disjointe de deux ouverts non vides.

Un *chemin* de X entre deux points $x, y \in X$ est une application continue $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un espace topologique X est *connexe par arcs* si, pour tous $x, y \in X$, il existe un chemin entre x et y dans X.

La *composante connexe* (respectivement par arcs) d'un point $x \in X$ est le plus grand sous-ensemble convexe (respectivement par arcs) de X contenant x

◇ REMARQUES. – L'union de deux espaces connexes non disjoints est connexe.
– La connexité par arcs implique la connexité. Cependant, la réciproque est fausse : on pensera à l'adhérence du graphe de la fonction $x > 0 \longmapsto \sin(1/x)$.
– L'adhérence d'un connexe est connexe

THÉORÈME 1.15. Les espaces $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Preuve Il suffit de remarquer que, privés d'un point, ces deux espaces sont respectivement non connexe et connexe. $\square$

THÉORÈME 1.16. Soient X et Y deux espaces topologiques homotopiquement équivalents. Si X est connexe (respectivement par arcs), alors Y l'est aussi.

Preuve Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une équivalence d'homotopie. Pour $C \subset X$, on note $f_*(C) \subset Y$ la composante connexe de $f(C)$. Alors l'application f_* fournit une bijection entre les composantes connexes de X et celles de Y. $\square$

1.2 Groupe fondamental

1.2.1 Définitions

On fixe un espace topologique X.

DÉFINITION 1.17. La *concaténation* de deux chemins $\gamma, \gamma'\colon I \longrightarrow X$ tels que $\gamma(1) = \gamma'(0)$ est le chemin $\delta\colon [0,1] \longrightarrow X$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leqslant 1/2, \\ \gamma'(2t-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On le note $\gamma \cdot \gamma'$.

DÉFINITION 1.18. Deux chemins $\gamma, \gamma'\colon I \longrightarrow X$ ayant les mêmes extrémités sont *homotopes à extrémités fixées* si les deux applications sont homotopes relativement à $\{0,1\}$. On note alors $\gamma \sim \gamma'$ et $[\gamma]$ la classe d'homotopie à extrémités fixées de γ.

DÉFINITION 1.19. Une *reparamétrisation* d'un chemin $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ est un chemin $\gamma'\colon [0,1] \longrightarrow X$ de la forme $\gamma' = \gamma \circ f$ pour une fonction continue $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

LEMME 1.20. Toute reparamétrisation d'un chemin est homotope à extrémités fixées à ce chemin.

Preuve En adoptant les notations précédente, il suffit de considérer l'homotopie H définie par

$$H_s(t) = \gamma(st + (1-s)f(t)), \quad s,t \in [0,1].$$ $\square$

LEMME 1.21. 1. Soient $\gamma, \gamma', \eta, \eta'\colon I \longrightarrow X$ quatre chemins. Si $\gamma \sim \gamma'$ et $\eta \sim \eta'$, alors $\gamma \cdot \eta \sim \gamma' \cdot \eta'$.
2. La concaténation est associative modulo l'homotopie à extrémités fixées.

DÉFINITION 1.22. Un *lacet* basé en un point quelconque $x \in X$ est un chemin $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ tels que $x = \gamma(0) = \gamma(1)$. On note $\gamma_x\colon t \in [0,1] \longmapsto x \in X$ le lacet constant égal à x. Un lacet est *nullhomotope* s'il est homotopiquement équivalent à un lacet constant.

NOTATION. Pour $x \in X$, on note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble des classes $[\gamma]$ pour des chemins γ issus de x

THÉORÈME 1.23. Soit $x \in X$. Alors la concaténation $[\gamma] \cdot [\eta] = [\gamma \cdot \eta]$, qui est bien définie par le lemme précédent, muni l'ensemble $\pi_1(X,x)$ d'une structure de groupe. Ainsi l'élément neutre est la classe $[\gamma_x]$ et l'inverse d'un élément $[\gamma]$ est la classe du lacet $\overline{\gamma}\colon t \longmapsto \gamma(1-t)$. Ce groupe est appelé le *groupe fondamental* de X basé en x.

Preuve Il suffit de considérer les bonnes homotopies. $\square$

PROPOSITION 1.24. Soient $x_0, x_1 \in X$ et $\eta\colon [0,1] \longrightarrow X$ un chemin reliant x_0 à x_1. Alors l'application $\gamma \longmapsto (\overline{\eta} \cdot \gamma) \cdot \eta$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{ad}_\eta \colon \left| \begin{array}{rcl} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1), \\ [\gamma] & \longmapsto & [\overline{\eta} \cdot \gamma \cdot \eta]. \end{array} \right.$$

Preuve Il est facile de voir que cette application est un morphisme de groupes. De plus, il s'agit bien d'un isomorphisme d'inverse $[\gamma] \longrightarrow [\eta \cdot \gamma \cdot \overline{\eta}]$. □

◇ REMARQUE. Cet isomorphisme n'est pas canonique.

1.2.2 Simple connexité

DÉFINITION 1.25. Un espace topologique X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et vérifie $\pi_1(X, x) = \{1\}$ pour un point $x \in X$.

▷ EXEMPLE. Tout convexe de $\mathbf{R}^n$ est simplement connexe puisque tout lacet est homotope à un lacet constant en utilisant l'homotopie barycentrique.

PROPOSITION 1.26. Un espace topologique X est simplement connexe si et seulement si, pour tous points $x, y \in X$, il existe un chemin joignant x à y et ce dernier est unique à homotopie à extrémités fixées près.

Preuve Le sens réciproque est clair. Directement, on suppose que l'espace X est simplement connexe. Soient $x, y \in X$. Alors il existe un chemin $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow X$ joignant x à y. Soit $\gamma' \colon [0,1] \longrightarrow X$ un autre tel chemin. Alors $\gamma \cdot \overline{\gamma'} \sim \gamma_x$. Soit $F \colon [0,1] \longrightarrow X$ une homotopie à extrémités fixées pour cette dernière relation. On note $c \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ une paramétrisation des trois côtés supérieurs du carré. Pour tout $\theta, t \in [0,1]$, on pose

$$G_\theta(t) \coloneqq G(tm + (1-t)c(\theta)) \quad \text{avec} \quad m \coloneqq (1/2, 0) \in [0,1]^2.$$

On vérifie que l'application G est une homotopie entre γ et γ'. Pour tout $\theta \in [0,1]$, on a $G_\theta(0) = x$ et $G_\theta(1) = y$. D'où $\gamma \sim \gamma'$. Le groupe fondamental est donc trivial et cela termine la preuve. □

◇ REMARQUE. On peut trouver une bijection entre l'ensemble des lacets basés en x et l'ensemble des applications continues $\mathbf{S}^1 \longrightarrow X$ envoyant $1 \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$ sur x. En effet, on a un homéomorphisme

$$\left| \begin{array}{rcl} [0,1]/{\sim} & \longrightarrow & \mathbf{S}^1, \\ [t] & \longmapsto & e^{2i\pi t}. \end{array} \right.$$

PROPOSITION 1.27. Soient $x \in X$, γ un lacet basé en x et $\hat{\gamma} \colon \mathbf{S}^1 \longrightarrow X$ l'application associée. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) on a $[\gamma] = 1$;

(ii) l'application $\hat{\gamma}$ est homotopiquement équivalente relativement à la partie $\{1\}$ à une application constante $\mathbf{S}^1 \longrightarrow X$;

(iii) elle est homotopiquement équivalent à une application constante $\mathbf{S}^1 \longrightarrow X$;

(iv) elle se prolonge en une application $\mathbf{B}^2 \longrightarrow X$.

THÉORÈME 1.28. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Alors la sphère $\mathbf{S}^n$ est simplement connexe.

Preuve La sphère $\mathbf{S}^n$ est clairement connexe par arcs. Soit $s \in \mathbf{S}^n$. Montrons que son groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{S}^n, s)$ est trivial. Soit $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{S}^n$ un lacet basé en s.

On suppose que ce dernier évite un point. En utilisant la projection stéréographique, on peut alors considérer que c'est un lacet de $\mathbf{R}^n$, donc $[\gamma] = 1$ puisque l'espace $\mathbf{R}^n$ est simplement connexe.

Revenons au cas général et montrer que ce lacet est homotope à extrémités fixées à un chemin non surjectif ce qui nous ramènera au cas précédent. Comme la sphère $\mathbf{S}^n$ est compacte, l'application continue γ y est uniformément continue, c'est-à-dire qu'il existe un entier $N \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |x - y| < 1/N \quad \Longrightarrow \quad \|\gamma(x) - \gamma(y)\| \leqslant 1/2.$$

Décomposons le segment $[0,1]$ en N segments $[t_i, t_{i+1}]$ avec $i \in [\![1, N-1]\!]$ de longueur $1/N$. D'après l'uniforme continuité précédente, les images $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ sont de diamètres égaux ou inférieurs à $1/2$. Pour $i \in [\![1, N-1]\!]$, on note $N_i \in \mathbf{S}^n$ le point antipodal au point $\gamma(t_i)$ et on considère le plus court chemin $\gamma'_i \colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{S}^n$ joignant les points $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ [§1]. Avec ces définitions, remarquons que, pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, le point N_i n'appartient pas à l'image $\operatorname{Im} \gamma'_i$ puisque

$$\operatorname{diam} \operatorname{Im} \gamma'_i \leqslant \operatorname{diam} \gamma([t_i, t_{i+1}]) \leqslant 1/2 < 1.$$

De plus, pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, les chemins γ'_i et $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sont homotopes à extrémités fixées. On considère alors la concaténation $\gamma' := \gamma'_1 \cdots \gamma'_{N-1}$ qui est homotope à extrémités fixées au chemin γ. Or cette dernière ne sont pas de voisinage dans $\mathbf{S}^n$ de n'importe quel de ses points (car c'est une concaténation d'arcs) et, en particulier, elle n'est pas surjectif. On est ramené au cas précédent et cela termine notre preuve. $\square$

1.2.3 Fonctionnalité

DÉFINITION 1.29. Soit $x \in X$. À toute application continue $f \colon X \longrightarrow Y$, on associe l'application

$$f_* \colon \left| \begin{array}{rcl} \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, f(x)), \\ [\gamma] & \longmapsto & [f \circ \gamma]. \end{array} \right.$$

PROPOSITION 1.30. Soient W, X et Y trois espaces topologiques.

1. Pour toutes applications continues $g \colon W \longrightarrow X$ et $f \colon X \longrightarrow Y$, on a $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
2. On a $(\operatorname{Id}_X)_* = \operatorname{Id}_{\pi_1(X,x)}$.

COROLLAIRE 1.31. Pour tout homéomorphisme $f \colon X \longrightarrow Y$, l'application f_* est un homéomorphisme de réciproque $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

PROPOSITION 1.32. Soit C la composante connexe du point x dans X. L'injection $i \colon C \longrightarrow X$ induit un homéomorphisme $i_* \colon \pi_1(C,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)$.

Preuve On peut voir un lacet de base x dans X comme un lacet de base x dans C puisque la partie C est connexe par arcs. Ceci montre que l'application i_* est surjective. $\square$

LEMME 1.33. Soient $f, g \colon X \longrightarrow Y$ des applications continues homotopes par une homotopie H. Soit $x \in X$. On pose

$$\eta \colon s \in [0,1] \longmapsto H_s(x).$$

Alors $g_* = \operatorname{ad}_\eta \circ f_*$.

Preuve Soit γ un lacet de base x dans X. On définit l'application $G \colon [0,1]^2 \longrightarrow X$ par

$$G(t,s) = \begin{cases} H(\gamma(0), 1-2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(1-s), \\ H(\gamma(\frac{4t+2s-2}{3s+1}), s) & \text{si } \frac{1}{2}(1-s) \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}(s+3), \\ H(\gamma(1), 4t-3) = \eta(4t-3) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on peut vérifier que cette application est une homotopie entre les lacets $\overline{\eta}(f \circ \gamma)\eta$ et $g \circ \gamma$ de base $g(x)$ dans Y. On obtient alors $\operatorname{ad}_\eta f_*[\gamma] = g_*[\gamma]$. $\square$

THÉORÈME 1.34. Soit $f \colon X \longrightarrow Y$ une équivalence d'homotopie. Alors le morphisme

$$f_* \colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$$

est bijectif.

§1. Le plus court chemin de $\mathbf{S}^n$ entre deux points $x \in \mathbf{S}^n$ et $y \in \mathbf{S}^n$ non antipodaux est l'application

$$t \in [0,1] \longmapsto \frac{tx + (1-t)y}{\|tx + (1-t)y\|} \in \mathbf{S}^n.$$

Preuve Soit $g\colon Y \longrightarrow X$ une inverse de f à homotopie près. Alors $g\circ f \sim \mathrm{Id}_X$, donc il existe un chemin η joignant les points $g(f(x))$ et x dans X. Alors $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{ad}_\eta \circ (g\circ f)_*$, donc $\mathrm{ad}_{\overline{\eta}} = (g\circ f)_*$ est bijectif puisque $\mathrm{ad}_\eta^{-1} = \mathrm{ad}_{\overline{\eta}}$, donc g_* est surjectif et f_* est injectif. De même, comme $f\circ g \sim \mathrm{Id}_Y$, le morphisme f_* est surjectif. $\square$

1.2.4 Le groupe fondamental du cercle

On considère l'application

$$p\colon \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{S}^1, \\ t & \longmapsto & \exp(2i\pi t). \end{array}\right.$$

Pour tout $n\in \mathbf{Z}$, on introduit le lacet de base 1 dans $\mathbf{S}^1$

$$\gamma_n\colon \left|\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{S}^1, \\ t & \longmapsto & p(nt). \end{array}\right.$$

Théorème 1.35. L'application

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{S}^1, 1), \\ n & \longmapsto & [\gamma_n] \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de groupes.

Afin de montrer ce théorème, nous avons besoin de développer quelques résultats préliminaires.

Lemme 1.36 *(relèvement).* Soit $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{S}^1$ un lacet de base $z_0 \coloneqq 1 \in \mathbf{C}$ dans $\mathbf{S}^1$. Alors il existe un unique chemin $\tilde\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ tel que $\tilde\gamma(0) = 0$ et $p\circ\tilde\gamma = \gamma$.

Preuve • *Unicité.* Soit $\tilde\gamma\colon [0,1]\longrightarrow \mathbf{R}$ un tel chemin. Soit $a\in\mathbf{R}$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}]a-1/2, a+1/2[\arrow[r, "p"] & \mathbf{S}^1 \setminus \{-p(a)\} \\ \tilde\gamma^{-1}(]a-1/2, a+1/2[) \arrow[u, "\tilde\gamma"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

commute ce qui assure l'unicité.

• *Existence.* Considérons la bijection réciproque $q\colon \mathbf{S}^1\setminus\{-1\} \longrightarrow]-1/2, 1/2[$ de la restriction bijective $p|_{]-1/2,1/2[}$. Comme le segment $[0,1]$ est compact, l'application q est uniformément continue. En particulier, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que

$$\forall t,s\in[0,1], \quad |t-s| \leqslant 1/n \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(t)-\gamma(s)| < 1.$$

Alors dès que $|t-s|\leqslant 1/n$, on a $\gamma(t)\overline{\gamma(s)} \neq -1$ puisque

$$|\gamma(t)\overline{\gamma(s)} - 1| = |(\gamma(t)-\gamma(s))\overline{\gamma(s)}| < |\overline{\gamma(s)}| = 1.$$

On considère l'application $\tilde\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie comme suivant : pour tout $t\in[0,1]$, il existe un unique entier $j \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $j/n \leqslant t \leqslant (j+1)/n$ et on pose

$$\tilde\gamma(t) \coloneqq q(\gamma(t)\overline{\gamma(j/n)}) + \sum_{i=1}^{j} q(\gamma(i/n)\overline{\gamma((i-1)/n)})$$

où la somme est nulle dans le cas $j=0$. Cette application $\tilde\gamma$ est bien définie et continue. De plus, elle vérifie $\tilde\gamma(0) = q(1) = 0$. Enfin, soit $t\in[0,1]$. On note $j\in[\![0,n-1]\!]$ un entier défini comme précédemment. On obtient alors

$$\begin{aligned} p\circ\tilde\gamma(t) &= \gamma(t)\overline{\gamma(j/n)} \prod_{i=1}^{j} \gamma(i/n)\overline{\gamma((i-1)/n)} \\ &= \gamma(t)\overline{\gamma(j/n)}\gamma(j/n) = \gamma(t). \end{aligned}$$

$\square$

Définition 1.37. Avec les notations précédentes, la quantité $\deg \gamma := \tilde{\gamma}(1) \in \mathbf{Z}$ est appelée le *degré* du lacet γ.

Lemme 1.38. Soit $H\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{S}^1$ une application continue telle que $H(0,0) = z_0$. Alors il existe une unique application continue $\tilde{H}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $\tilde{H}(0,0) = 0$ et $p \circ \tilde{H} = H$.

Preuve On peut adapter la preuve du lemme précédent. ☐

Définition 1.39. En reprenant les mêmes notations, les applications $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{H}$ sont appelés les *relèvements* respectifs des applications γ et H.

▷ Exemple. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le relèvement du chemin γ_n est le chemin $\tilde{\gamma}_n\colon t \longmapsto nt$, son degré vaut donc n.

Proposition 1.40. Soient $\gamma, \gamma'\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{S}^1$ deux lacets de base 1. Alors

$$\gamma \sim \gamma' \quad \Longleftrightarrow \quad \deg \gamma = \deg \gamma'.$$

Preuve $\Leftarrow$ On suppose que ces deux lacets ont le même degré. Alors leurs relèvements possèdent les mêmes extrémités, donc ils sont homotopes à extrémités fixées par l'homotopie barycentrique. En composant par l'application p, on obtient $\gamma \sim \gamma'$.

$\Rightarrow$ Réciproquement, on suppose $\gamma \sim \gamma'$. Soit $H\colon [0,1]^2 \longrightarrow \mathbf{S}^1$ une homotopie entre γ et γ'. Soit $s \in [0,1]$. Alors le chemin $\ell_s := H(\cdot, s)$ vérifie

$$\forall t \in [0,1], \quad p \circ \tilde{H}(t,s) = H(t,s) = \ell_s(t) = p \circ \tilde{\ell}_s(t).$$

En utilisant l'unicité du relèvement, on obtient $\tilde{H}(\cdot, s) = \tilde{\ell}_s$, donc $\tilde{H}(1,s) = \deg \ell_s \in \mathbf{Z}$. Ainsi l'application continue $\tilde{H}(1,\cdot)$ est à valeurs entières, donc elle est constante.

Par ailleurs, pour tout $t \in [0,1]$, on a $p \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) = H(t,0) = p \circ \tilde{H}(t,0)$. En utilisant également l'unicité, on trouve $\tilde{\gamma} = \tilde{H}(\cdot,0)$. De même, on obtient $\tilde{\gamma}' = \tilde{H}(\cdot,1)$. Avec le paragraphe précédent, on peut alors en déduire $\gamma'(1) = \tilde{H}(1,0) = \tilde{H}(1,1) = \tilde{\gamma}'(1)$, c'est-à-dire $\deg \gamma = \deg \gamma'$. ☐

Proposition 1.41. Soient $\gamma, \gamma'\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{S}^1$ deux lacets de base 1. Alors

$$\deg \gamma \cdot \gamma' = \deg \gamma + \deg \gamma'.$$

Preuve L'application continue $a\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$a(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \tilde{\gamma}'(2t-1) + \tilde{\gamma}(1) & \text{sinon} \end{cases}$$

est un relèvement de la concaténation $\gamma \cdot \gamma'$. Comme elle vérifie $a(1) = \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\gamma}'(1)$, l'égalité recherchée est montrée. ☐

Preuve du théorème 1.35 D'après la proposition 1.40, l'application $\deg\colon \pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \longrightarrow \mathbf{Z}$ est bien définie et, d'après la proposition 1.41, il s'agit d'un morphisme de groupe. Par ailleurs, il est surjectif puisque $\deg \gamma_n = n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et il est injectif d'après la proposition 1.41. Il s'agit donc bien de l'inverse de l'application donnée par le théorème. ☐

Définition 1.42. Le *tore* de dimension $n \geqslant 1$ est l'ensemble $\mathbf{T}^n := (\mathbf{S}^1)^n$

Proposition 1.43. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. On note $p_1\colon X \times Y \longrightarrow X$ et $p_2\colon X \times Y \longrightarrow X$ les projections sur les premières et secondes composantes. Alors l'application

$$((p_1)_*, (p_2)_*)\colon \pi_1(X \times Y, (x,y)) \longrightarrow \pi_1(X,x) \times \pi_1(X,y)$$

est une bijection.

Preuve Montrons que cette application est surjective. Soient $\gamma_1\colon [0,1] \longrightarrow X$ un lacet de base x et $\gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow Y$ un lacet de base y. Cette application envoie la classe du chemin $t \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ sur le couple de classes $([\gamma_1], [\gamma_2])$.

Montrons qu'elle est injective. Comme c'est un morphisme de groupes, il suffit de montrer que son noyau est trivial. Soit $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X \times Y$ un lacet de base (x,y) tel que $((p_1)_*[\gamma], (p_2)_*[\gamma]) = 1$.

Alors $p_1 \circ \gamma \sim \gamma_x$ et $p_2 \circ \gamma \sim \gamma_y$. On note $H^1 \colon [0,1] \longrightarrow X$ et $H^2 \colon [0,1] \longrightarrow Y$ des homotopies associées respectivement à ces deux relations. Alors l'application $((x', y'), s) \longmapsto (H^1_s(x'), H^2_s(y'))$ est une homotopie entre les chemins $(p_1 \circ \gamma, p_2 \circ \gamma)$ et (γ_x, γ_y), donc $([p_1 \circ \gamma], [p_2 \circ \gamma]) = 1$. $\square$

COROLLAIRE 1.44. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors les groupes $\pi_1(\mathbf{T}^n, (1, \dots, 1))$ et $\mathbf{Z}^n$ sont isomorphes.

Preuve On procède par récurrence en utilisant le proposition 1.43 et le théorème 1.35. $\square$

COROLLAIRE 1.45. Soit $n \neq 2$ un entier. Alors les espaces $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$ ne sont pas homéomorphes.

Preuve Le cas $n = 1$ a déjà été traité dans le théorème 1.15. Supposons $n > 2$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'ils sont homéomorphes. Alors privés d'un point chacun, ils sont homéomorphes. Or le plan $\mathbf{R}^2$ privé d'un point est homotopiquement équivalent au cercle $\mathbf{S}^1$ et l'espace $\mathbf{R}^n$ privé d'un point l'est à la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$. Alors $\mathbf{S}^1 \sim \mathbf{S}^{n-1}$. Notons $f \colon \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ une équivalence d'homotopie. Grâce au théorème 1.34, les groupes $\pi_1(\mathbf{S}^1, 1) \cong \mathbf{Z}$ et $\pi_1(\mathbf{S}^{n-1}, f(1))$ sont donc isomorphes. Comme la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$ est simplement connexe (théorème 1.28), son groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{S}^{n-1}, f(1))$ est trivial ce qui est absurde. D'où le résultat. $\square$

COROLLAIRE 1.46. La sphère $\mathbf{S}^1$ n'est pas un rétract de $\mathbf{B}^2$.

1.2.5 Applications

THÉORÈME 1.47 *(Brouwer)*. Toute application continue de la boule $\mathbf{B}^2$ dans elle-même admet un point fixe.

Preuve Soit $\Delta \coloneqq \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$ la diagonale de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. Considérons l'application l'application $F \colon A \coloneqq (\mathbf{B}^2 \times \mathbf{B}^2) \setminus \Delta \longrightarrow \mathbf{S}^1$ qui associe à tout point $(x,y) \in A$ l'unique point d'intersection entre la demi droite $[x,y)$ et la sphère $\mathbf{S}^1$. Pour tout point $(x,y) \in A$, l'image $F(x,y)$ s'écrit sous la forme $F(x,y) = x + t_0(x-y)$ pour une racine $t_0 \in \mathbf{R}$ du polynôme du second degré $\|x + (x-y)X\|^2 - 1 \in \mathbf{R}[X]$. La fonction F est alors continue car les racines des polynômes dépendent continûment de leurs coefficients.

Soit $f \colon \mathbf{B}^2 \longrightarrow \mathbf{B}^2$ une application continue sans point fixe. Alors $(f(x), x) \notin \Delta$ pour $x \in \mathbf{B}^2$ et l'application $x \in \mathbf{B}^2 \longmapsto F(f(x), x) \in \mathbf{S}^1$ est une rétraction ce qui rentre en contradiction avec le corollaire 1.46. $\square$

1.3 Théorème de Van Kampen

1.3.1 Groupes libres

DÉFINITION 1.48. Soient F un groupe et $S \subset F$. Le groupe F est dit libre de base S si, pour tout groupe G et toute application $f \colon S \longrightarrow G$, il existe un unique morphisme $\hat{f} \colon F \longrightarrow G$ étendant G.

▷ EXEMPLE. Le groupe $\mathbf{Z}$ est libre de base $\{1\}$.

LEMME 1.49. Soient F un groupe et S une base de F. Alors $F = \langle S \rangle$.

Preuve On considère le groupe $F' \coloneqq \langle S \rangle$. Alors l'inclusion $S \longrightarrow F'$ s'étend en un unique morphisme $f' \colon F \longrightarrow F'$ qui est de surcroît surjective. Notons $i \colon F' \longrightarrow F$ l'inclusion. Les deux morphismes $i \circ f'$ et Id_F étendent l'inclusion $S \longrightarrow F$, donc $i \circ f' = \mathrm{Id}_F$, donc $F' = \mathrm{Im}(i \circ f') = F$. $\square$

LEMME 1.50. Soient F_1 et F_2 deux groupes libres et S_1 et S_2 deux bases de F_1 et F_2. Alors S_1 et S_2 ont le même cardinal si et seulement si les groupes F_1 et F_2 sont isomorphes.

Preuve Montrons uniquement le sens direct. On suppose qu'il existe deux bijections $f \colon S_1 \longrightarrow S_2$ et $g \colon S_1 \longrightarrow S_2$ inverses l'une de l'autre. Alors $\hat{g} \circ \hat{f}$ et Id_{F_1} étendent l'inclusion $S_1 \longrightarrow F_1$, donc l'unicité donne $\hat{g} \circ \hat{f} = \mathrm{Id}_{F_1}$. Par symétrie, le morphisme $\hat{f} \colon F_1 \longrightarrow F_2$ est une bijection. $\square$

DÉFINITION 1.51. Soit $S \coloneqq \{s_i\}_{i\in I}$ un ensemble et $S^{-1} \coloneqq \{s_i^{-1}\}_{i\in I}$ un ensemble d'inverses formels. Un *mot* sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$ est une suite finie de $S \cup S^{-1}$, *i. e.* un élément

THÉORÈME 1.52. Soit S un ensemble. Alors il existe un unique groupe libre $F(S)$ de base S à isomorphisme près.

Preuve L'unicité est assurée par le lemme précédent. Montrons l'existence. Soit S^{-1} un ensemble de même cardinal que S. Si un mot contient un élément de la forme ss^{-1} ou $s^{-1}s$ avec $s \in S$ et $s^{-1} \in s^{-1}$, on peut le simplifier et réciproquement. Cela donne une classe d'équivalence sur l'ensemble des mots. On note $F(S)$ le quotient associé. L'élément neutre $[()]$ sera noté 1. La concaténation des mots passe au quotient et de même pour l'inversion. Cela donne une structure de groupe à l'ensemble $F(S)$.

Montrons qu'il admet pour base S. Soit G un groupe et $f\colon S \longrightarrow G$ une application. Pour tout élément $s \in S$, on pose $g_s \coloneqq f(s)$. On définit alors l'application $\hat{f}\colon F(S) \longrightarrow G$ par la relation

$$\hat{f}(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}) = g_{s_1}^{\varepsilon_1} \cdots g_{s_n}^{\varepsilon_n}$$

pour tous éléments $s_1, \dots, s_n \in S$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$. Cette application est bien définie ce qui conclut. □

COROLLAIRE 1.53. Le groupe $F(S)$ est en bijection avec l'ensemble Réd des mots réduits sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$, la loi de groupe sur ce dernier ensemble est la concaténation (tout en en simplifiant).

Preuve Chaque classe contient un mot réduit. Réciproquement, montrons que chaque mot réduit est inclus dans une unique classe. On considère l'application $\varphi\colon s \in S \longrightarrow \varphi_s \in \mathrm{Aut}(\text{Réd})$ définie par la relation

$$\varphi_s(w) \coloneqq \begin{cases} sw & \text{si } sw \text{ est réduit, } i.\ e.\ w \neq s^{-1}, \\ w' & \text{si } w = s^{-1}w'. \end{cases}$$

pour tous éléments $s \in S$ et $w \in$ Réd. C'est une bijection. Comme F est libre, cette dernière induit une morphisme $\hat{\varphi}\colon F \longrightarrow \mathrm{Aut}(\text{Réd})$. Soient $w, w \in$ Réd deux mots réduits distincts. Il faut montrer que $[w] \neq [w']$ dans F. Alors $\hat{\varphi}_{[w]}(1) = w \neq w' = \hat{\varphi}_{[w']}(1)$, donc $\hat{\varphi}_{[w']} \neq \hat{\varphi}_{[w']}$, donc $[w] \neq [w']$. □

1.3.2 Produit libre de groupes

PROPOSITION 1.54. Soient A et B deux groupes. Alors il existe un unique groupe G à isomorphismes près et deux morphismes $i_A\colon A \longrightarrow G$ et $i_B\colon B \longrightarrow G$ vérifiant la propriété universelle suivante :

> *pour tout groupes H et tout morphismes $f_A\colon A \longrightarrow H$ et $f_B\colon B \longrightarrow H$, il existe un unique morphisme $f\colon G \longrightarrow H$ tel que $f \circ i_A = f_A$ et $f \circ i_B = f_B$.*

Preuve Il suffit de prendre l'ensemble G des mots réduits sur l'alphabet $A \cup B$ et du mot neutre, noté 1_G. On le munit de la concaténation. On note $i_A\colon A \longrightarrow G$ l'inclusion naturelle, *i. e.* à une lettre $a \in A$ est associé le mot $a \in G$ de longueur 1. C'est un morphisme. On obtient identiquement un morphisme $i_B\colon B \longrightarrow G$.

On peut alors montrer qu'il vérifie la propriétés universelles. À partir d'un groupe H et de deux morphismes $f_A\colon A \longrightarrow H$ et $f_B\colon B \longrightarrow H$, on définit le morphisme $f\colon G \longrightarrow H$ par la relation

$$f(a_1b_1 \cdots a_nb_n) \coloneqq f_A(a_1)f_B(b_1) \cdots f_A(a_n)f_B(b_n)$$

pour tous éléments $a_1, \dots, a_n \in A$ et $b_1, \dots, b_n \in A$. Il est bien définie et vérifie les conditions demandées. Enfin, ce morphisme f est unique : on l'évalue sur des lettres pour s'en convaincre.

Enfin, montrons l'unicité à isomorphisme près du groupe G. Soit G' un autre groupe associés à deux morphismes $i'_A\colon A \longrightarrow G'$ et $i'_B\colon B \longrightarrow G'$. Alors on applique la propriété universelle vérifiée par G avec $f_A = i'_A$ et $f_B = i'_B$ afin d'obtenir une morphisme $f\colon G \longrightarrow G'$ qui va même être un isomorphisme (son inverse étant donnée par la propriété universelle vérifiée par G'). □

DÉFINITION 1.55. Le groupe G est le produit libre des groupes A et B, noté $A * B$.

◇ REMARQUE. En itérant, on peut définir le produit libre $*_{i\in I}G_i$ d'une famille $(G_i)_{i\in I}$ de groupes.

1.3.3 Présentation d'un groupe

NOTATION. Soit G un groupe. On note $\langle\langle r_1, \dots, r_k \rangle\rangle \subset G$ le sous-groupe distingué engendré par des éléments $r_1, \dots, r_k \in G$.

DÉFINITION 1.56. Soit $S \coloneqq \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble fini et $r_1, \dots, r_k$ des mots sur $S \cup S^{-1}$. Le groupe définie par la présentation est le groupe quotient

$$G \coloneqq F(S)/\langle\langle r_1, \dots, r_k \rangle\rangle.$$

On le note $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$.

NOTATION. Pour un mot r sur $S \cup S^{-1}$ et des éléments $h_1, \dots, h_n \in H$ d'un groupe H, on notera $r(h_1, \dots, h_n) \in H$ l'élément de H où l'on a remplacé toutes les lettres s_i par les éléments h_i dans l'expression du mot r.

PROPOSITION 1.57 *(propriété universelle)*. Soient H un groupe et $h_1, \dots, h_n \in H$ des éléments tels que $r_i(h_1, \dots, h_n) = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors il existe une unique morphisme $G \longrightarrow H$ envoyant les éléments s_i sur les éléments h_i.

Preuve On considère l'application $f \colon S \longrightarrow H$ tel que $f(s_i) = h_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Elle induit un morphisme $\hat{f} \colon F(S) \longrightarrow H$. Comme $r_i \in \operatorname{Ker} \hat{f}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, ce dernier morphisme se factorise dans le quotient G et on obtient un morphisme $G \longrightarrow H$ vérifiant les bonnes conditions. Comme les éléments s_i engendrent G, ce morphisme est unique. □

▷ EXEMPLE. On a $\langle s, t \mid sts^{-1}t^{-1} \rangle \simeq \mathbf{Z}^2$.

1.3.4 Le théorème de Van Kampen

Soient X un espace connexe par arcs et $X_1, X_2 \subset X$ deux sous-espaces ouvertes et connexes par arcs tels que $X = X_1 \cup X_2$ et l'intersection $X_1 \cap X_2$ soit connexe par arcs. Soit $x \in X_1 \cap X_2$ un point. Pour $k \in \{1, 2\}$, on considère l'inclusion $j_k \colon \pi_1(X_k, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$. On considère alors l'application

$$\varphi \colon \pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x) \longrightarrow \pi_1(X, x).$$

Les applications

$$i_k \colon \pi_1(X_1 \cap X_2, x) \longrightarrow \pi_1(X_k, x) \longrightarrow \pi_1(X_1, x) * \pi_2(X_2, x), \quad k = 1, 2$$

sont dans le noyau $\operatorname{Ker} \varphi$.

THÉORÈME 1.58 *(Van Kampen)*. Le morphisme φ est surjectif et

$$\operatorname{Ker} \varphi = \langle\langle i_1[\gamma] \cdot i_2[\gamma]^{-1} \mid [\gamma] \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x) \rangle\rangle.$$

COROLLAIRE 1.59. On suppose qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \pi_1(X_1, x) &\cong \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle, \\ \pi_1(X_1, x) &\cong \langle s'_1, \dots, s'_m \mid r'_1, \dots, r'_\ell \rangle, \\ \pi_1(X_1 \cap X_2, x) &= \langle c_1, \dots, c_p \rangle. \end{aligned}$$

Alors

$$\pi_1(X, x) \cong \langle s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_m \mid r_1, \dots, r_k, r'_1, \dots, r'_\ell, i_1(c_1)i_2(c_1)^{-1}, \dots, i_1(c_p)i_2(c_p)^{-1} \rangle.$$

LEMME 1.60. Soit K un espace métrique compact. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, on ait $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset U_i$ pour un certain indice $i \in I$. En particulier, si deux points $x, x' \in K$ vérifient $d(x, x') \leqslant \varepsilon$, alors ils sont dans le même ouvert U_i.

Preuve Pour tout point $x \in X$, il existe $\varepsilon_x > 0$ et $i \in I$ tels que $\mathrm{B}(x, \varepsilon_x) \subset U_i$. Comme K est compact, on peut trouver des points $x_1, \dots, x_n$ tels que $\mathrm{B}(x_1, \varepsilon_{x_1}/2) \cup \dots \cup \mathrm{B}(x_n, \varepsilon_{x_n}/2) \supset K$. Il suffit de prendre $\varepsilon \coloneqq \min(\varepsilon_{x_1}/2, \dots, \varepsilon_{x_n}/2)$. □

Preuve Montrons la surjectivité. Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$. D'après le lemme appliqué à $K := [0,1] = \gamma^{-1}(X_1) \cup \gamma^{-1}(X_2)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|t - t'| \leqslant \varepsilon$, alors il existe $k \in \{1\}2$ tel que $\gamma(t), \gamma(t') \in X_k$. De plus, on découpe $[0,1]$ en N-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ avec $i \in [\![1, N]\!]$ et on trouve un entier $k_i \in \{1,2\}$ tel que $\gamma(I_i) \subset X_{k_i}$. Soit $\gamma_i := \gamma|_{I_i}$ et $\gamma := \gamma_1 \cdots \gamma_n$. Soit δ_i un chemin reliant x à $\gamma(t_i)$. Alors $\gamma \sim \gamma_1 \overline{\delta}_1 \cdot \delta_1 \gamma_2 \overline{\delta}_2 \cdots \delta_{N-1} \gamma_N$. Alors $[\gamma] = [\gamma_1 \overline{\delta}_1] \cdots [\delta_{N-1}\gamma_N] \in \pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x)$ est une préimage de $[\gamma]$ par φ. Ceci montrer la surjectivité.

Notons $N := \langle\!\langle i_1[\gamma] \cdot i_2[\gamma]^{-1} \mid [\gamma] \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x) \rangle\!\rangle$. On a déjà vu $N \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que l'application induite

$$\varphi_N \colon (\pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x))/N \longrightarrow \pi_1(X_1, x)$$

est injective.

Une *factorisation* d'un élément $[f] \in \pi_1(X, x)$ est un produit $[f_1] \cdots [f_k] \in \pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x)$ où les lacets f_i sont basés en x dans un espace X_i et $f \sim f_1 \cdots f_k$. Autrement dit, une factorisation est un mot, réduit ou pas, dans $\pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x)$ qui est envoyé sur $[f]$ par φ. Deux factorisations sont *équivalentes* si elles sont reliées par un nombre fini d'opérations suivantes :

- remplacer deux termes $[f_i][f_{i+1}]$ par $[f_i \cdot f_{i+1}]$;
- considérer $[f_i) \in \pi_1(X_i)$ dans $\pi_1(X_j)$.

La première opération ne change par l'élément de $\pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x)$. La seconde ne change pas son image dans le quotient $(\pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x))/N$. Alors dire que l'application φ_N est injective signifie exactement que deux factorisations d'un même élément sont toujours équivalentes.

Soient $[f_1] \cdots [f_k]$ et $[f'_1] \cdots [f'_\ell]$ deux factorisation d'un élément $[f]$. Alors il existe une homotopie $H \colon [0,1]^2 \longrightarrow X$ entre $f_1 \cdots f_k$ et $f_1 \cdots f'_\ell$. D'après le lemme, il existe des réels $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ et $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ de sorte que les rectangles $R_{i,j} := [t_i, t_{i+1}] \times [s_i, s_{i+1}]$ soient envoyées dans X_1 ou X_2 par H. On peut supposer que les réels t_i contiennent les points de subdivision de $f_1 \cdots f_k$ et ceux de $f'_1 \ldots f'_\ell$. Numérotons les rectangles de gauche à droite et de bas en haut : on obtient les rectangles R_1, …, R_{mn}. Si γ est un chemin dans $[0,1]^2$ du côté gauche au côté droit, alors $H|_\gamma$ est un lacet base en X. Soit γ_r le chemin qui sépare $R_1 \cup \cdots \cup R_r$ de $R_{r+1} \cup \cdots \cup R_{mn}$. En particulier, on a $\gamma_0 = [0,1] \times \{0\}$ et $\gamma_{mn} = [0,1] \times \{1\}$. On passe de γ_r à γ_{r+1} en « poussant γ_r à travers R_{r+1} ». Pour chaque sommet v de R_i avec $H(v) \neq x$, soit g_v un chemin de x à $H(v)$. Si $H(v) \in X_\alpha$, on considère g_v dans X_α. Comme dans la preuve de la surjectivité, on insère les chemins $\overline{g}_v \cdot g_v$ de sorte qu'on obtient une factorisation de $[H|_{\gamma_r}]$. Le choix d'un X_α pour un facteur dépend des R_i qui contienne l'arrête e_v, mais des choix différents produisant des factorisations équivalentes. Maintenant, on a les faits suivants.

- Les factorisations associées à γ_r et γ_{r+1} sont équivalentes.
- La factorisation associée à γ_0 (resp. γ_{mn}) est équivalente à $[f_1] \cdots [f_k]$ (resp. $[f'_1] \cdots [f'_\ell]$).

Ceci termine la preuve. □

Corollaire 1.61. Sous les mêmes hypothèses, on a

1. si $\pi_1(X_1 \cap X_2, x) = \{1\}$, alors $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X_2, x) * \pi_1(X_2, x)$;
2. si $\pi_1(X_2, x) = \{1\}$, alors $\pi_1(X, x) = \pi_1(X_1, x)/\langle\!\langle \operatorname{Im} i_1 \rangle\!\rangle$;
3. si $i_2 \colon \pi_1(X_1 \cap X_2, x) \longrightarrow \pi_1(X_2, x)$ est surjectif, alors $\pi_1(X_1, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ est surjectif.

Corollaire 1.62. Sous les mêmes hypothèses, le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ possède la propriété universelle suivante :

> si $h_k \colon \pi_1(X_k, x) \longrightarrow G$ est un morphisme de groupe dans un groupe G avec $k \in \{1,2\}$ tels que $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$, alors il existe un unique morphisme $h \colon \pi_1(X, x) \longrightarrow G$ tel que $h \circ j_k = h_k$ pour $k \in \{1,2\}$.

Corollaire 1.63. Soient $Y_1 \subset X_1$ et $Y_2 \subset X_2$ deux fermés connexes par arcs. Soit $f \colon Y_1 \longrightarrow Y_2$ un homéomorphisme. On pose $X := X_1 \cup_f X_2$. Soient $p_i \colon Y_i \longrightarrow X_i$ les inclusions naturelles. On suppose que Y_i est un rétract par déformation d'un ouvert $U_i \subset X_i$. Soient $x_1 \in Y_1$. On pose $x_2 := f(x_1)$ et $x := p_1(x_1) = p_2(x_2)$. Alors

$$\pi_1(X, x) = (\pi_1(X_1, x_2) * \pi_1(X_2, x_2))/\langle\!\langle p_{1*}[\gamma] p_{2*}(f_*^{-1}[\gamma]) \mid [\gamma] \in \pi_1(Y_1, x_1) \rangle\!\rangle.$$

Preuve On pose $X_1' \coloneqq X_1 \cup U_2$ et $X_2' \coloneqq X_2 \cup U_i$. Soit Y l'image de Y_i dans X. Comme U_i se rétracte par déformation sur Y, on a $X_i' \sim X_i$, donc $X_1' \cap X_2' = U_1 \cup U_2$ se rétracte à y. Alors pour tout $i \in \{1, 2\}$, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X_1' \cap X_2') \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \pi_1(X_1') * \pi_1(X_2') \arrow[d, "\sim"] \\ \pi_1(Y_i) \arrow[r] & \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \end{tikzcd}$$

Finalement, l'application $f_* \colon \pi_1(Y_1, x_2) \longrightarrow \pi_1(Y_2, x_2)$ est bijective. Le théorème de Van Kampen donne alors le résultat. $\square$

Application : les bouquets d'espaces

DÉFINITION 1.64. Soient X_1 et X_2 deux espaces, $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$. Le *bouquet* des espaces X_1 et X_2 est l'espace $X_1 \vee X_2 \coloneqq (X_1 \sqcup X_2)/(x_1 \sim x_2)$. Cette construction ne dépend pas des points x_1 et x_2 à homéomorphisme près.

Cette opération permet de « coller » deux espaces. Par exemple, l'espace $\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1$ est un « huit » où l'on identifie les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

On suppose que les espaces X_1 et X_2 sont connexes par arcs.

PROPOSITION 1.65. On suppose que les espaces X_1 et X_2 sont respectivement des rétractes par déformations d'ouverts $U_1 \subset X_1$ et $U_2 \subset X_2$. Soit x l'image de x_i dans $X_1 \vee X_2$. Alors

$$\pi_1(X_1 \vee X_2, x) = \pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2).$$

Preuve Cela découle du corollaire précédent. $\square$

▷ EXEMPLE. En reprenant l'exemple du huit, on a $\pi_1(\mathbf{S}^1 \vee \mathbf{S}^1, x) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

1.3.5 Groupe fondamental d'un graphe

DÉFINITION 1.66. Soient V un ensemble fini muni de la topologique discrète et E une réunion disjointe de copie de $[0, 1]$. Soit $f \colon \partial E \longrightarrow V$ une application. Alors l'espace $\Gamma \coloneqq V \cup_f E$ est obtenu en recollant E à V par f, appelé un *graphe*.

– Il est *fini* si l'ensemble V l'est.
– Une *arête* est une classe e d'un segment $[0, 1]$ dans Γ.
– Un *arbre* est un graphe sans cycles, *i. e.* sans suite d'arêtes distincts e_1, ..., e_n telle que $e_1 = e_n$ et $e_i = e_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

PROPOSITION 1.67. Un arbre est contractile.

Preuve Soient $x_0 \in V$ et $x \in \Gamma$. Si $x \notin V$, comme Γ est un arbre, il existe un chemin γ sans aller retour de x_0 à x. On prolonge γ en une chemin $e_1, \dots, e_n$ que l'on identifie à $[0, n]$. L'application

$$(t, x) \in [0, 1] \times \Gamma \longmapsto tx \in \Gamma$$

est une homotopie de $i \circ r$ et Id_Γ où $i \colon \{x_0\} \longrightarrow \Gamma$ est l'inclusion et $r \colon \Gamma \longrightarrow \{x_0\}$ est une rétraction. Ceci montre $\Gamma \sim \{x_0\}$. $\square$

PROPOSITION 1.68. Le groupe fondamentale d'un graphe connexe fini est un groupe libre. Son rang est le nombre d'arêtes dans le complémentaire d'un sous-arbre maximal.

Preuve Soit $T \subset \Gamma$ un sous-arbre maximal. Un tel sous-ensemble existe car le graphe est fini. Quitte à augmenter cette arbre, on peut supposer $V \subset T$. Si $T = \Gamma$, alors $\pi_1(\Gamma, x) = \{1\}$. Sinon on peut faire une récurrence sur le nombre N d'arêtes dans $\Gamma \setminus T$.

Commençons par le cas $N = 1$. On peut alors écrire $\Gamma = T \cup \{e\}$. Alors tout cycle dont les arêtes sont dans Γ passe par le sommet e et il existe un unique chemin $\gamma \subset T$ reliant les extrémités de e, donc il existe un unique cycle d'arêtes $\gamma \cup \{e\}$ dans Γ. Comme T est contractile, il se rétracte par déformation sur γ, donc Γ se rétracte par déformation sur $\gamma \cup \{e\}$. Mais $\gamma \cup \{e\} \cong \mathbf{S}^1$, donc

$$\pi_1(\Gamma) \cong \pi_1(\gamma \cup \{e\}) \cong \mathbf{Z}.$$

Passons à l'hérédité. On suppose $N > 1$. Pour $e \notin T$, on pose

$$X_e \coloneqq \bigcup_{v \in V} \mathring{\mathrm{B}}(v, 1/2) \cap T \cup \{e\}\,.$$

Soit $e \notin T$. Alors les parties $X_1 \coloneqq \bigcup_{e \neq e'} X_{e'}$ et $X_2 \coloneqq X_e$ sont ouvertes dans Γ et vérifient $X_1 \cup X_2 = \Gamma$. De plus, l'intersection

$$X_1 \cap X_2 = \bigcup_{v \in V} \mathring{\mathrm{B}}(v, 1/2) \cup T$$

se rétracte par déformation à T et les espaces X_1 et X_2 se rétractent respectivement à $\Gamma \setminus \{e\}$ et $T \cup \{e\}$, donc l'hypothèse de récurrence donne $\pi_1(X_1) = F_{N-1}$ et $\pi_1(X_2) = \mathbf{Z}$ pour un groupe libre F_{N-1} de rang $N-1$. Le théorème de Van Kampen donne alors $\pi_1(\Gamma) = F_{N-1} * \mathbf{Z}$ qui est un groupe libre de rang N. □

1.3.6 Attacher une cellule : les CW complexes

Soient Y un espace connexe par arcs et $N \geqslant 2$ un entier. Soit $f\colon \mathbf{S}^{N-1} \longrightarrow Y$ une application continue. On considère l'espace $X \coloneqq Y \cup_f \mathbf{B}^N$ obtenu en recollant les espaces $\mathbf{B}^N$ et Y au moyen de la fonction f.

Théorème 1.69. Soit $y_0 \in Y$.

– On suppose $N = 2$. Alors l'application $f\colon \mathbf{S}^1 \longrightarrow Y$ représente un élément $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ bien défini à conjugaison près et on a

$$\pi_1(X, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0)/\langle\!\langle[\gamma]\rangle\!\rangle.$$

– On suppose $N \geqslant 2$. Alors

$$\pi_1(X, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

Preuve On note $O \in \mathbf{B}^N$ le centre de la boule $\mathbf{B}^N$. On considère les ouverts

$$X_1 \coloneqq Y \cup (\mathbf{B}^N \setminus \{O\}) \quad \text{et} \quad X_2 \coloneqq \mathring{\mathbf{B}}^N.$$

Alors

– l'espace Y se rétracte par déformation sur X_1 ;
– l'ouvert X_2 est contractile ;
– l'espace $X_1 \cap X_2 \cong \mathring{\mathbf{B}}^N \setminus \{O\}$ se rétracte sur $\{x \in \mathbf{B}^N \mid \|x\| = 1/2\} \cong \mathbf{S}^{N-1}$.

On suppose $N \geqslant 1$. Alors $\pi_1(\mathbf{S}^{N-1}) = \{1\}$. Soit $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Alors l'inclusion $X_1 \longhookrightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(X_1, x_0) \cong \pi_1(X_2, x_0)$ par le théorème de Van Kampen. Soit η un chemin joignant y_0 à x_0 dans X_1. On considère les isomorphismes

$$\mathrm{ad}_\eta\colon \pi_1(X_1, x_0) \longrightarrow \pi_1(X_1, x_0) \quad \text{et} \quad \mathrm{ad}_\eta\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

et on trouve le diagramme commutatif suivant qui montre le résultat.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(X, y_0) \arrow[dd, "\cong"', "\mathrm{ad}_\eta"] \\
\pi_1(X_1, y_0) \arrow[d, "\mathrm{ad}_\eta"', "\cong"] & \\
\pi_1(X_1, x_0) \arrow[r, "\mathrm{VK}"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

On suppose $N = 2$. Maintenant, on trouve $\pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \mathbf{Z}$. On pose $\gamma_f \colon t \in [0,1] \longmapsto f(e^{2i\pi t}) \in Y$ et $z_0 := \gamma_f(0) = f(1)$. Comme $\pi_1(X_2) = \{1\}$, un corollaire du théorème de Van Kampen assure que l'inclusion $X_1 \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme

$$\pi(X_1, x_0)/I_1 \cong \pi_1(X, x_0) \quad \text{avec} \quad I_1 := \langle\!\langle \operatorname{Im} i_1 \rangle\!\rangle$$

où $i_1 \colon X_1 \cap X_2 \longrightarrow X_1$ est l'inclusion et où x_0 est un point de $\{x \in \mathbf{B}^2 \mid \|x\| = 1/2\}$. Avec $\gamma'_f(t) := \frac{1}{2}e^{2i\pi t}$, la classe $[\gamma'_f]$ engendre $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ et la rétraction $r \colon X_1 \longrightarrow Y$ satisfait $r_* i_1[\gamma'_f] = [\gamma_f]$. Comme $I_0 = \langle i_1[\gamma'_f] \rangle$, le noyau de l'application

$$i_* \colon \pi_1(Y, z_0) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \pi_1(X, z_0)$$

est $\langle\!\langle [\gamma_f] \rangle\!\rangle$. Soit η un chemin allant de y_0 à z_0 dans Y. Comme dans le premier cas, on a

$$\operatorname{Ker}[\pi_1(Y, y_0) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \pi_1(X, y_0)] = \langle\!\langle [\eta\gamma_f\overline{\eta}] \rangle\!\rangle$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Définition 1.70. Un *CW-complexe* est un espace topologique obtenu de manière inductive :
- X^0 est un ensemble discret I_0 ;
- X^n est obtenu à partir de X^{n-1} et d'une union disjointes de boules $\mathbf{B}_i^n$ avec $i \in I_n$ en les attachant à X^{n-1} par des applications continues $f_i \colon \partial\mathbf{B}_i^n \longrightarrow X_{n-1}$;
- $X := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X^n$ est muni de la topologie faible : $K \subset X$ est fermé si et seulement si $K \cap X^n \subset X^n$ est fermé pour tout $n \in \mathbf{N}$.

◇ Remarque. Il est possible d'avoir $I_n = \emptyset$ de telle sorte que $X^n = X^{n-1}$.

Théorème 1.71. Soit X un CW-complexe et $x \in X^2$. Alors l'inclusion $X^2 \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(X^2, x) \cong \pi_1(X, x)$.

◇ Remarque. Les CW-complexes de dimension 1 sont exactement les graphes.

1.4 Revêtements

1.4.1 Homéomorphismes locaux

Définition 1.72. Une application continue $p \colon Y \longrightarrow X$ est un homéomorphisme local si, pour tout point $y \in Y$, il existe un ouvert $U \ni y$ et un ouvert $V \ni p(y)$ tels la restriction $p \colon U \longrightarrow V$ soit un homéomorphisme.

◇ Remarque. Un homéomorphisme local est une application ouverte.

Définition 1.73. Un *revêtement* d'un espace X est une application continue surjective $p \colon Y \longrightarrow X$ telle que tout point $x \in X$ admette un voisinage ouvert $V \subset X$ vérifiant

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$$

où les ensembles $U_i \subset Y$ sont des ouverts tels que les restrictions $p \colon U_i \longrightarrow V$ soient un homéomorphismes. Les inverses $s_i \colon V \longrightarrow U_i$ sont appelées les *section local*. On dit qu'un tel ouvert V *trivialise* l'application p et que les ouverts U_i sont les *feuillets* au dessus de l'ouvert V. On dit que l'application p est connexe si l'espace Y l'est.

◇ Remarques. – L'application p est un homéomorphisme local.
– Lorsque p est surjective, la connexité (respectivement connexité par arcs ou compacité) de Y induit la connexité de X.
– Un revêtement $Y \longrightarrow X$ est *trivial* si l'espace X tout entier est trivialisant.

▷ Exemples. – On considère l'application $p \colon t \in \mathbf{R} \longmapsto e^{2i\pi t} \in \mathbf{S}^1$. Les ouverts $V_{\pm 1} := \mathbf{S}^1 \setminus \{\pm 1\}$ sont trivialisants. En effet, tout point $x \in \mathbf{S}^2 \setminus \{1\}$ admet pour ouvert trivialisant V_1 car

$$p^{-1}(V_{+1}) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} = \bigsqcup_{i \in \mathbf{Z}}]i, i+1[$$

où les restrictions $p_i\colon]i, i+1[\longrightarrow V_1$ sont bien des homéomorphismes. De même, on procède avec l'ouvert V_{-1} pour un point $x \in \mathbf{S}^2 \setminus \{-1\}$.

– De même, on peut considérer les mêmes ouverts $V_{\pm 1}$ et le revêtement $p\colon z \in \mathbf{S}^1 \longmapsto z^n \in \mathbf{S}^1$.

– On considère la partie $Y \coloneqq \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \mathbf{R} \times \{0\}$. La projection $(x,y) \in Y \longmapsto x \in \mathbf{R}$ est un homéomorphisme local, mais ce n'est pas un revêtement.

PROPOSITION 1.74. Soient Y un espace séparé et $p\colon Y \longrightarrow X$ un homéomorphisme local. On suppose que toutes les fibres $p^{-1}(\{x\})$ ont un même cardinal fini. Alors l'application p est un revêtement.

Preuve Soit $x \in X$. On note $p^{-1}(\{x\}) = \{y_1, \dots, y_m\}$. Soit $\tilde{U}_i \ni y_i$ un ouvert tel que $p\colon \tilde{U}_i \longrightarrow p(\tilde{U}_i)$ soit un homéomorphisme. Comme Y est séparer, on peut supposer que les ouverts U_i sont deux à deux disjoints. Posons $V \coloneqq \bigcup_{i=1}^m p(\tilde{U}_i)$. Alors $V \subset X$ est ouvert et $x \in V$. Posons $U_i \coloneqq (p|_{\tilde{U}_i})^{-1}(V)$. Alors $U_i \subset \tilde{U}_i$ est un ouvert non vide et $p\colon U_i \longrightarrow V$ est un homéomorphisme, donc $\bigsqcup_{i=1}^m U_i \subset p^{-1}(V)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x' \in V$. Alors $p^{-1}(\{x'\}) \cap U_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Comme les U_i sont disjoints, on a $\sharp(\sqcup U_i) \cap p^{-1}(x') = m$. Comme $\sharp\, p^{-1}(x') = m$, on conclut l'autre inclusion. □

1.4.2 Propriétés des relèvements

DÉFINITION 1.75. Soient $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement et $f\colon Y \longrightarrow X$ une application continue. Une application continue $\tilde{f}\colon Y \longrightarrow \tilde{X}$ est un relèvement de f si $p \circ \tilde{f} = f$.

LEMME 1.76. Soient $\tilde{f}, \tilde{f}'\colon Y \longrightarrow \tilde{X}$ deux relèvement de f. Si Y est connexe et $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ coïncident en un point $y_0 \in Y$, alors $\tilde{f} = \tilde{f}'$

Preuve Il suffit de montrer que la partie $C \coloneqq \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$ est ouverte et fermée dans Y.

Soit $y_0 \in C$. Alors il existe un feuillet $U_i \subset \tilde{X}$ tel que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0) \in U_i$. Soit $s_i\colon p(U_i) \longrightarrow U_i$ une section locale. On pose $W \coloneqq \tilde{f}^{-1}(U_i) \cap \tilde{f}'^{-1}(U_i) \subset Y$ qui est ouvert. Soit $y_0 \in W$. Alors $\tilde{f}(y) \in U_i$ et $\tilde{f}(y) = s_i \circ p \circ \tilde{f}(y) = s_i(f(y))$. De même, on a $\tilde{f}'(y) = s_i(f(y))$, donc $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)$, donc $y \in C$. D'où $W \subset C$ ce qui montre que C est ouvert dans Y. Comme Y est connexe et $C \neq \emptyset$, on a $C = Y$. □

COROLLAIRE 1.77. Soit $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ un chemin et $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'\colon [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ deux relèvements avec $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0)$. Alors $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$

THÉORÈME 1.78. Soit $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement.

1. Soient $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ un chemin reliant x à y et $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Alors il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ de γ partant de $\tilde{x}$.
2. Soit $H\colon Y \times [0,1] \longrightarrow X$ une application continue. Soit $\tilde{f}\colon Y \longrightarrow \tilde{X}$ un relèvement de $f \coloneqq H(\cdot, 0)$. Alors il existe un unique relèvement $\tilde{H}\colon Y \times [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ de H tel que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}$.

Preuve Cf. polycopié. □

COROLLAIRE 1.79. Soient $\gamma, \gamma'\colon [0,1] \longrightarrow X$ deux chemins reliant x à y et homotopes à extrémités fixées via une homotopie H. Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ les relèvements de γ et γ' d'origine $\tilde{x} \in p^{-1}(X)$. Alors l'unique application $\tilde{H}\colon [0,1]^2 \longrightarrow \tilde{X}$ telle que

$$\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma} \quad \text{et} \quad p \circ \tilde{H} = H$$

est une homotopie à extrémités fixées entre $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$.

Preuve Comme $p \circ \tilde{H} = H$, l'application $s \longmapsto \tilde{H}(0, s)$ est un relèvement du chemin $s \longmapsto H(0, s)$ qui est constant égal à x. D'après le corollaire précédent, le chemin $s \longmapsto \tilde{H}(0, s)$ est constant égal à $\tilde{x}$. De même, le chemin $s \longmapsto \tilde{H}(1, s)$ est constant. Finalement, l'homotopie $\tilde{H}$ fixe les extrémités.

De plus, il joint bien les chemins $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$. En effet, l'application $t \longmapsto \tilde{H}(t, 1)$ est un relèvement du chemin $t \longmapsto H(t, 1) = \gamma'(t)$. Avec le même corollaire, on obtient $\tilde{H}(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}'$. □

1.4.3 Groupe fondamental de revêtements

PROPOSITION 1.80. Soient $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement et $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Soit $x := p(\tilde{x})$. Alors l'application

$$p_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

est injective et son image est l'ensemble des classes $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ tel que l'unique relèvement de γ partant de $\tilde{x}$ est un chemin fermé.

Preuve Montrons que l'application p_* est injective. Comme c'est un morphisme de groupes, il suffit de montrer que son noyau est trivial. Soit $[\tilde{\gamma}] \in \operatorname{Ker} p_*$. Alors le chemin $p \circ \tilde{\gamma}$ est homotope à au lacet constant égal à un point $x \in X$. Soit H une homotopie à extrémités fixées entre $p \circ \tilde{\gamma}$ et x. D'après le corollaire précédent, l'homotopie H se relève en une homotopie à extrémités fixées $\tilde{H}$ entre $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{x}$. Ceci montre $[\tilde{\gamma}] = 1$ et conclut quant à l'injectivité de l'application p_*.

Son image est claire. Remarquons que cet ensemble défini dans l'énoncé est bien définit car deux éléments d'une même classe se relève en un chemin partant x dès que l'un des deux se relève en un chemin partant de x. □

DÉFINITION-PROPOSITION 1.81. Soient $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement et $x \in X$. Pour $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ et $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$, on pose

$$\tilde{x}[\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$$

où le chemin $\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement du chemin γ d'origine x. Cela définie une action à droite du groupe $\pi_1(X, x)$ sur la fibre $p^{-1}(\{x\})$, appelée l'*action par monodromie*.

PROPOSITION 1.82. Soient $\tilde{X}$ un espace connexe par arcs, $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement et $\tilde{x} \in \tilde{X}$. On pose $x := p(\tilde{x})$ et $n := \sharp\, p^{-1}(x)$. Alors

$$p^{-1}(\{x\}) \cong \operatorname{Im} p_*/\pi_1(X, x) \quad \text{et} \quad n = [\pi_1(X, x) : \operatorname{Im} p_*].$$

Preuve La fibre $p^{-1}(\{x\})$ agit sur le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$. On remarque que cette action est transitive. En effet, pour tout $\tilde{x}' \in p^{-1}(\{x\})$, il existe un chemin $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{x}$ à $\tilde{x}'$ et le chemin $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ est alors un lacet basé au point x, donc $\tilde{x}[\gamma] = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}'$. Ainsi, on obtient

$$\operatorname{Stab}_{\pi_1(X,x)}(\tilde{x}) = \operatorname{Im} p_*$$

ce qui montre l'isomorphisme. □

THÉORÈME 1.83. Soient $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un revêtement et $f\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ une application continue. On suppose que l'espace Y est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors on a équivalence entre les points suivants :

– $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_*$;
– f se relève en une application $\tilde{f}\colon Y \longrightarrow \tilde{X}$ envoyant y_0 sur $\tilde{x}_0$.

Preuve $\Leftarrow$ Si $f = p \circ \tilde{f}$, alors $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$, donc $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_*$.

$\Rightarrow$ Réciproquement, on suppose le second point. On choisit un chemin γ dans Y de y_0 à y. Soit $\tilde{\gamma}$ le relèvement dans $\tilde{X}$ d'origine $\tilde{x}_0$ du chemin $f \circ \gamma$. On pose $\tilde{f}(y) := \tilde{\gamma}(1)$. Cette application $\tilde{f}\colon Y \longrightarrow \tilde{X}$ est bien définie grâce à notre hypothèse. En effet, soit γ' un autre chemin de y_0 à y. Alors le lacet $(f \circ \gamma) \cdot (f \circ \overline{\gamma}')$ basé en x_0 est dans $\operatorname{Im} f_*$, donc dans $\operatorname{Im} p_*$. Ainsi il se relève en un chemin fermé, donc $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$. La fonction $\tilde{f}$ est donc bien définie. De plus, elle prolonge bien f et envoie y_0 sur $\tilde{x}_0$.

Vérifions qu'elle est continue. Soit U un voisinage ouvert de $\tilde{f}(y)$ égal à un feuillet au-dessus de l'ouvert trivialisant $V := p(U)$. Soit $s\colon V \longrightarrow U$ une section locale. Soit $W \subset Y$ un voisinage ouvert connexe par arcs de Y tel que $f(W) \subset V$. Alors $W \subset \tilde{f}^{-1}(U)$. En effet, soit $y' \in W$. Soit $\gamma' := \gamma \cdot \gamma_1$ un chemin où γ va de y_0 à y et γ_1 va de y à y' dans W. Alors $\tilde{\gamma}$ est le relèvement de $f \circ \gamma$ d'origine $\tilde{x}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ est le relèvement à U de $f \circ \gamma_1$ de la forme $s \circ (f \circ \gamma_1)$. Donc $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}_1$ est l'unique relève de $f \circ \gamma'$ d'origine $\tilde{x}_0$. Par définition, on a $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \subset U$ ce qui conclut l'inclusion. □

1.4.4 Revêtement universel et dualité

COROLLAIRE 1.84. Soient $p_i\colon (\tilde{X}_i, \tilde{x}_i) \longrightarrow (X, x)$ deux revêtements avec p_1 connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors $\operatorname{Im} p_{1*} \subset \operatorname{Im} p_{2*}$ si et seulement s'il existe un unique homéomorphisme $f\colon \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$.

DÉFINITION 1.85. Deux revêtements p_1 et p_2 sont isomorphes s'il existe un unique homéomorphisme $f\colon \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$.

LEMME 1.86. Soient p_1 et p_2 deux revêtements connexes par arcs et localement connexes par arcs. Alors

$$p_1 \cong p_2 \quad\iff\quad \operatorname{Im} p_{1*} = \operatorname{Im} p_{2*}.$$

Preuve Le sens direct est clair. Réciproquement, soient $f\colon \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ et $g\colon \tilde{X}_2 \longrightarrow \tilde{X}_1$ deux relèvements. Alors $\operatorname{Id}_{\tilde{X}_1}$ et $g \circ f$ sont deux relèvements de p_1 qui coïncident en un point. Par symétrie, l'application f est donc un homéomorphisme. $\square$

DÉFINITION 1.87. Un revêtement $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ est *universel* s'il est simplement connexe.

DÉFINITION 1.88. Un espace X est *semi-localement simplement connexe* s'il est localement connexe par arcs et tout point $x \in X$ admet un voisinage U tel que l'application $\pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ soit triviale.

THÉORÈME 1.89. Soit X un espace connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors il admet un revêtement universel et ce dernier est unique à isomorphisme près.

Preuve Soit $x_0 \in X$. On pose

$$\tilde{X} := \{\gamma \mid \gamma(0) = x_0\} \,/\, \{\text{homotopies à extrémités fixées}\}.$$

et $\tilde{p}\colon [\gamma] \in \tilde{X} \longmapsto \gamma(1) \in X$. On munit $\tilde{X}$ d'une topologie. Chaque point $x \in X$ admet une base de voisinages ouverts U tels que l'application $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$ soit triviale : un tel ouvert U sera qualifié de *bon*. Soit U un bon ouvert, $z \in U$ et γ un chemin de x_0 à z. On pose

$$U_{[\gamma]} := \{\text{les classes d'homotopies à ef des chemins } [\gamma \cdot \delta] \text{ avec } \gamma \subset U \text{ d'origine } z\} \subset \tilde{X}.$$

Ces ensembles vérifient les trois propriétés suivantes qu'on montre assez facilement.

- si $\alpha \subset U$ est un chemin d'origine z, alors $U_{[\gamma\cdot\alpha]} = U_{[\gamma]}$;
- si $U' \subset U$ avec U' bon et $z \in U'$, alors $U_{[\gamma]} \subset U'_{[\gamma]}$;
- si γ et γ' sont des chemins de x_0 à z, alors
  - si γ et γ' sont homotopes à extrémités fixées, alors $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$;
  - sinon $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} = \emptyset$.

Maintenant, décrétons qu'un ouvert de $\tilde{X}$ est l'ensemble vide, l'ensemble $\tilde{X}$ ou une réunion d'ensembles $U_{[\gamma]}$. Cela définie bien une topologie sur $\tilde{X}$.

Soit U un bon ouvert. Alors $p|_{U_{[\gamma]}}\colon U_{[\gamma]} \longrightarrow U$. En effet, comme U est connexe par arcs, elle est surjective. Pour l'injectivité, si $\gamma'(1) = \gamma''(1) =: z$ avec $\gamma' \sim \gamma \cdot \delta$ et $\gamma' \sim \gamma \cdot \beta$, alors $\gamma' \sim \gamma'' \cdot \overline{\beta} \cdot \delta$ avec $\overline{\beta} \cdot \delta \subset U$ est un lacet de base z, donc $\overline{\beta} \cdot \delta \sim z$ dans X, donc $\gamma' \sim \gamma'$ ce qui montre l'injection.

Enfin, pour tout ouvert bon U, on montre l'égalité

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\gamma \text{ de } x \text{ à } y \in U} U_{[\gamma]}.$$

Tout cela montre que l'application p est un revêtement universel.

Montrons que $\tilde{X}$ est simplement connexe. Soit $\tilde{x}_0 = [x_0]$ le chemin constant égal à x_0. Soit $\tilde{x} = [\gamma] \in \tilde{X}$. On pose $\gamma_s(t) := \gamma(st)$. Alors le chemin $\tilde{\gamma}\colon [0, 1] \longrightarrow \tilde{X}$ définie par $\gamma(s) := [\gamma_s]$ est un chemin continu de $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}$. Ainsi l'espace $\tilde{X}$ est connexe par arcs. Il reste à montrer que son groupe fondamental est trivial. Soit $[\gamma] \in \operatorname{Im} p_*$. Alors le relèvement de γ d'origine $\tilde{x}_0$ est un lacet basé en $\tilde{x}_0$. Mais $\tilde{\gamma}(s) = [\gamma_s]$ est un relèvement d'origine $\tilde{x}_0$. D'où $[\gamma_1] = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0 = [x_0]$, donc $\gamma = \gamma_1$ est nullhomotope. D'où $\operatorname{Im} p_* = \{1\}$. Comme p_* est injectif, ceci montre que son groupe fondamental est trivial et termine la preuve. $\square$

THÉORÈME 1.90. Soient X un espace connexe par arcs et semi-localement connexe par arcs et $x \in X$. Alors l'application $p \longmapsto \operatorname{Im} p_*$ donne une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes des revêtements pointés $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow (X, x)$ avec l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(X, x)$.

1.5 Actions de groupes

DÉFINITION 1.91. Une action d'un groupe G sur un espace Y est *errante* si tout point $y \in Y$ admet un voisinage $U \subset Y$ tel que

$$\forall g \in G \setminus \{1\}, \quad gU \cap U = \emptyset.$$

C'est une action *de revêtement* si, de plus, étant donnés deux points $x, y \in Y$ qui ne sont pas dans la même orbite, il existe deux voisinages U de x et V de y tel que $U \cap GV = \emptyset$.

◇ REMARQUE. Une action errante est libre.

THÉORÈME 1.92. Soit G un groupe agissant par revêtement sur un espace Y connexe par arcs. Alors l'ensemble des orbites Y/G est séparé et la projection $p\colon Y \longrightarrow Y/G$ est un revêtement. De plus, soient $\overline{y} \in Y/G$ et $y \in p^{-1}(\overline{y})$. Alors le sous-groupe $p_*(\pi_1(Y, y)) \subset \pi_1(Y/G, \overline{y})$ est normal. Si l'action est libre, alors il exisste un isomorphisme de groupes canonique

$$G \cong \pi_1(Y/G, \overline{y})/p_*(\pi_1(Y, y)).$$

COROLLAIRE 1.93. De plus, si Y est simplement connexe, alors $G \simeq \pi_1(Y/G, \overline{y})$.

▷ EXEMPLE. L'action de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{R}$ est libre et de revêtement, donc $\mathbf{Z} \simeq \pi_1(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \simeq \pi_1(\mathbf{S}^1)$. Le corollaire permet de retrouver le groupe fondamental de la sphère en dimension deux.

Preuve du théorème montrons que Y/G est séparé. Soient $\overline{x}, \overline{y} \in Y/G$ deux classes distincts. On note $x, y \in Y$ des représentants respectifs. Comme l'action est de revêtement, il existe deux voisinages U de x et V de y tel que $U \cap GV = \emptyset$. Alors $\overline{x} \in p(U)$ et $\overline{y} \in p(V)$ avec $p(U) \cap p(V) = \emptyset$. De plus, les images $p(U)$ et $p(V)$ sont des ouverts. Ainsi l'espace Y/G est bien séparé.

Montrons que la projection p est un revêtement. Soient $\overline{y} \in Y/G$ et $y \in \overline{y}$. L'action étant errante, il existe un ouvert $U \subset Y$ tel que $y \in U$ et $gU \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq 1$. Alors $\overline{y} \in V := p(U)$ où V est un ouvert. Par ailleurs, on a

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} gU$$

où les restrictions $p|_{gU}\colon gU \longrightarrow V$ sont bijectif, continue et ouverte, *i. e.* ce sont des homéomorphismes. Donc la projection p est bien un revêtement.

Montrons que l'image $p_*(\pi_1(Y, y))$ est un sous-groupe normal. Soit $[\gamma] \in \pi_1(Y/G, \overline{y})$. Soit $\tilde{\gamma}$ son relèvement avec $\tilde{\gamma}(0) = y$. Comme l'action est transitive, il existe $g \in G$ tel que $gy = \tilde{\gamma}(1)$. Avec $\tilde{y} := \tilde{\gamma}(1)$, on a

$$\begin{aligned}
[\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(Y, y))[\gamma] &= p_*(\pi_1(Y, \tilde{y})) \\
&= p_*(\pi_1(Y, gy)) \\
&= p_*(g_*(\pi_1(Y, y))) = (p \circ g)_*(\pi_1(Y, y)) = p_*(\pi_1(Y, y))
\end{aligned}$$

puisqu'on a un morphisme $g_*\colon \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(Y, gy)$. D'où la normalité.

On suppose que l'action est libre. La réunion $p^{-1}(\overline{y}) = \bigsqcup_{g \in G} \{gy\}$ est disjointe, donc l'action est simplement transitive sur la fibre $p^{-1}(\overline{y})$. Par ailleurs, comme $G \simeq \pi_1(Y/G)/\operatorname{Im} p_*$, l'action de monodromie donne une bijection $\pi_1(Y/G, \overline{y})/\operatorname{Im} p_* \longrightarrow p^{-1}(\overline{y})$. De plus, soit $[\gamma] \in \pi_1(Y/G, \overline{y})$. Si on note $g \in G$ l'unique élément tel que $gy = \tilde{\gamma}(1)$, alors $[\gamma] \longmapsto g$ est une application h qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
(Y, y) \arrow[rr, "g_*"] \arrow[dr, "p"'] & & (Y, gy) \arrow[dl, "p"] \\
& (Y/G, \overline{y}) &
\end{tikzcd}$$

Alors on peut montrer que cette application $h\colon \pi_1(Y/G, \overline{y}) \longrightarrow G$ est un morphisme de groupes. De plus, le triangle ci-dessus donne $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} p_*$ et que h est surjectif ce qui termine la preuve. $\square$

1.6 L'homologie simpliciale

1.6.1 Complexes simpliciaux

Soit $N \in \mathbf{N}^*$ un entier non nul.

DÉFINITION 1.94. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Un *n-simplexes* de $\mathbf{R}^N$ est l'enveloppe convexe de $n+1$ points a_0, …, a_n formant un repère affine, *i. e.* tels que la famille $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n})$ soit une base de $\mathbf{R}^N$. Un simplexe *ordonné* est la donné d'un simplexe de sommets a_0, …, a_n et d'un ordre sur ces points, on le note $[a_0, \dots, a_n]$. Le n-simplexe *standard* est l'ensemble

$$\Delta^n \coloneqq \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geqslant 0 \right\}.$$

◇ REMARQUE. Chaque n-simplexe ordonné $[a_0, \dots, a_n]$ de $\mathbf{R}^N$ est affinement isomorphe au n-simplexe standard Δ^n.

DÉFINITION 1.95. Une *face* d'un simplexe $[a_0, \dots, a_n]$ est un simplexe de la forme $[a_{i_0}, \dots, a_{i_k}]$ pour des indices $1 \leqslant i_0 < \dots < i_k \leqslant n$.