dernière édition : 5 décembre 2019

Notes prises par Téofil Adamski

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

(TOPG)

San Vũ Ngọc

1A maths 2019, ENS de Rennes

Chapitre 0

Introduction et retour aux sources

Introduction à la topologie. Informellement, la topologie est l'étude des objets mathématiques qui persistent (survivent) lorsqu'on les déforme de façon continue. On va étudier les classes d'équivalences de la relation suivante : deux objets sont indiscernables si on peut en déformer un continûment pour obtenir l'autre.

Par exemple, un tore plein et une tasse sont en fait le même objet topologique. Un espace topologique est un ensemble X muni d'une topologie. On peut alors étudier directement X ou étudier des applications entre de tels espaces $f\colon X \to Y$. Ces dernières applications seront des morphismes, *i. e.* elles préservent la structure qui nous intéressent. Ici, ce sera les applications continues. On travaillera avec des suites, beaucoup d'espaces, des ensembles finis et infinis.

0.1 Théorie naïve des ensembles

Définition 0.1 *(informelle).* Un ensemble fini est une collection d'objets (mathématiques) qu'on peut énumérer entièrement en un temps fini. On admettra qu'il existe des ensembles infinis.

Pour nous, il faudra toujours définir un ensemble comme une partie d'un ensemble déjà connu X, *i. e.* de la forme $A = \{x \in X \mid x \text{ vérifie (P)}\}$. On prendra le soin de bien écrire « $\in X$ » pour bien spécifier qu'on se base sur cet ensemble connu X.

Définition 0.2. Soit X un ensemble.

– On note $x \in X$ si x est un élément de X.

– On pose $\emptyset = \{x \in X \mid 1 = 2\}$. Cette définition ne dépend pas de X. L'ensemble vide $\emptyset$ est caractérisé par, pour tout x, on a $x \notin \emptyset$.

– On note $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

– Soit $\{X_i \mid i \in I\}$ une collection d'ensemble. On définit

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in X_i\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in X_i\}.$$

– Soient A et B deux ensembles. On définit $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

– Une fonction $f\colon A \to B$ est donnée par son graphe $\Gamma \coloneqq \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$.

Exercice 0.1. Montrons qu'on peut définir $(a, b) \coloneqq \{a, \{a, b\}\}$.

◇ Remarque. Soit B un ensemble. On a $\emptyset \times B = \emptyset$, donc on peut définir une fonction $f\colon \emptyset \to B$ par son graphe $\Gamma = \emptyset$. On peut donc définir une unique fonction de $\emptyset$ dans B.

0.2 Les ensembles usuels de nombres

0.2.1 Les entiers naturels

On définit $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, ... On définit l'opération successeur $S(n) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et on va noter cet élément $n + 1$. On peut ainsi définir l'addition.

Axiome 0.3 *(de l'infini).* Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ formé de toutes les itérations de successeur appliqué à $\emptyset$.

On peut alors définir $\mathbb{Z}$. On va plonger $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par l'application $n \longmapsto (n, 0)$. On pose la relation d'équivalence $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si $a + b' = a' + b$. On note alors $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/{\sim}$. On définit les nombres négatifs par les classes $\overline{(0, n)}$ qu'on note $-n$ et les nombre positifs par les classes $\overline{(n, 0)}$ qu'on note n.

0.2.2 Construction des rationnels

On peut construire l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ comme partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On pose la relation d'équivalence $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si $ab' = ba'$. On pose alors $\mathbb{Q} = (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})/{\sim}$ et, si $r = (\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{Q}$, on note $r = a/b$.

0.2.3 Cardinaux et dénombrabilité

Définition 0.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cardinal n est la classe d'équivalence des ensembles à n éléments, *i. e.* en bijection avec n, pour la relation « être en bijection ». Donc deux ensembles finis A et B ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de A dans B. On étend cette définition aux ensembles infinis.

◇ Remarque. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont même cardinal, appelé le cardinal dénombrable. Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Par fois, on dit parfois que les ensembles finis sont dénombrables.

Exercice 0.2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. On pourra utiliser le théorème suivant : si A et B sont deux ensembles et il existe des injections de A dans B et de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B.

0.2.4 Définition axiomatique des réels

Théorème 0.5. Il existe un ensemble $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps ;
2. c'est un ensemble totalement ordonné ;
3. la relation d'ordre est compatible avec la structure de corps, *i. e.*
   (a) pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$;
   (b) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant xy$;
4. toute partie majorée pour la relation d'ordre non vide admet une borne supérieure.

Tout ensemble qui possède ces propriétés est isomorphe à $\mathbb{R}$, *i. e.* préservant l'addition, la multiplication et l'ordre.

Exercice 0.3. 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{N}$, *i. e.* qu'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ préservant l'ordre et l'addition.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, *i. e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Chapitre 1
Espaces topologiques

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Définition d'une topologie

Définition 1.1. Soit X un ensemble. On appelle *topologie* sur X toute partie τ de $\mathscr{P}(X)$ vérifiant $\longrightarrow$

1. $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$,
2. τ est stable par union quelconque, *i. e.* pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ de τ, on a $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$,
3. τ est stable par intersection finie, *i. e.* pour tous $O_1, O_2 \in \tau$, on a $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

▷ Exemples. – La topologie grossière est $\tau = \{\emptyset, X\}$.
– La topologie discrète est $\tau = \mathscr{P}(X)$.
– Si $X = \{a, b, c\}$, alors $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ est une topologie.

◇ Remarque. Un élément x de X est souvent appelé un point de X.

Exercice 1.1. Si τ_1 et τ_2 sont des topologies sur X, montrer que $\tau_1 \cap \tau_2$ est encore un topologie sur X. Montrer que ce n'est pas vrai avec l'union.

Définition 1.2. Un ensemble X muni d'une topologie τ s'appelle un espace topologique. On devrait dire que le couple (X, τ) est un *espace topologique*. Si la topologie est sous-entendue, on pourra dire juste X.

1.1.2 Ouverts et fermés

Définition 1.3. Soit (X, τ) un espace topologique. Les éléments de τ sont appelés les *ouverts* de X.

Intuitivement, les ouverts sont les « filtres » ou « lentilles » pour étudier topologiquement l'ensemble X. S'il y a beaucoup d'ouverts, on pourra faire une étude plus fine.

Définition 1.4. Soit (X, τ) un espace topologique. Une partie $F \subset X$ est dite *fermée* si $\complement_X F$ est ouvert, *i. e.* appartient à τ.

Proposition 1.5. 1. Les ensembles $\emptyset$ et X sont à la fois ouverts et fermés.
2. Une intersection quelconque de fermés est fermée.
3. Une union finie de fermés est fermée.

◇ Remarques. – On peut donc définir une topologie par les fermées avec ces « axiomes ».
– Une partie de X est en général ni ouverte ni fermée.

▷ Exemple. Soient $X = \{a, b, c\}$ et $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Alors la partie $\{b\}$ est ni ouverte ni fermée.

1.1.3 Voisinages

Définition 1.6. Soient (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. On appelle *voisinage* de x toute partie $V \subset X$ qui contient un ouvert contenant x. On note $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 1.7. Dans un espaces topologique, une partie $O \subset X$ est ouverte si et seulement si O est voisinage de chacun de ses points, *i. e.*

$$\forall x \in O, \quad O \in \mathscr{V}(x).$$

Preuve $\Rightarrow$ Si $O \subset X$ est ouvert, alors O est un ouvert contenant x pour tout $x \in X$, donc il contient un ouvert contenant x, donc $O \in \mathscr{V}(x)$.

$\Leftarrow$ Soit $O \subset X$ une partie voisinage de tous ses points. Soit $x \in O$. Il existe un ouvert Ω_x contenu dans O et contenant x. Pour ne pas avoir à recourir à l'axiome du choix, on note $\mathscr{O}_x$ de ces ouverts contenu dans O et contenant x. On pose alors $\tilde{\Omega}_x = \bigcup_{\Omega \in \mathscr{O}_x} \Omega$. Alors $\tilde{\Omega}_x$ est un ouvert contenu dans O et contenant x. Par double inclusion, on montre alors que $O = \bigcup_{x \in O} \tilde{\Omega}_x$, donc O est bien un ouvert comme union d'ouverts. □

1.1.4 Bases d'ouverts et bases de voisinages

Définition 1.8. Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle *base d'ouverts* de τ une famille $\mathscr{B}$ d'ouverts telle que tout ouvert de X s'obtient comme une union quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{B}$.

Proposition 1.9. Si deux topologies τ_1 et τ_2 ont une base d'ouverts commune $\mathscr{B}$, alors $\tau_1 = \tau_2$.

Preuve Soit $O_1 \in \tau_1$. Par hypothèse, l'ouvert O_1 est un union d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{B}$. Or ces éléments sont également dans τ_2. Par axiomes des ouverts, les unions d'intersections finies restent dans τ_2, donc $O_1 \in \tau_2$. D'ou $\tau_1 \subset \tau_2$. De même pour l'autre inclusion, d'où $\tau_1 = \tau_2$. □

Proposition 1.10 *(topologie engendrée par une base).* Soient X un ensemble et $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ dont l'union des parties de $\mathscr{B}$ est égale à X. Alors il existe une unique topologie τ sur X pour laquelle $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts : c'est l'intersection de toutes les topologies qui contiennent $\mathscr{B}$ (comme partie) et c'est aussi l'ensemble des unions d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{B}$.

Preuve Soit $\tau(\mathscr{B})$ l'ensemble des unions d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{B}$. Montrons que $\tau(\mathscr{B})$ est une topologie. On a bien $\emptyset \in \tau(\mathscr{B})$ par union vide et $X \in \tau(\mathscr{B})$ par hypothèse. De plus, l'ensemble $\tau(\mathscr{B})$ est bien stable par unions quelconques et intersections finies.

On a bien $\tau(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}$, donc l'intersection de toutes les topologies $\tilde{\tau}$ qui contiennent $\mathscr{B}$ est une topologie contenant $\mathscr{B}$ et contenu dans $\tau(\mathscr{B})$. Mais toute topologie contenant $\mathscr{B}$ doit contenir $\tau(\mathscr{B})$ par axiomes des ouverts, donc $\tilde{\tau} = \tau(\mathscr{B})$. □

Définition 1.11. Sur $\mathbb{R}$, on appelle *topologie usuelle* la topologie engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.2. 1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle est une union d'intervalles ouverts.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ admet une base dénombrables d'ouverts.

Définition 1.12. Soient (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. On appelle *base de voisinages* de x toute famille $\mathscr{BV}(x)$ de voisinages de X telle que tout voisinage de x contient un élément de la famille $\mathscr{BV}(x)$, *i. e.*

$$\forall W \in \mathscr{V}(x),\ \exists U \in \mathscr{BV}(x), \quad U \subset W.$$

▷ Exemple. Pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles ouverts contenant $x \in \mathbb{R}$ est une base de voisinage de x. En effet, tout ouvert est une union d'intervalles ouverts. Soit $W \in \mathscr{V}(x)$. Par définition, il existe $O \in \tau$ tel que $O \subset W$ et $x \in O$. Or O est une union d'intervalles ouverts, donc x appartient à l'un de ces intervalles.

Proposition 1.13. Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur X. Si τ_1 et τ_2 admettent en tout point $x \in E$ des bases de voisinages communes $\mathscr{BV}(x)$, alors $\tau_1 = \tau_2$.

Preuve Soit $O_1 \in \tau_1$. Alors O_1 est un τ_1-voisinage de tous ces points. Donc pour tout $x \in O_1$, il existe $U \in \mathscr{BV}(x)$ tel que $x \in U \subset O_1$. Or U est un τ_1-voisinage de x, donc c'est un τ_2-voisinage de x, donc $O_1 \in \tau_2$. D'où $\tau_1 \subset \tau_2$, donc $\tau_1 = \tau_2$. □

◇ Remarque. Toute partie qui contient un voisinage de x est un voisinage de x.

Exercice 1.3 (droite de Sorgenfrey). Sur $\mathbb{R}$, soit τ_ℓ la topologie engendrée par les intervalles $[a, b[$. Montrer que la topologie usuelle est contenue dans τ_ℓ.

1.1.5 Topologie induite

Définition 1.14. Soient (X,τ) un espace topologique et $A \subset X$. On appelle *topologie induite* sur A par τ la topologie $\tau_A := \{A \cap O \mid O \in \tau\}$ sur A. On dit que $A \cap O$ est la trace de O sur A.

Exercice 1.4. Soit $B \subset A \subset X$. Montrer que les topologies induites sur B par τ et par τ_A sont les mêmes.

Propriété 1.15. Soit $A \subset X$.

1. Les fermés de A pour τ_A sont les traces des fermés de X pour τ sur A.
2. Soit $x \in A$. Les voisinages de x pour τ_A sont les traces des voisinages de x pour τ sur A

▷ Exemples. 1. La topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par la topologie usuelle τ sur $\mathbb{R}$ est la topologie discrète. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $]n-1/2, n+1/2[$ est un ouvert, dans sa trace $\{n\}$ sur $\mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$. Par union quelconque, n'importe quelle partie de $\mathbb{Z}$ est un ouvert. D'où $\tau_{\mathbb{Z}} = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$.
2. Soient $A = [0,2[$ et $B = [0,1[$. Alors B est ouvert dans A car $B =]-1,1[\cap A$ où $]-1,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. Soient $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $B = A \cap [0,1]$. Alors B est fermé dans A car $[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, mais c'est également un ouvert car $B = A \cap]0,1[$.

1.2 Espaces métriques

Les espaces métriques forment une sous-classe très importante d'espace topologiques particuliers où les ouverts sont définies à l'aide d'une distance. Le terme « métrique » vient du grec *metrikos*, signifiant « qui peut être mesuré ».

1.2.1 Définition

Définition 1.16. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant

1. pour tous $x, y \in X$, on a $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; (séparation)
2. pour tous $x, y \in X$, on a $d(x,y) = d(y,x)$; (symétrie)
3. pour tous $x, y, z \in X$, on a $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. (inégalité triangulaire)

Le couple (X,d) s'appelle un *espace métrique*.

◇ Remarque. Une distance prend des valeurs positives. En effet, l'inégalité triangulaire pour $z = x$ donne $d(x,x) \leqslant d(x,y) + d(y,x)$. Par symétrie et séparation, on a donc $0 \leqslant 2d(x,y)$.

▷ Exemples. 1. Sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle est l'application $(x,y) \longmapsto |x-y|$. Idem sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$, les distance euclidienne, SNCF, 1 et infinie sont respectivement définies par

$$\begin{aligned} d_2 \colon ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\longmapsto \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}, \\ d_{\mathrm{SNCF}} \colon ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\longmapsto \begin{cases} d_2(x,y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires,} \\ d_2(x,0) + d_2(0,y) & \text{sinon,} \end{cases} \\ d_1 \colon ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\longmapsto |x_1-x_2| + |y_1-y_2|, \\ d_\infty \colon ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\longmapsto \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}. \end{aligned}$$

3. Sur n'importe quel ensemble X, on peut définir la distance triviale

$$d_{\mathrm{triv}} \colon (x,y) \in X^2 \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.17. Soient (X,d) un espace métrique et $x, y, z \in X$. Alors $|d(x,y) - d(x,z)| \leqslant d(y,z)$.

Preuve On vérifie les deux inégalités

$$\begin{cases} d(x,y) \leqslant d(y,z) + d(x,z), \\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z). \end{cases}$$

D'où le résultat. □

Définition 1.18. Soient (X,d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$. On appelle *boule ouverte* de centre x et de rayon r la partie de X définie comme

$$\mathrm{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}.$$

On appelle *boule fermée* de centre x et de rayon r la partie de X définie comme

$$\mathrm{B_f}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}.$$

▷ EXEMPLES. – Sur $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, on a $\mathrm{B}(x,r) =]x-r, x+r[$ et $\mathrm{B_f}(x,r) = [x-r, x+r]$.
– Sur $\mathbb{R}^2$ euclidien, les boules sont des disques et, sur $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, les boules sont des carrés.

EXERCICE 1.5. Soient $x \in X$ et $R > 0$. Montrer que $\bigcup_{0<r<R} \mathrm{B}(x,r) = \mathrm{B}(x,R)$ et $\bigcup_{r>R} \mathrm{B}(x,r) = \mathrm{B_f}(x,R)$.

1.2.2 Topologie des espaces métriques

Tout espace métrique possède une topologie naturelle qui sera toujours choisie (sauf mention explicite du contraire), c'est la topologie suivante.

DÉFINITION 1.19. Soit (X,d) un espace métrique. La topologie associée à la distance d sur X est l'ensemble des parties $\Omega \subset X$ telle que tout point de Ω est le centre d'une boule ouverte contenue dans Ω.

Preuve Montrons que cela définie bien une topologie τ_d. Les ensemble $\emptyset$ et X sont bien dans cette topologie. Soit $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de τ_d. Soit $x \in \bigcup_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$. Il existe $\alpha_0 \in I$ tel que $x \in \Omega_{\alpha_0}$, donc il existe $r_0 > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r_0) \subset \Omega_{\alpha_0}$, donc $\mathrm{B}(x,r_0) \subset \bigcup_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$. Soient $\Omega_1, \Omega_2 \in \tau_d$. Soit $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $\mathrm{B}(x,r_1) \subset \Omega_1$ et $\mathrm{B}(x,r_2) \subset \Omega_2$. Or $\mathrm{B}(x,r_1) \cap \mathrm{B}(x,r_2) = \mathrm{B}(x, \min\{r_1,r_2\}) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. Donc τ_d est bien une topologie sur X. □

PROPOSITION 1.20. Toute boule ouverte est un ouvert pour la topologie associée à la distance.

Preuve Soient $x \in X$ et $R > 0$. Montrons que $B \coloneqq \mathrm{B}(x,R)$ est un ouvert. Soit $y \in B$. On note $\rho \coloneqq d(y,x)$ et $r \coloneqq (R-\rho)/2$. Il suffit de montrer que $\mathrm{B}(y,r) \subset B$. Soit $z \in X$ tel que $d(y,z) < r$. On a

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < \rho + r = \frac{R+\rho}{2} < R.$$

Donc $z \in B$. Donc la boule B est un ouvert. □

◇ REMARQUE. Par définition, les boules $\mathrm{B}(x,r)$ avec $r > 0$ forment une base de voisinage de x.

COROLLAIRE 1.21. Tout ouvert d'un espace métrique est une union de boules ouvertes.

EXERCICE 1.6. Montrer que la topologie métrique est engendrée par les boules.

COROLLAIRE 1.22. La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ coïncide avec la topologie associée à la distance usuelle.

PROPOSITION 1.23. Dans un espace métrique,
1. tout point admet une base dénombrable de voisinages ;
2. l'ensemble des boules de rayon $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ forment une base d'ouverts.

Preuve 1. Soient $x \in X$ et $V \in \mathscr{V}(x)$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r) \subset V$. Pour $n > 1/r$, on a $\mathrm{B}(x,1/n) \subset \mathrm{B}(x,r) \subset V$. Donc l'ensemble $\{\mathrm{B}(x,1/n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ forme une base de voisinage de x.
2. Soit Ω un ouvert. On sait que Ω est une union de boules centrées en x. Ces boules contiennent des boules centrées en x et de rayon $1/n_x$, donc $\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} \mathrm{B}(x, 1/n_x)$. Donc l'ensemble $\{\mathrm{B}(x,1/n) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}^*\}$ forme une base d'ouvert. □

DÉFINITION 1.24. Une topologie sur un ensemble X est dite métrisable si elle provient d'une distance sur X.

EXERCICE 1.7. Il existe des topologies non métrisables. Montrer que la topologie grossière sur un ensemble avec au moins deux éléments n'est pas métrisable. On pourra considérer la boule $\mathrm{B}(x, d(x,y)/2)$ pour $x \neq y$.

DÉFINITION 1.25. Soient (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors l'application $d_{|A\times A}$, notée d_A, définit une distance sur A. On dit que (A, d_A) est un sous-espace métrique de (X,d).

PROPOSITION 1.26. La topologie associée à d_A est égale à la topologie induite par celle de X sur A.

1.2.3 Autres notions métriques

DÉFINITION 1.27. – On dit qu'une partie $A \subset X$ est *bornée* si elle est contenue dans une boule.
– Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée. On note $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, (Y, d))$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans (Y, d). On peut lui associer une distance, dite distance uniforme, définie par

$$\left|\begin{array}{l}\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, (Y, d)) \times \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, (Y, d)) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad (f, g) \longmapsto d_\infty(f, g) \coloneqq \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).\end{array}\right.$$

DÉFINITION 1.28. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On définit des distances sur $X \times Y$ par

$$\begin{aligned} d_1 &: ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \\ d_\infty &: ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto \max\left\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\right\}, \\ d_2 &: ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}. \end{aligned}$$

On peut généraliser à $X_1 \times \cdots \times X_N$.

DÉFINITION 1.29. La distance d'un point $x \in A$ à une partie $A \subset X$ est définie par

$$d(x, A) \coloneqq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

La distance entre deux parties $A, B \subset X$ est définie par

$$d(A, B) \coloneqq \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) = \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{b \in B} d(b, A).$$

◇ REMARQUE. Cette dernière définition ne définie par une distance sur $\mathscr{P}(X)$ car l'axiome de séparation n'est pas vérifié.

1.2.4 Norme et espace vectoriel normé

Dans cette section, tous les espaces vectoriels sont sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 1.30. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une *norme* sur E est une application $x \in E \longmapsto \|x\|$ vérifiant

1. pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$; (séparation)
2. pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$; (homogénéité)
3. pour tous $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. (inégalité triangulaire)

Le couple $(E, \| \ \|)$ s'appelle un espace vectoriel normé.

PROPOSITION 1.31. Tout espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est métrique pour la distance $(x, y) \longmapsto \|x - y\|$.

◇ REMARQUE. Soient F un espace vectoriel normé et X un ensemble. On note $\mathscr{F}_{\mathrm{b}} = \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, F)$. La distance d_∞ sur $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}$ provient de la norme $\| \ \|_\infty$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}$, *i. e.* pour tous $f, g \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}$, on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \quad \text{et} \quad d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty .$$

1.3 Intérieur, adhérence et frontière

Soit (X, τ) un espace topologique. Toute partie $A \subset X$ peut être « optimalement » encadrée par un ouvert et un fermé. On veut donc définir des ouverts et ces fermés.

DÉFINITION 1.32. Soit $A \subset X$. L'*intérieur* de A est l'union des ouverts contenus dans A. On le note

$$\mathring{A} = \bigcup_{\tau \ni \Omega \subset A} \Omega.$$

PROPOSITION 1.33. 1. La partie $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans E, c'est l'unique ouvert contenu dans A qui contient tout ouvert contenu dans A.
2. La partie A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Preuve 1. La partie $\mathring{A}$ est ouverte comme union d'ouverts. Si $B \subset A$ est un ouvert, alors $B \in \bigcup_{\tau \ni \Omega \subset A} \Omega = \mathring{A}$. Réciproquement, si $B \subset A$ est un ouvert vérifiant $\Omega \subset B$ pour tout ouvert $\Omega \subset A$, donc $\bigcup_{\tau \ni \Omega \subset A} \Omega \subset B$, donc

$\mathring{A} \subset B$ et B fait partie des Ω, donc $B \subset \mathring{A}$.
2. Si A est ouvert, alors A fait partie des Ω, donc $A \subset \mathring{A} \subset A$. Si $A = \mathring{A}$, alors A est un ouvert. □

EXERCICE 1.8. Dans un espaces vectoriels normés, montrer que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouvert. Ce n'est pas forcément le cas dans un espace métrique. En effet, munissons un ensemble X de la distance triviale. Alors l'intérieur de $A = \mathrm{B_f}(x,1) = X$ est X. Donc

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{B_f}(x,1)}} = \mathrm{B_f}(x,1) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x,1) = \{x\} = \overset{\circ}{\widehat{\{x\}}} \neq \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{B_f}(x,1)}}.$$

DÉFINITION 1.34. Un point $x \in X$ est un *point intérieur* à A si A est un voisinage de x.

PROPOSITION 1.35 *(caractérisation locale).* Alors $x \in \mathring{A}$ si et seulement si x est un point intérieur à A.

Preuve Le point x appartient à $\mathring{A}$ si et seulement s'il existe un ouvert $\Omega \subset A$ tel que $x \in \Omega$ si et seulement si A est un voisinage de x si et seulement si x est un point intérieur de A. □

DÉFINITION 1.36. Soit $A \subset X$. L'*adhérence* de A est l'intersection des fermés contenus dans A. On le note $\overline{A}$.

PROPOSITION 1.37. 1. La partie $\overline{A}$ est le plus grand fermé contenant dans E.
2. La partie A est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

PROPOSITION 1.38. Alors

$$\overline{\complement_X A} = \complement_X \mathring{A} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}} = \complement_X \overline{A}.$$

DÉFINITION 1.39. Un point $x \in X$ est un point adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A

PROPOSITION 1.40 *(caractérisation locale).* Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si x est un *point adhérent* à A.

Preuve Le point x n'est pas adhérent à A si et seulement s'il existe $V \in \mathscr{V}(x)$ tel que $V \cap A = \emptyset$, *i. e.* $V \in \complement_X A$ si et seulement si

$$x \in \overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}} = \complement_X \overline{A}$$

si et seulement si $x \notin \overline{A}$. □

DÉFINITION 1.41. Un point $x \in X$ est un *point d'accumulation* de A si tout voisinage de x rencontre A en un point différent de x.

▷ EXEMPLES. – Le point 0 est adhérent à $\{x\}$, mais il n'est pas un point d'accumulation de $\{0\}$.
– Le point 0 est un point d'accumulation de $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

DÉFINITION 1.42. La partie $\partial A \coloneqq \overline{A} \setminus \mathring{A}$ est appelée la frontière de A.

◇ REMARQUE. D'après la proposition 1.38, on a $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}$.

DÉFINITION 1.43. Soit $A \subset X$. On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.

▷ EXEMPLE. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.44. On dit qu'un espace topologique X est *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense.

▷ EXEMPLE. L'exemple précédent donne que $\mathbb{R}$ est séparable pour la topologie usuelle.

1.4 LIMITES

1.4.1 Limite d'une suite

DÉFINITION 1.45. Soient (X, τ) un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. On dit qu'un point $\ell \in X$ est une *limite* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists N \geqslant 0,\ \forall n \geqslant N, \quad x_n \in V.$$

▷ EXEMPLE. Si on munit X de la topologie grossière, alors tout point est limite de toute suite de X.

◇ Remarque. Si on dispose d'une base de voisinages $\mathscr{BV}$ de ℓ, on peut remplacer « $\forall V \in \mathscr{V}(\ell)$ » par « $\forall V \in \mathscr{BV}$ ». En effet, supposons la définition vérifiée avec « $\forall V \in \mathscr{BV}$ ». Soit $V \in \mathscr{V}(x)$. Alors il existe $W \in \mathscr{BV}$ tel que $W \subset V$. Les éléments x_n appartiennent donc à W à partir d'un certain rang, donc $x_n \in V$ à partir d'un certain rang. On montre identiquement la réciproque.

Application. Dans un espace métrique (X, d), on peut choisir $V_\varepsilon = \mathrm{B}(\ell, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ ou $V_n = \mathrm{B}(\ell, 1/(n+1))$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors ℓ est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geqslant 0,\ \forall n \geqslant N, \quad d(\ell, x_n) < \varepsilon.$$

1.4.2 Espace topologique séparé, unicité de la limite

Définition 1.46. Un espace topologie (X, τ) est *séparé* (ou de Hausdorff) si deux points distincts de X admettent des voisinages respectifs disjoints.

◇ Remarque. Cette définition est équivalente à ce que, pour tous $x \neq y$, il existe deux ouverts Ω_x et Ω_y disjoints tels que $x \in \Omega_x$ et $y \in \Omega_y$.

Propriété 1.47. Les espaces métriques sont séparés.

Preuve Soient (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Soit $\delta \coloneqq d(x, y)$. On choisit $V_x \coloneqq \mathrm{B}(x, \delta/3)$ et $V_y \coloneqq \mathrm{B}(y, \delta/3)$. Alors les parties V_x et V_y sont respectivement des voisinages de x et y et ils sont disjoints. □

▷ Exemples. – La topologie grossière sur un ensemble de cardinal supérieur ou égal à 2 n'est pas séparée.

– • *Recollement topologique.* On pose $X \coloneqq]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Soit $\mathscr{B}$ la famille contenant les ouverts de $]1, +\infty[$, les ouverts de $]-\infty, 0]$ et les ensembles de la forme $]a, 0] \cup [1, b[$ avec $a < 0$ et $b > 1$. Soit τ la topologie engendrée par la famille $\mathscr{B}$. Cette topologie n'est pas séparée car on ne peut pas séparer 0 et 1.

◇ Remarque. Les notions d'espace séparé et d'espace séparable non aucun lien. Par exemple, l'espace $\mathbb{R}$ muni de de la topologie usuelle est séparé et séparable, muni de la topologie grossière est non séparé mais séparable, muni de la topologie discrète est séparé et non séparable.

Théorème 1.48. Dans un espace topologique séparé, toute suite admet au plus une limite.

◇ Remarque. Dans ce cas, on peut parler de la limite d'une suite et on peut utiliser la notation $\lim_{n\to+\infty} x_n$ pour désigner la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X admettant deux limites ℓ_1 et ℓ_2. Par l'absurde, supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$. Par séparation, il existe $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Par définition, il existe $N_1 \geqslant 0$ tel que $x_n \in V_1$ pour tout $n \geqslant N_1$ et il existe $N_2 \geqslant 0$ tel que $x_n \in V_2$ pour tout $n \geqslant N_2$. Alors pour $n = \max(N_1, N_2)$, on a $x_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ce qui est absurde. D'où $\ell_1 = \ell_2$. □

1.4.3 Limite et adhérence

Proposition 1.49. 1. S'il existe une suite d'éléments de $A \subset X$ convergeant vers $x \in X$, alors $x \in \overline{A}$.
2. Si (X, d) est un espace métrique et $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite de A convergeant vers x.

Preuve 1. Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A telle que $x_n \to x$. Soit $V \in \mathscr{V}(x)$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$. Or $x_n \in A$, donc $V \cap A \neq 0$, *i. e.* $x \in \overline{A}$.
2. Dans un espace métrique, tout point $x \in X$ admet une base dénombrables de voisinages $\mathrm{B}(x, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donc pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $\mathrm{B}(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$, donc soit $x_n \in \mathrm{B}(x, 1/n) \cap A$. Par le principe de récurrence, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite ainsi. Pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$, le voisinage V contient une certaine boule $\mathrm{B}(x, 1/N)$ et, pour tout $n \geqslant N$, on a $\mathrm{B}(x, 1/n) \subset \mathrm{B}(x, 1/N)$, donc $x_n \in V$. D'où $x_n \to x$. □

Corollaire 1.50. Dans un espace métrique X, une partie A est fermée si et seulement toute suite de A convergeant dans X a en fait sa limite dans A.

Exercice 1.9. Montrer que la topologie codénombrable sur $\mathbb{R}$

$$\tau \coloneqq \{O \subset \mathbb{R} \mid \operatorname{Card} O^{\mathrm{c}} \leqslant \operatorname{Card} \mathbb{N}\}$$

est non séparée, mais que toute suite a au plus une limite.

1.5 Transport de topologies

1.5.1 Topologies images réciproque et directe

Proposition 1.51. Soit $f\colon X \to X'$ une application entre deux ensembles.

1. Si τ' est une topologie sur X, alors la classe de parties

$$f^*(\tau') \coloneqq \{f^{-1}(\Omega) \mid \Omega \in \tau\}$$

est une topologie sur X, appelée *topologie image réciproque* de τ' par f.

2. Si τ est une topologie sur X, alors la classe de parties

$$f_*(\tau) \coloneqq \{\Omega' \subset X' \mid f^{-1}(\Omega') \in \tau\}$$

est une topologie sur X', appelée *topologie image directe* de τ par f.

▷ Exemple. Si l'application f est constante égale à x_0, alors $f^*(\tau')$ est la topologie grossière et $f_*(\tau)$ est la topologie discrète. De plus, si $X = X'$, alors $\tau = \mathrm{Id}^*(\tau) = \mathrm{Id}_*(\tau)$.

Proposition 1.52. On a $f^*(f_*(\tau)) \subset \tau$ et $f_*(f^*(\tau')) \subset \tau'$.

Preuve Soit $\Omega \in f^*(f_*(\tau))$. Alors il existe $\Omega' \in f_*(\tau)$ tel que $\Omega = f^{-1}(\Omega')$. Or $f^{-1}(\Omega') \in \tau$, donc $\Omega \in \tau$. D'où la première inclusion. Soit $\Omega' \in \tau'$. Alors $f^{-1}(\Omega) \in f^*(\tau')$, donc $\Omega' \in f_*(f^*(\tau'))$. D'où la seconde. □

Proposition 1.53. Soient $f\colon X \to X'$, $g\colon X' \to X''$ et τ et τ'' des topologies sur X et X''. Alors

$$(g \circ f)^*(\tau'') = f^*(g^*(\tau'')) \quad \text{et} \quad (g \circ f)_*(\tau) = g_*(f_*(\tau)).$$

Applications. • *Topologie induite.* Soient $A \subset X$ et τ une topologie sur X. Soit j_A l'inclusion, *i. e.*

$$j_A \colon \left| \begin{array}{l} A \longrightarrow X, \\ x \longmapsto x. \end{array} \right.$$

Alors $j_A^*(\tau)$ est la topologie induite sur A par τ.

• *Topologie produit.* Soient (X, τ) et (X', τ') deux espaces topologiques. Sur $X \times X'$, deux applications sont naturelles : les projections sur les coordonnées

$$\pi_1 \colon \left| \begin{array}{c} X \times X' \longrightarrow X, \\ (x, x') \longmapsto x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \pi_2 \colon \left| \begin{array}{c} X \times X' \longrightarrow X', \\ (x, x') \longmapsto x'. \end{array} \right.$$

1.5.2 Topologie produit

Définition 1.54. La *topologie produit* sur $X \times X'$ est la topologie engendrée par $\pi_1^*(\tau)$ et $\pi_2^*(\tau')$. Plus généralement, soit $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On définit la topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$ par la topologie engendré par l'union des $\pi_i^*(\tau_i)$ où π_i est la projection sur X_i.

Définition 1.55 *(cylindres)*. Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $J \in I$. Soit $\Omega \coloneqq (\Omega_j)_{j \in I}$ est une famille de $\mathscr{P}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ telle que Ω_j soit un ouvert de X_j pour tout $j \in J$. On appelle *cylindre* de base Ω l'ensemble

$$\mathrm{Cyl}(\Omega) \coloneqq \prod_{i \in I} Y_i \quad \text{avec} \quad Y_i \coloneqq \begin{cases} \Omega_i & \text{si } i \in J, \\ X_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1.10. Montrer que les cylindres engendrent la topologie produit.

Proposition 1.56. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques. Alors la topologie produit sur $X \times X'$ est égale à la topologie associée à la distance $d_\infty \coloneqq \max(d, d')$.

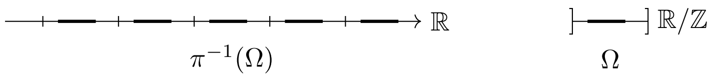
◇ Remarque. Le résultat est faux pour un nombre infini de facteur.

1.5.3 Topologie quotient

Définition 1.57. Soient (X, τ) un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Alors $X/{\sim}$ est muni de la topologie $\pi_*(\tau)$, appelée *topologie quotient*, où l'application π est la projection

$$\pi\colon \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow X/\!\sim, \\ x \longmapsto \overline{x}. \end{array} \right.$$

▷ EXEMPLE. On peut considérer $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la topologie quotient associée à la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Un ouvert Ω de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est telle que $\pi^{-1}(\Omega)$ soit un ouvert.



1.6 Continuité

1.6.1 Continuité globale

DÉFINITION 1.58. Soit $f\colon X \to X'$ une application entre deux espaces topologiques. On dit que f est *continue* si, pour tout ouvert Ω' de X', la partie $f^{-1}(\Omega')$ est un ouvert de X. C'est équivalent à $f^*(\tau') \subset \tau$ ou $f_*(\tau) \supset \tau'$.

PROPOSITION 1.59. Soient $f\colon X \to X'$ et $g\colon X' \to X''$. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Preuve Si Ω'' est un ouvert de X'', alors $(g \circ f)^{-1}(\Omega'') = f^{-1}(g^{-1}(\Omega''))$ est un ouvert de X. □

EXERCICE 1.11. Montrer que la définition est équivalente si on remplace « ouvert » par « fermé ».

DÉFINITION 1.60. On dit qu'une application $f\colon X \to X'$ est un *homéomorphisme* si elle est bijective, continue et d'inverse continue. Dans ce cas, on dit que les deux espaces X et X' sont homéomorphes.

PROPOSITION 1.61. Une bijection $f\colon X \to X'$ est un homéomorphisme si et seulement si $f^*(\tau') = \tau$.

▷ EXEMPLE. L'intervalle $]0, 1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ par l'application

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\pi/2, \pi/2\right[, \\ x \longmapsto \dfrac{4}{\pi} \operatorname{Arctan} x + \dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

COROLLAIRE 1.62. Deux topologies τ et τ' sur un même ensemble X sont égales si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ est un homéomorphisme de (X, τ) dans (X, τ').

1.6.2 Continuité locale

DÉFINITION 1.63. Soient $f\colon X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques et $x \in X$. On dit que f est continue en x si, pour tout voisinage V de $f(x)$, la partie $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.

PROPOSITION 1.64. Une fonction $f\colon X \to Y$ est continue si et seulement si elle est continue en tout $x \in X$.

Preuve On suppose que f est continue. Soit $x \in X$ et $V \in \mathscr{V}(f(x))$. Alors V contient un ouvert Ω qui contient $f(x)$. Par continuité de f, la partie $f^{-1}(\Omega)$ est ouverte et contient x car $f(x) \in \Omega$, donc c'est un voisinage de x. D'où la continuité de f en x.

Réciproquement, on suppose que f est continue en tout $x \in X$. Soit Ω un ouvert de Y. Montrons que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert. Soit $x \in f^{-1}(\Omega)$. On a $f(x) \in \Omega$, donc Ω est un voisinage de $f(x)$. Or f est continue en x, donc $f^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de x ce qui montre que c'est un ouvert. □

1.6.3 Continuité et espaces métriques

PROPOSITION 1.65. 1. Soit $f\colon X \to Y$ continue. Alors pour toute suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $x \in X$ dans X, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans Y.
2. Soient X un espace métrique et $f\colon X \to Y$. On suppose que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in X$, la suie $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Alors f est continue.
3. Soient X et Y deux espaces métriques et $f\colon X \to Y$. Alors f est continue si et seulement si

$$\forall x_0 \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in X, \quad x \in \mathrm{B}(x_0, \alpha) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \in \mathrm{B}(f(x_0), \varepsilon).$$

Preuve 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x \in X$. On note $\ell := f(x)$. Soit $V \in \mathscr{V}(\ell)$. On note $U := f^{-1}(V)$. Comme f est continue, la partie U est un voisinage de x. Donc à partir d'un certain rang, on a $x_n \in U$, donc $f(x_n) \in V$. D'où $f(x_n) \to \ell$.
2. Soit $x \in X$. Montrons que f est continue en x. Soit $V \in \mathscr{V}(f(x))$ ouvert. Par l'absurde, supposons que, pour tout $U \in \mathscr{V}(x)$, il existe $x' \in U$ tel que $f(x') \notin V$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on choisit $U = \mathrm{B}(x, 1/n)$, donc il existe $x_n \in \mathrm{B}(x, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin V$. Mais pour $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x, x_n) \leqslant 1/n$, donc $x_n \to x$. Par hypothèse, on doit avoir $f(x_n) \to f(x)$. Or pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) \in \complement_Y V$, donc $f(x) \in \complement_Y V$ car $\complement_Y V$ est un fermé : c'est impossible car, à partir d'un certain rang, tous les points $f(x_n)$ sont censés être dans V.
3. La fonction f est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall V \in \mathscr{V}(f(x)), \quad f^{-1}(V) \in \mathscr{V}(x)$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad f^{-1}(\mathrm{B}(f(x), \alpha)) \subset \mathrm{B}(x, \alpha).$$ □

Définition 1.66. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques.
– On dit qu'une fonction $f \colon X \to Y$ est *uniformément continue* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que toute boule de rayon η s'envoie dans une boule de rayon ε par f, *i. e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x_1, x_2 \in X, \quad d(x_1, x_2) < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \delta(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varepsilon.$$

– Soit $k > 0$. On dit qu'une fonction est *k-lipschitzienne* si

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad \delta(f(x_1), f(x_2)) \leqslant k d(x_1, x_2).$$

Proposition 1.67. Une fonction $f \colon X \to Y$ lipschitzienne est uniformément continue.

◇ Remarque. Soient X un espace métrique et $x_0 \in X$. L'application

$$f : \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto d(x, x_0) \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne, donc continue.

Rappel. Soient X un espace topologique et (X', d') un espace métrique. On note $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, X')$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans X'. On le munit de la distance d'_∞. On note également $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, X')$ l'ensemble des fonctions continues bornées de X dans X'.

Théorème 1.68. La partie $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, X')$ est fermée dans $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, X')$. Autrement dit, toute limite uniforme de fonctions continues est continues.

Preuve Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, X')$ telle que que $f_n \to f \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, X')$ pour d'_∞. Montrons que f est continue. Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. On veut contrôler $d'(f(x), f(y))$. Pour $n \geqslant N$ assez grand, on sait que

$$\sup_{z\in X} d'(f(z), f_n(z)) < \varepsilon$$

Pour $n \geqslant N$, comme f_n est continue, il existe $V \in \mathscr{V}(x)$ tel que

$$\forall y \in V, \quad d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon.$$

Donc pour $n \geqslant N$ et $y \in V$, par inégalité triangulaire, on a

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(y)) < 3\varepsilon,$$

donc $f(y) \in \mathrm{B}(f(x), \varepsilon)$. Donc elle est continue en x. □

◇ Remarque. La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ que l'on munit de la topologie suivante :
– un base voisinage de $x \in \mathbb{R}$ est donnée par les voisinages usuels,
– une base de voisinage de $+\infty$ est donnée par les intervalles $]A, +\infty[\cup \{+\infty\}$ pour $A \in \mathbb{R}$,
– une base de voisinage de $-\infty$ est donnée par les intervalles $]-\infty, B[\cup \{-\infty\}$ pour $B \in \mathbb{R}$.

L'ensemble $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un sous-espace topologique de $\overline{\mathbb{R}}$. Qu'est-qu'une fonction continues de $\overline{\mathbb{N}}$ dans un espace topologique X ? C'est exactement une suite convergente $(x_n = f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ car alors $x_n \to f(+\infty)$.

1.6.4 Limite d'une fonction selon une partie

Définition 1.69. Soient $f \colon X \to X'$ et $a \in X$. On dit que $f(a)$ est une limite de $f(x)$ quand x tend vers a lorsque f est continue en a.

Définition 1.70. Soient X et X deux espaces topologiques, $f\colon X \to X'$, $A \subset X$ et $a \in \overline{A}$. On dit que $\ell \in X'$ est une limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans A si

$$\forall V' \in \mathscr{V}(\ell), \exists V \in \mathscr{V}(a), \quad f(A \cap V) \subset V'.$$

On note alors « $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$ dans A ».

◇ Remarque. Dans ce cas, on a $\ell \in \overline{f(A)}$.

Proposition 1.71 *(prolongement par continuité)*. Soient X et X' deux espaces topologiques, $A \subset X$, $f\colon A \to X'$ et $a \in \overline{A}$. S'il existe une fonction continue $\overline{f}\colon A \cup \{a\} \to X'$ qui coïncident avec f sur A, alors $f(x) \to \overline{f}(a)$ quand $x \to a$ dans A. Réciproquement, si X' est un espace métrique et si la limite de $f(x)$ quand $x \to a$ dans A existe, alors la fonction étendue en posant $f(a) \coloneqq \ell$ est continue sur $A \cup \{a\}$.

Preuve On suppose qu'il existe une fonction continue $\overline{f}\colon A \cup \{a\} \to X'$ qui coïncident avec f sur A. Montrons que f est continue en a. Comme $\overline{f}$ est continue en a, pour tout $V' \in \mathscr{V}(\overline{f}(a))$, il existe $V_a \in \mathscr{V}(a)$ dans $A \cup \{a\}$ tel que $\overline{f}(V_a) \subset V'$. Donc il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ tel que $V_a = (A \cap V) \cup \{a\}$, donc $A \cap V \subset V_a$, donc $f(A \cap V) = \overline{f}(A \cap V) \subset \overline{f}(V_a) \subset V'$. Donc f est continue en a.

Réciproquement, on suppose que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans A existe. Soit $\overline{f}$ la fonction étendue sur $A \cap \{a\}$. On a $\overline{f}(a) = \ell$. Montrons que $\overline{f}$ est continue en a. Soit $V' \in \mathscr{V}(\ell)$. On sait qu'il existe $V \in \mathscr{V}(a)$ tel que $f(A \cap V) \subset V'$, donc $\overline{f(A \cap V)} \subset \overline{V'}$. On a $\overline{f}((A \cup \{a\}) \cap V) \subset \overline{f(A \cap V)}$. En effet, soit $y \in \overline{f}((A \cup \{a\}) \cap V)$. Si $y = f(a)$, alors $f(a)$ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans A, donc $f(a)$ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a dans $V \cap A$, donc $y \in \overline{f(A \cap V)}$. Sinon $y \in f(A \cap V) = \overline{f(A \cap V)}$. On a donc obtenu $\overline{f}((A \cup \{a\}) \cap V) \subset \overline{V'}$ où $(A \cup \{a\}) \cap V \in \mathscr{V}(a)$. On peut choisir V' fermé[§1] ce qui termine la preuve : la fonction $\overline{f}$ est bien continue en a. □

1.7 Comparaison de topologies

1.7.1 Définition et propriétés

Définition 1.72. Soient τ et τ' deux topologies sur un même ensemble X. On dit que τ est *moins fine* ou *plus grossière* que τ' si $\tau \subset \tau'$.

Proposition 1.73. Une topologie τ_2 est plus fine sur τ_1 si et seulement si l'identité de (X, τ_1) dans (X, τ_2) est continue. Par conséquent, on a $\tau_1 = \tau_2$ si et seulement si l'identité est un homéomorphisme.

Définition 1.74. Soit X un ensemble. On dit que deux distances d_1 et d_2 sur X sont *équivalentes* si l'identité de (X, d_1) dans (X, d_2) est bi-lipschitzienne, *i. e.* il existe $k_1, k_2 > 0$ tels que $k_1 d_1 \leqslant d_2 \leqslant k_2 d_2$. Dans ce cas, les topologies associées sont égales.

◇ Remarques. – Soit $f\colon (X, \tau) \to (X', \tau')$. Alors $f^*(\tau')$ est la topologie la moins fine sur X qui rende f continue. De même, $f_*(\tau)$ est la topologie la plus fine sur X' qui rende f continue.

– Soit $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ telle que $\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B = X$. Alors la topologie engendrée par $\mathscr{B}$ est la topologie la moins fine qui contiennent $\mathscr{B}$.

Proposition 1.75. 1. La topologie produit est la topologie la moins fine rendant les projections continues.
2. La topologie induite est la topologie la moins fine rendant l'inclusion continue.
3. La topologie quotient est la topologie la plus fine rendant la projection continue.

Preuve Montrons le premier point. Soit $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espace topologique. On note $X \coloneqq \prod_{i \in I} X_i$ et, pour $i \in I$, on note $\pi_i\colon X \to X_i$ la projection sur X_i. La topologie produit est la topologie engendrée par la famille $\{\pi_i^*(\tau_i) \mid i \in I\}$. Elle rend les projections continues car elles contient les topologies $\pi_i^*(\tau_i)$ et c'est la moins fine. Donc toute topologique sur X pour laquelle les projections π_i sont continues contient la topologie produit. □

Proposition 1.76. Une fonction f de X à valeurs dans un produit $\prod_{i \in I} Y_i$ est continue si et seulement si ses composantes $f_i \coloneqq \pi_i \circ f$ sont continues.

Preuve On suppose que f est continue. Comme les projections π_i sont continues par définition de la topologie produit, les fonctions f_i sont continues comme composée de deux fonctions continues.

§1. Dans un espace métrique, tout point admet une base de voisinages fermés. Par exemple, le base $\{\mathrm{B_f}(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ convient.

Réciproquement, on suppose que les fonctions f_i sont continues. On veut montrer que $f_*(\tau)$ contient la topologie produit. Or $\pi_i \circ f$ est continue, donc $f_*(\tau)$ contient les $\pi_j^{-1}(\Omega_j)$ avec Ω_j un ouvert de Y_j, donc elle contient les $\pi_i^*(\tau_i)$, donc elle contient la topologie engendrée par les $\pi_i^*(\tau_i)$, *i. e.* la topologie produit. On en déduit que f est continue. □

Corollaire 1.77. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq ((x_n^i)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite du produit $\prod_{i\in I} X_i$. Alors cette suite converge si et seulement si, pour tout $i \in I$, la suite $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1.12. Montrer que, si X est un produit fini d'espaces métriques, alors la topologie produit est compatible avec la distance d_∞ et les projections sont 1-lipschitziennes.

1.7.2 Convergence simple

Notation. On note $\mathscr{F}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions de X dans Y. En fait, cet ensemble vaut

$$\mathscr{F}(X,Y) = \prod_{x\in X} Y =: Y^X.$$

Une fonction f s'identifie à la famille $(f(x))_{x\in X}$.

Sur cet ensemble Y^X, la topologie produit est appelée topologie de la *convergence simple.* En général, cette topologie n'est pas métrisable.

Exercice 1.13. Caractériser le voisinage d'une fonction pour la convergence simple.

Exercice 1.14. Montrer que l'application identité de $[0,1]^{\mathbb{R}}$ muni de la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R},[0,1])$ muni de la topologique de la convergence uniforme n'est pas continue.

Exercice 1.15. Soient X un ensemble et Y un espace métrique. Montrons que, pour tout $x \in X$, la fonction

$$f \in X \longmapsto f(x) \in Y$$

est continue pour la distance d_∞ et pour la topologie produit.

Chapitre 2

Connexité

Le mot « connexe » vient du latin *connexus* et *nectere* dont ce dernier signifie « lier ». En maths, cela signifie plutôt « en un seul morceau » ou « qu'on ne peut pas séparer ».

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1. Un espace topologique (X, τ) est dit *connexe* si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de X sont X et $\emptyset$.

◇ Remarque. Cette notion est connexité est purement topologique. Ainsi, si X et Y sont deux espaces homéomorphes, alors la connexité de X entraîne celle de Y et réciproquement.

Proposition 2.2. Un espace topologique X est connexe si et seulement s'il n'existe pas de partitions de X en deux ouverts disjoints non vides.

Preuve On suppose que l'espace s'écrit $X = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints. Alors $\Omega_1 = \complement_X \Omega_2$ est ouvert et fermé, donc soit il vaut $\emptyset$ ou X soit l'espace se partitionne en deux ouverts disjoints non vide. □

Exercice 2.1. Montrer que tout ensemble muni de la topologie grossière est connexe. Soit X un ensemble à plus de deux éléments. Montrer que X n'est jamais connexe pour la topologie discrète.

Proposition 2.3. Un espace topologique X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est constante.

Preuve On suppose que X est connexe. Soit $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ continue. Alors $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts disjoints formant une partition de X, donc l'un des deux est vide par la proposition précédente. Par exemple, on suppose que $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. On en déduit alors que f est constante égale à 1.

Réciproquement, on suppose que toute fonction continues de X dans $\{0, 1\}$ est constante. Soit $A \subset X$ ouvert et fermé. On considère $\mathbb{1}_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$. Alors cette fonction est continue, donc elle est constante, donc $A = \emptyset$ ou $A = X$. D'où la connexité de X. □

Définition 2.4 *(connexité d'une partie)*. On dit qu'une partie $A \subset X$ est connexe si (A, τ_A) est connexe.

▷ Exemples. Tout singleton est connexe. La partie $A := [-1, 0[\cup]0, 1]$ n'est pas connexe car les intervalles $[-1, 0[$ et $]0, 1]$ sont des ouverts disjoints pour la topologie τ_A. De même, l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe puisque

$$\mathbb{Q} = (]-\infty, \pi[\cap \mathbb{Q}) \sqcup (]\pi, +\infty[\cap \mathbb{Q}).$$

Exercice 2.2. Une partie $A \subset X$ est connexe si et seulement si, pour toutes $A_1, A_2 \subset A$ non vides telles que $A = A_1 \cup A_2$, l'une des deux contient au moins un point adhérent à l'autre.

Théorème 2.5. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle sont les intervalles.

Preuve Montrons que tout connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $C \subset \mathbb{R}$ une partie connexe. On note $a := \inf C \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b := \sup C \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Il suffit de montrer que $]a, b[\subset C$. Soit $z \in]a, b[$. On suppose que $a \neq b$. Par l'absurde, supposons que $z \notin C$. Alors

$$(]-\infty, z[\cap C) \sqcup (]z, +\infty[\cap C) = C$$

où $(]-\infty, z[\cap C)$ et $(]z, +\infty[\cap C)$ sont des ouverts disjoints non vides. En effet, montrons que le second est non vide. Si $b \in C$, alors $b \in]z, +\infty[\cap C$. Sinon on suppose que $b \notin C$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $b - \varepsilon > z$. Comme $b = \sup C$, il existe $w \in C$ tel que $w \in]b - \varepsilon, b[$, donc $w \in]z, +\infty[\cap C$. Donc $]z, +\infty[\cap C \neq \emptyset$. De même pour l'autre ouvert. Finalement, la partie C n'est pas connexe ce qui est impossible. Donc $z \in C$ et donc la partie C est un intervalle.

Réciproquement, montrons que tout intervalle est connexe. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Par l'absurde, supposons que l'intervalle s'écrive $I = A \sqcup B$ où A et B sont des ouverts non vides de I. Soient $a \in A$ et $b \in B$. On peut supposer que $a < b$. On note $A_0 := A \cap [a, b]$ et $B_0 := B \cap [a, b]$. Alors A_0 et B_0 sont des ouverts disjoints non vides de $[a, b]$. On pose $c := \sup A_0 \in \mathbb{R}$. Alors $a \leqslant c \leqslant b$, donc $c \in A_0 \cup B_0 = [a, b]$. Distinguons deux cas.

– Supposons que $c \in B_0$. Alors $c \neq a$, donc soit $c = b$ soit $a < c < b$. Dans tous les cas, comme B_0 est un ouvert, il existe $d < c$ tel que $]d, c] \subset B_0$. Nécessairement, le réel d est un majorant de A_0. En effet, si c'en était pas un, alors il existerait $z \in A_0$ tel que $z > d$ et $z \leqslant c$, donc $z \in \,]d, c] \subset B_0$, donc $z \in B_0 \cap A_0$ ce qui est impossible. Donc d est un majorant de A_0 ce qui est impossible car $d < c$.

– Supposons que $c \in A_0$. Alors $c \neq b$, donc soit $c = a$ soit $a < c < b$. Dans tous les cas, comme A_0 est un ouvert, il existe $z > c$ tel que $]c, z] \subset A_0$ ce qui est impossible.

Dans tous les cas, une contradiction émerge, donc l'intervalle I est connexe. □

Exercice 2.3. Montrer que la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est connexe et que ses parties connexes sont les intervalles généralisés.

Théorème 2.6. L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Preuve Soit $f : X \to Y$ continue avec X connexe. Montrons que $f(X)$ est connexe. Soit $h : f(X) \to \{0, 1\}$ continue. La fonction $h \circ f : X \to \{0, 1\}$ est continue. Comme X est connexe, elle est constante, donc la fonction h est constante sur $f(X)$. On en déduit que $f(X)$ est connexe. □

Corollaire 2.7 *(théorème des valeurs intermédiaires).* Soient X un espace topologie connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(X)$ est un intervalle.

Définition 2.8. Soit X un espace topologique. Un *chemin* (continu) est une application continue γ de $[0, 1]$ dans X. On dit que γ joint $x := \gamma(0)$ à $y := \gamma(1)$. L'image $\gamma([0, 1])$ s'appelle le *tracé* du chemin : c'est un sous-espace connexe de X.

Définition 2.9. Soit $A \subset X$. On appelle *extérieur* de A l'ouvert $\operatorname{Ext} A := \complement_X \overline{A}$.

Théorème 2.10 *(passage des douanes).* Soit $A \subset X$. Tout chemin γ joignant un point intérieur à A à un point extérieur de A rencontre la frontière.

Preuve On peut décomposer l'espace X comme

$$X = \mathring{A} \sqcup \partial A \sqcup \operatorname{Ext} A.$$

Par l'absurde, supposons que l'image de γ ne rencontre par ∂A. En notant $B := \gamma([0, 1])$, on a

$$B = (\mathring{A} \cap B) \sqcup (\operatorname{Ext} A \cap B).$$

C'est une partie de B en deux ouverts disjoints. Par hypothèse, chacun contient au moins un point $\gamma(0)$ ou $\gamma(1)$ ce qui contredit la connexité de B. Donc B doit rencontrer ∂A. □

Théorème 2.11. Toute famille de connexes ayant deux à deux une intersection non vide a une union connexe.

Preuve Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de connexes deux à deux disjoints. Soit $h : \bigcup_{i \in I} A_i \to \{0, 1\}$. Pour tout $i \in I$, la restriction à A_i est continue, donc elle est constante égale à $c_i \in \{0, 1\}$. Par hypothèse, pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, donc $h_{|A_i} = h_{|A_j}$, donc $c_i = c_j$. Donc la fonction h est constante. □

2.2 Composantes connexes

Définition 2.12. Soient X un espace topologique et $x \in X$. On appelle *composante connexe* de x l'union de tous les connexes contenant x et on la note $\operatorname{CC}(x)$.

Proposition 2.13. 1. La composante connexe de x est connexe et c'est le plus grand connexe contenant x.
2. L'espace X est connexe si et seulement si il admet une unique composante connexe.

Théorème 2.14. Soit $A \subset X$ connexe. Alors $\overline{A}$ est connexe.

Preuve Soit $h : \overline{A} \to \{0, 1\}$ continue. Sa restriction à A est continue, donc elle est constante égale à $\varepsilon \in \{0, 1\}$. La partie $h^{-1}(\{\varepsilon\})$ est un fermé contenant A, donc il contient $\overline{A}$. D'où $h = \varepsilon$ sur $\overline{A}$. □

Corollaire 2.15. Les composantes connexes sont toujours fermées.

◇ Remarque. En général, les composantes connexes ne sont pas ouvertes sauf s'il y en a une nombre fini.

PROPOSITION 2.16. La relation « appartenir à une composante connexe » est une relation d'équivalences sur les points de X. Donc les classes d'équivalences forment une partition de X. Ces classes d'équivalences sont les composantes connexes.

EXERCICE 2.4. Montrer que les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons. On dit alors que $\mathbb{Q}$ est *totalement discontinu*.

THÉORÈME 2.17. Un produit quelconque de connexe est connexe.

Preuve Commençons avec un produit de deux espaces topologiques X et Y.

LEMME 2.18. Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors pour tout $x \in X$, la partie $\{x\} \times Y$ est homéomorphe à Y.

Pour montrer le lemme, il suffit de remarquer que l'application $y \in Y \longmapsto (x, y) \in \{x\} \times Y$ est continue. Ainsi la partie $\{x\} \times Y$ est connexe. Soit $h\colon X \times Y \to \{0,1\}$ continue. Soient $z_1 := (x_1, y_1) \in X \times Y$ et $z_2 := (x_2, y_2) \in X \times Y$. La fonction $h_{|\{x_1\} \times Y}$ est continue, donc elle est constante, donc $h(x_1, y_1) = h(x_1, y_2)$. De même, la partie $X \times \{y_2\}$ est connexe, donc $h(x_1, y_2) = h(x_2, y_2)$. On en déduit que $h(z_1) = h(z_2)$. Donc la fonction h est constante ce qui montre que $X \times Y$ est connexe.

Revenons au cas général. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de connexes. On note $X := \prod_{i \in I} X_i$. Soit $h\colon X \to \{0,1\}$. Par l'absurde, supposons que h ne soit pas constante. Les deux ouverts $\Omega_0 := h^{-1}(\{0\})$ et $\Omega_1 := h^{-1}(\{1\})$ non vides forment une partition de X. Chaque ouvert Ω_ε contient un cylindre de la forme

$$C_\varepsilon := \prod_{i \in I} Y_i^\varepsilon \quad \text{avec} \quad Y_i^\varepsilon := \begin{cases} X_i & \text{si } j \notin J^\varepsilon, \\ U_i^\varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

où $J_\varepsilon \subset I$ est fini. On note $J := J^0 \cap J^2$. En réordonnant les facteurs, on écrit $X = A \times B$ avec

$$A := \prod_{j \in I \setminus J} X_i \quad \text{et} \quad B := \prod_{j \in J} X_j.$$

Alors on peut écrire $C_\varepsilon = A \times V_\varepsilon$ où V_ε est un ouvert dans B. On sait que $C_\varepsilon \neq \emptyset$, donc $A \neq \emptyset$ et $V_\varepsilon \neq \emptyset$. Soient $a \in A$ et $b_\varepsilon \in V_\varepsilon$. Soient $z_0 := (a, b_0) \in C_0$ et $z_1 := (a, b_1) \in C_1$. La partie $\{a\} \times B$ est connexe puisque B est connexe comme produit fini de connexe. Donc $h_{|\{a\} \times B}$ est constante, donc $h(z_1) = h(z_2)$ ce qui est impossible car $z_0 \in \Omega_0$ et $z_1 \in \Omega_1$. □

2.3 CONNEXITÉ PAR ARCS

DÉFINITION 2.19. Un espace topologique est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin.

THÉORÈME 2.20. Un espace connexe par arcs est connexe.

Preuve Soient X un espace connexe par arcs et $x, y \in X$. Soit γ un chemin reliant x à y. Alors la fonction $h \circ \gamma$ est continue de $[0,1]$ dans $\{0,1\}$, donc elle est constante, donc $h(x) = h(y)$. On en déduit que la fonction h est constante et que X est connexe. □

◇ REMARQUE. La réciproque est fausse. Par exemple, l'ensemble

$$\left\{(x, \sin \tfrac{1}{x}) \;\middle|\; x > 0\right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

est connexe mais pas connexe pas arcs.

EXERCICE 2.5. Dans un espace vectoriel normé, montrer que tout ouvert connexe est connexe par arcs.

Chapitre 3
Compacité

3.1 Définition, propriété de Borel-Lebesgue

Définition 3.1. Un espace topologique X est *compact* si

(i) il est séparé,

(ii) il possède la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

◇ Remarque. On peut reformuler la propriété de Borel-Lebesgue comment suivant : s'il existe une famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que

$$X = \bigcup_{i\in I} \Omega_i,$$

alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_N \in I$ tels que

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_{i_k}.$$

Ceci est également équivalent à la propriété suivante : si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés d'intersection vide, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \ldots, i_N \in I$ tels que $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_N} = \emptyset$.

▷ Exemple. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas compact car le recouvrement

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n-2, n+2[$$

n'admet par de sous-recouvrement finie puisque sinon $\mathbb{R}$ serait de la forme $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.2 *(théorème de compacts emboîtés).* Dans un espace compact, une intersection décroissante de fermés non vide est non vide.

Preuve On se place dans le cas dénombrable. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides. Par l'absurde, supposons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Par compacité, il existe $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_k} = \emptyset$, donc $F_{\max(n_1,\ldots,n_k)} = \emptyset$ ce qui est absurde. □

Définition 3.3. Une partie $A \subset X$ est dite compacte si (A, τ_A) est compact.

Proposition 3.4. On suppose que X est séparé. Alors $A \subset X$ est compact si et seulement si, de tout recouvrement de A par des ouverts de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

◇ Remarques. – Si X est séparé et $A \subset X$ est fini, alors A est compact.

– Soit X un espace topologique séparé. Soient $A, B \subset X$ tels que $A \subset B$. Alors A est compact si et seulement si A est compact dans X.

3.2 Compacité dans les espaces métriques

Définition 3.5. Soient (X, τ) un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. On dit que $a \in X$ est une *valeur d'adhérence* de la suite si tout voisinage $V \in \mathscr{V}(a)$ contient l'image d'un ensemble infini d'indice de la suite, *i. e.* il existe une partie infinie $J \subset \mathbb{N}$ telle que $x_i \in V$ pour tout $i \in J$.

Exercice 3.1. Montrons que, si une suite suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, alors a est une valeur d'adhérence.

Proposition 3.6. On suppose que X est métrique. Alors a est une valeur d'adhérence si et seulement si on peut construire une sous-suite qui converge vers a.

Preuve Le sens réciproque a déjà état fait. Soit a une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{B}(a, 1/k) \in \mathscr{V}(a)$, donc il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_k} \in \mathrm{B}(a, 1/k)$. On peut faire ce choix, par induction, de tel sorte que la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ soit strictement croissante. La suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge alors vers a. □

Théorème 3.7 *(Bolzano-Weierstrass).* Soit X un espace métrique. Alors X est compact si et seulement si toute suite de X admet une valeur d'adhérence.

Preuve On suppose que X est compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n := \{x_k \mid k \geqslant n\}$ et $F_n := \overline{A_n}$. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides, donc $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$. Soit $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \in F_n$ et la boule $V := \mathrm{B}(x, 1/n)$ est un voisinage de x, donc il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $x_{k_n} \in A_n \cap V$. Quitte à extraire de la suite $n \longmapsto k_n$ une suite strictement croissante, on obtient alors une sous-suite extraite qui converge vers x.

Réciproquement, on suppose que toute suite de X admette une valeur d'adhérence. Montrons deux lemmes.

Lemme 3.8 *(de la maille).* Soient X un espace métrique vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass et $(\Omega_j)_{j\in J}$ un recouvrement par des ouverts de X. Alors

$$\exists \rho > 0,\ \forall x \in X,\ \exists j_x \in J, \quad \mathrm{B}(x, \rho) \subset \Omega_{j_x}.$$

Montrons le premier lemme. Par l'absurde, supposons que

$$\forall \rho > 0,\ \exists x \in X,\ \forall j \in J, \quad \mathrm{B}(x, \rho) \not\subset \Omega_j.$$

On choisit $\rho = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui permet de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathrm{B}(x_n, 1/n)$ n'est jamais contenue dans Ω_j pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in J$. Soit $a \in X$ une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il existe $j_a \in J$ tel que $a \in \Omega_{j_a}$. Comme Ω_{j_a} est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \Omega_{j_a}$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite telle que $y_n \to a$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad d(y_n, a) \leqslant \varepsilon/2.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/n \leqslant \varepsilon$, on a

$$\mathrm{B}(y_n, 1/n) \subset \mathrm{B}(y_n, \varepsilon/2) \subset \mathrm{B}(a, \varepsilon) \subset \Omega_{j_a}$$

ce qui est impossible.

Lemme 3.9 *(de recouvrement).* Soient X un espace métrique vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass et $\varepsilon > 0$. Alors on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε.

On choisit $x_0 \in X$. On considère la boule $\mathrm{B}(x_0, \varepsilon)$. Alors ou bien $\mathrm{B}(x_0, \varepsilon) = X$ et c'est gagné, ou bien on considère $X_1 := \complement_X \mathrm{B}(x_0, \varepsilon)$. On recommence : on choisit $x_1 \in X_1$. Alors ou bien $\mathrm{B}(x_1, \varepsilon) \supset X$ et $X = \mathrm{B}(x_1, \varepsilon) \cup \mathrm{B}(x_0, \varepsilon)$, ou bien on considère $x_2 \in X_2 := \complement_{X_1} \mathrm{B}(x_1, \varepsilon)$. Et ainsi de suite. Par l'absurde, on suppose que le processus ne s'arrête jamais. Donc on a obtenu une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X. Dans ce cas, soit $a \in X$ une valeur d'adhérence. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \notin \mathrm{B}(x_{n-1}, \varepsilon)$, donc $d(x_n, x_{n-1}) \geqslant \varepsilon$. Et même, pour tout $m > n$, on a $d(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$. Pourtant, comme la propriété de Bolzano-Weierstrass est vérifiée, on peut considérer $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite qui converge vers a, alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant K, \quad d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2,$$

donc l'inégalité triangulaire donne

$$\forall k \geqslant K, \quad d(x_{n_k}, x_{n_K}) < \varepsilon$$

ce qui est impossible. Donc on s'arrête en temps fini et on a gagné.

Montrons le théorème. On suppose la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $(\Omega_j)_{j\in J}$ un recouvrement par des ouverts de X. Soit $\rho > 0$ donné par le lemme 3.8. Pour tout $x \in X$, il existe $j_x \in I$ tel que $\mathrm{B}(x, \rho) \subset \Omega_{j_x}$. Par le lemme 3.9, en prenant $\rho = \varepsilon$, il existe $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que

$$\bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{B}(x_i, \rho) \supset X.$$

De plus, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on a $\mathrm{B}(x_i, \rho) \subset \Omega_{j_{x_i}}$, donc

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_{j_{x_i}} \supset X$$

qui est bien un sous-recouvrement fin. □

Théorème 3.10. Dans $\mathbb{R}$, un intervalle fermé borné est compact.

Preuve Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Il suffit de vérifier la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$. On procède par dichotomie. On coupe le segment $[a, b]$ en deux. L'un des deux intervalles contient l'image d'une infinité de n. On le note $[a_1, a_1]$. On recommence le processus afin d'obtenir des segments $[a_n, b_n]$ de taille $(b-a)/2^n$. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et convergent respectivement vers a et b. De plus, on a $a = b$ car $|a_n - b_n| \to 0$. Dans chaque segment $[a_n, b_n]$, on choisit un élément x_{k_n}. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{k_n} - a| \leqslant \frac{b-a}{2^n},$$

donc $x_{n_k} \to a$ et donc a est une valeur d'adhérence. □

3.3 Propriétés des compacts

Proposition 3.11. Une union finie de compacts est compacte.

Preuve Soit $(\Omega_j)_{j\in J}$ un recouvrement de $X \coloneqq \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} X_i$. Pour chaque $i \in [\![1, N]\!]$, les ouverts Ω_j recouvrent X_i, donc il existe un sous-recouvrement fini R_i de X_i. Alors $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} R_i$ recouvre X. Donc X est compact. □

Proposition 3.12. Dans un espace topologie séparé, tout compact est fermé.

Preuve Soient X un espace topologique séparé et $K \subset X$ un compact. On note $\Omega \coloneqq \complement_X K$. Montrons que Ω est un ouvert. Soit $x \in \Omega$ Pour $k \in K$, on a $x \neq k$, donc il existe $V_k \in \mathscr{V}(x)$ et $W_k \in \mathscr{V}(k)$ ouverts tels que $V_k \cap W_k = \emptyset$. Les ouverts W_k forment un recouvrement par des ouverts de K. On peut en extraire un sous-recouvrement fini W_{k_1}, …, W_{k_N}. Alors $V = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} V_{k_i}$ est un voisinage ouvert de x vérifiant $V \cap \bigcup_{1\leqslant i\leqslant N} W_{k_i} = \emptyset$, donc $V \subset \Omega$. On en déduit que Ω est un voisinage de X et donc que Ω est un ouvert, *i. e.* K est un fermé.

• *Preuve dans le cas métrique.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K qui converge vers $x \in X$. Il suffit de montrer que $x \in K$. On sait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $a \in K$. Alors il existe une extraction $k \mapsto n_k$ telle que $x_{n_k} \to a$. Or $x_n \to x$, donc $x_{n_k} \to x$. Par unicité de la limite dans un espace métrique, on a $x = a \in K$. Ainsi K est fermé. □

Théorème 3.13. Dans un espace topologique compact, tout fermé est compact.

Preuve Soit $F \subset X$ fermé. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une fermé de fermés de F d'intersection vide. Pour tout $i \in I$, il existe $A_i \subset X$ fermé tel que $F_i = A_i \cap F$, donc F_i est fermé dans X. Comme X est compact, il existe $i_1, \dots, i_N \in I$ tel que $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset$, donc $F \cap (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \emptyset$, donc $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, on conclut que F est compact. □

Corollaire 3.14. – Dans un compact, les parties compactes sont exactement les parties fermées.
– Toute intersection de compacts est compacts.

Proposition 3.15. Soient X un espace métrique compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a si et seulement si a est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve Le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose que a est l'unique valeur d'adhérence. Par l'absurde, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers a. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n_N \geqslant N, \quad x_{n_N} \notin \mathrm{B}(a, \varepsilon).$$

La suite $(x_{n_N})_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite du fermé $\mathrm{B}(a, \varepsilon)$ qui est compact. Ainsi cette suite admet une valeur d'adhérence qu'on note $\ell \in X$. Or $d(\ell, a) \geqslant \varepsilon$, donc $\ell \neq a$ ce qui est impossible. Donc $x_n \to a$ □

▷ Exemple. La suite $(n\mathbb{1}_{2\mathbb{N}+1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence, mais elle ne converge pas. On en déduit que $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Proposition 3.16. Tout espace métrique compact est séparable.

Preuve Par le lemme de recouvrement, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ qu'on note $\mathrm{B}(x_{i,n}, 1/n)$ pour $i \in [\![1, N_n]\!]$. Alors l'ensemble des centres $\{x_{i,n} \mid n \in \mathbb{N}^*, i \in [\![1, N_n]\!]\}$ est dense dans X. En effet, soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Pour $n > 1/\varepsilon$, il existe $i \in [\![1, N_n]\!]$ tel que $x \in \mathrm{B}(x_{i,n}, \varepsilon)$. □

Proposition 3.17. Dans un espace métrique, un compact est borné.

Preuve On peut extraire un recouvrement fini de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}(x_0, n)$ avec $x_0 \in X$. □

Proposition 3.18. Dans un espace métriques, les fermés bornés sont compacts si et seulement si les boules fermées sont compactes.

Preuve Le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose que les boules fermées sont compactes. Soit B un fermé borné. Il existe $x_0 \in X$ et $R > 0$ tel que $B \in \mathrm{B}(x_0, r) \subset \mathrm{B_f}(x_0, r)$, donc B est fermé dans un compact, donc il est compact. □

Théorème 3.19 *(Tychonoff)*. Tout produit de compacts est compacts.

Preuve Ce théorème est équivalent à l'axiome du choix. Montrons ce théorème pour un nombre fini de compact. Soient X et Y deux espaces topologiques compacts. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement par des ouverts de $X \times Y$. Pour tout $(x, y) \in X \times Y$, il existe $i \in I$ tel que $(x, y) \in \Omega_i$, donc il existe un rectangle $R_{x,y}$ contenu dans Ω_i et qui contient (x, y). Soit $y_0 \in X$ fixé. Alors $\{R_{x,y_0} \mid x \in X\}$ recouvre $X \times \{y_0\}$ qui est homéomorphe à X et donc compact. Donc il existe $x_1, \dots, x_{N(y_0)} \in X$ tels que

$$\bigcup_{i=1}^{N(y_0)} R_{x_i,y_0} \supset X \times \{y_0\}\,.$$

On les projette sur Y et on les intersectes : on obtient un ouvert U_{y_0} de Y. Alors $\{U_y \mid y \in Y\}$ recouvre Y, donc il existe $y_1, \dots, y_M \in Y$ tels que

$$\bigcup_{j=1}^{M} U_{y_j} \supset Y.$$

Pour $y_0 \in Y$, on note $\mathscr{R}(y_0)$ le recouvrement $\{R_{x_i,y_0} \mid i \in [\![1, N(y_0)]\!]\}$ de $X \times \{y_0\}$. Alors $\bigcup_{j=1}^{M} \mathscr{R}(y_j)$ est un recouvrement fini de $X_1 \times X_2$. De plus, chaque $R_{x,y}$ est contenu dans un ouvert Ω_i. Donc l'ensemble des ouverts Ω_j correspondants aux $R_{x,y}$ du recouvrement est un recouvrement fini de $X \times Y$ qui est donc compact. □

Corollaire 3.20. – Les pavés de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie produit sont compacts.
– Les pavés de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ sont compacts.
– Dans $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$, les fermés bornés sont compacts.

3.3.1 Fonctions continues et compacité

Théorème 3.21. Soient X et X' deux espaces topologiques séparés. Soit $f \colon X \to X'$ continue. Alors l'image par f d'un compact dans X est compacte dans X'.

Preuve Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement par des ouverts de $f(X)$. Alors les parties $f^{-1}(\Omega_i)$ sont des ouverts recouvrant X, donc il existe $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que

$$\bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(\Omega_{i_k}) \supset X, \quad \text{donc} \quad \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_{i_k} \supset f(X).$$

On en déduit que l'image $f(X)$ est compactes. □

Corollaire 3.22. Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un espace topologique séparé X telles que $\tau_2 \subset \tau_1$. Si (X, τ_1) est compact, alors (X, τ_2) est compact.

Preuve On utilise le théorème précédent avec la fonction $\mathrm{Id} \colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ qui est continue. □

Corollaire 3.23. Soient X un espace topologique compact et $f \colon X \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve L'image $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc elle est borné et admet donc des bornes inférieure et supérieure. Or elle est fermé, donc ses bornes sont dans $f(X)$. □

Théorème 3.24 *(Heine)*. Soient X et X' deux espaces métriques où X est compact. Soit $f \colon X \to X'$ continue. Alors f est uniformément continue.

Preuve Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n, y_n \in X$ tels que $d(x_n, y_n) \leqslant 1/n$ et $d(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$. La suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $X \times X$ qui est compact. Soit $(\tilde{x}_{n_k}, \tilde{y}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente qui converge vers $(a, b) \in X \times X$. Comme $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leqslant 1/n_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a = b$. Comme f est continue, on a $f(x_{n_k}) \to f(a)$ et $f(y_{n_k}) \to f(b) = f(a)$ ce qui est impossible. □

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

4.1 Généralité

Dans tout le chapitre, on étudie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 4.1. Sur un espace vectoriel normé, les opérations d'espace vectoriel, *i. e.* l'addition $A \colon E \times E \to E$ et la multiplication par un scalaire $\mathbb{K} \times E \to E$, sont continues.

Preuve Montrons que l'addition est continue. Soient $(x_0, y_0) \in E \times E$ et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $E \times E$ telle que $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Comme la topologie produit est obtenue par la distance d_1, on a

$$\|A(x_n, y_n) - A(x_0, y_0)\| = \|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \longrightarrow 0$$

ce qui montre que A est continue. De même, on montre que la multiplication est continue. □

Proposition 4.2. Les espaces vectoriels normés sont connexes par arcs.

Preuve Soient $x, y \in E$. Alors l'application $t \in [0,1] \longmapsto tx + (1-t)x \in E$ est un chemin de x à y et il est continue d'après la proposition précédente. □

▷ Exemples. 1. Soient X un espace topologique compact et E un espace vectoriel normé. Alors $\mathscr{C}^0(X, E)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme

$$f \in \mathscr{C}^0(X, E) \longmapsto \|f\|_{\mathscr{C}^0(X,E)} \coloneqq \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E .$$

2. Soit $E \coloneqq \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{K})$. Les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.
3. Les ensembles $\ell^p(\mathbb{K})$ avec $p \in [1, \infty]$ sont des espaces vectoriels normés.

4.2 Application linéaire continue

◇ Remarque. Soit $f \colon E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Alors f est continue si et seulement si elle est continue en 0. En effet, pour tout $x_0 \in E$, l'application $x \longmapsto x + x_0$ est un homéomorphisme.

Proposition 4.3. Soient $f \colon E \to F$ linéaire. Alors f est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant C \|x\|_E ,$$

i. e. l'application f est lipschitzienne.

Corollaire 4.4. Deux normes définissent la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes.

Preuve C'est la même topologie si et seulement si $\mathrm{Id} \colon (E, \tau_1) \to (E, \tau_2)$ est un homéomorphisme. Or cette application est linéaire, donc elle est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|\mathrm{Id}(x)\|_2 \leqslant C \|x\|_1 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{Id}(x)\|_2 \leqslant C \|x\|_1 .$$

Donc c'est la même topologie si et seulement si les normes sont équivalentes. □

Notation. On note $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications continues de E dans F, aussi appelées opérateurs bornés.

Définition-proposition 4.5. L'ensemble $\mathscr{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme subordonnée

$$f \in \mathscr{L}_c(E, F) \longmapsto |||f||| \coloneqq \sup_{x \in E} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} < +\infty$$

Proposition 4.6. Soient $f \in \mathscr{L}_c(F,E)$ et $g \in \mathscr{L}_c(G,F)$. Alors $|||f \circ g||| \leqslant |||f|||\,|||g|||$. La norme $|||\ |||$ est donc une norme d'algèbre sur $\mathscr{L}_c(E,F)$.

4.3 Compacité dans les espaces vectoriels normés

4.3.1 Dimension finie

Définition 4.7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On définit la norme $\|\ \|_\infty$ sur E par

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\,.$$

Alors l'application

$$\left|\begin{aligned}\mathbb{K}^n &\longrightarrow (E,\|\ \|_\infty),\\ (x_1,\dots,x_n) &\longmapsto x_1e_1+\dots+x_ne_n\end{aligned}\right.$$

est un homéomorphisme.

Corollaire 4.8. Dans $(E,\|\ \|_\infty)$, toute boule fermée est compacte.

Preuve Les pavés de $\mathbb{K}^n$ sont compacts. Ceux-ci sont les boules de $(\mathbb{K}^n,\|\ \|_\infty)$ qui sont homéomorphes aux boules de $(E,\|\ \|_\infty)$. □

Théorème 4.9. 1. Toutes les normes sur E sont équivalentes.
2. Les compacts de E sont exactement les parties fermées et bornées.
3. Toute application linéaire de E dans un espace vectoriel normé est continue.

Preuve 1. Soit $\|\ \|$ une norme sur E. Montrons qu'elle est équivalente à la norme $\|\ \|_\infty$. Soit $x \in E$ qu'on écrit sous la forme $x = x_1e_1+\dots+x_ne_n$. Alors

$$\|x\| \leqslant C\,\|x\|_\infty \quad \text{avec} \quad C \coloneqq \sum_{i=1}^n \|e_i\|\,.$$

On sait que $\mathrm{S}^n_{\|\ \|_\infty}(0,1)$ est fermé dans $\mathrm{B}^n_{\|\ \|_\infty}(0,1)$, donc $\mathrm{S}^n_{\|\ \|_\infty}(0,1)$ est compacte. Ainsi l'application continue $x \longmapsto \|x\|$ est bornée et atteint ses bornes, *i. e.* il existe $x_0 \in E$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{S}^n_{\|\ \|_\infty}(0,1), \quad \|x\| \geqslant \|x_0\|\,.$$

Alors pour tout $x \in E - \{0\}$, on a

$$\|x\|_\infty \geqslant \|x_0\|\,\|x\|\,.$$

Ce qui montre l'équivalence des normes.
2. Comme $\mathbb{K}^n$ et $(E,\|\ \|_\infty)$ sont homéomorphes, les compacts de $\mathbb{K}^n$ sont les compacts de E et de même pour les fermés. Par l'équivalence des normes, les bornées sont les mêmes. De plus, on sait que les compacts $\mathbb{K}^n$ sont les fermés bornés ce qui conclut. □

Proposition 4.10. Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Preuve Soient E un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de F qui converge vers $x \in E$. Comme cette suite est bornée, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $x_n \in \mathrm{B_f}(0,R) \cap F$. Comme $\mathrm{B_f}(0,R)$ est compact, la suite admet une valeur d'adhérence dans F. Par unicité, on obtient que $x \in F$. □

Théorème 4.11 *(Riez)*. Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Preuve Le sens direct est évident. Réciproquement, on suppose que la boule unité fermée B est compacte. Alors il existe $x_1,\dots,x_N \in E$ tel que

$$\bigcup_{i=1}^N \mathrm{B}(x_i,1/2) \supset B.$$

Montrons que les vecteurs x_i engendre E. Soit $F \coloneqq \operatorname{Vect}\{x_1,\dots,x_n\} \subset E$. Par la proposition précédente, le sous-espace vectoriel F est fermé et

$$B \subset \{x_1,\dots,x_n\} + \mathrm{B}(0,1/2) \subset F + \frac{1}{2}B.$$

Par récurrence, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B \subset F + \frac{1}{2^k} B.$$

Alors pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in B$, il existe $y \in F$ tel que $x \in \mathrm{B}(y, 1/2^n)$, donc $y \in \mathrm{B}(x, 1/2^n)$. On en déduit que x est adhérent à F. Donc $B \subset \overline{F} = F$. Par homogénéité, on a $E \subset F$, donc $E = F$. □

Chapitre 5
Complétude des espaces métriques

5.1 Suite de Cauchy

Définition 5.1. Soit X un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geqslant N, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 5.2. 1. Toute suite de Cauchy est bornée.
2. Toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition 5.3. Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.

5.2 Espace métrique complet

Définition 5.4. On dit qu'un espace métrique est *complet* si toutes ses suites de Cauchy convergent.

▷ Exemple. Montrons que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. On peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ telle que $x_n \to \sqrt{2}$. Cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Cependant, elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle l'est *a fortiori* dans $\mathbb{Q}$.

Théorème 5.5. L'espace métrique $\mathbb{R}$ est complet.

Preuve Soit x une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. On sait que x est bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ affirme qu'alors x admet une valeur d'adhérence. La suite x converge donc. □

Théorème 5.6. Soient X un ensemble et X' un espace métrique. Alors $(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, X'), d_\infty)$ est complet.

Preuve Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, X')$. Soit $x \in X$. On considère la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant N_\varepsilon, \quad d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

donc *a fortiori*

$$\forall n, m \geqslant N_\varepsilon, \quad d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X'. Comme X' est complet, elle converge vers un certain élément $f(x) \in X'$. Montrons que $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, X')$. En faisait tendre m vers $+\infty$ dans la relation $(*)$, puisque d est continue, on a

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in X$. On en déduit que $d_\infty(f_n, f) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$. Comme les fonctions f_n sont bornées, la fonction f l'est aussi. Il reste plus qu'à montrer que la convergence est informe et c'est le cas d'après la dernière inégalité. □

5.3 Propriétés des espaces complets

Proposition 5.7. Soient (X, d) un espace métrique complet et $F \subset X$ muni de la distance induite. Alors F est fermé dans X si et seulement si $(F, d_{|F})$ est complet.

Preuve On suppose que F est fermé dans X. Soit x une suite de Cauchy de F. Elle est de Cauchy dans X. Comme X est complet, elle converge dans X. Comme F est fermé, elle converge même dans F ce qui montre la complétude de F.

Réciproquement, on suppose que $(F, d_{|F})$ est complet. Soit x une suite de F convergeant dans X. La suite x est donc de Cauchy dans X, donc elle l'est dans F. Comme F est complet, elle converge dans F ce qui montre la fermeture de F. □

Corollaire 5.8. Soient X un espace topologique et X' un espace métrique. Alors $(\mathscr{C}_b^0(X, X'), d_\infty)$ est complet.

Preuve Comme il est fermé dans $\mathscr{F}_b(X, X')$, on en déduit qu'il est complet. □

Corollaire 5.9. Une intersection quelconque d'espaces métriques complets est complète.

Preuve Il suffit de remarquer que l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé dans F_{i_0} pour tout $i_0 \in I$; □

Proposition 5.10. Une union finie de sous-espaces métriques complets d'un espace métrique est complet.

Preuve Soient X un espace métrique et X_1, ..., X_N des sous-espaces métriques complets de X. Soit x une suite de $X_1 \cup \cdots \cup X_N$. Par le principe des tiroirs, il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que X_i contiennent une sous-suite de x. Or une sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy, donc la sous-suite considérée converge puisque X_i est complet. Comme x est de Cauchy, elle converge. □

Proposition 5.11. Un espace métrique compact est complet.

Preuve Il suffit d'extraire une sous-suite convergente d'une suite de Cauchy pour montrer que cette dernière suite converge. □

Proposition 5.12. Un produit fini ou dénombrable d'espaces complets est complets.

Preuve Montrons la proposition dans le cas fini. Soient X et Y deux espaces métriques complets. Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(X \times Y, d_\infty)$. Montrons que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $d_X(x_n, x_m) \leqslant d_\infty((x_n, y_n), (x_m, y_m))$. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy. De même pour la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors la suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $X \times Y$. □

5.4 Points fixes

Définition 5.13. Soient X un ensemble, $f : X \to X$ et $x \in X$. On dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Définition 5.14. Soit X un espace métrique. On dit qu'une application $f : X \to X$ est k-contractante si elle est k-lipschitzienne avec $k < 1$.

Théorème 5.15 *(du point fixe de Picard).* Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application α-contractante. Alors f admet au moins un point fixe $x \in X$. De plus, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers ce point fixe x et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, x) \leqslant \alpha^n d(x_0, x)$$

Preuve • *Existence.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle est de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(x_m, x_{m+1}) \leqslant \alpha d(x_{m-1}, x_m) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^m d(x_1, x_0).$$

Ainsi pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant m$, on en déduit que

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \leqslant d(x_0, x_1)(\alpha^m + \cdots + \alpha^{n-1}) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\alpha^n/(1-\alpha) \to 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n/(1-\alpha) < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi pour tous $m, n \geqslant N$ tels que $n \geqslant m$, on a $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme X est complet, elle converge vers x. Comme f est continue, l'unicité de la limite donne $x = f(x)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(x_n, x) \leqslant d(f_{n-1}, f(x)) \leqslant \alpha d(x_{n-1}, x) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n d(x_0, x).$$ □

5.5 Plongement des applications uniformément continues

Théorème 5.16. Soient X un espace métrique et X' un espace métrique complet. Soit $Y \subset X$ une partie dense dans X. Soit $f : Y \to X'$ uniformément continue. Alors f admet un unique prolongement continu de X dans X'.

Preuve On doit montrer que f admet une limite en chaque point de $\overline{Y} = X$. Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy tels que $x_n \to x$. Montrons que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, *i. e.* est de Cauchy. On sait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme f est uniformément continue, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle converge dans X'. Ainsi la fonction f admet une limite en x. Par séparation, cette limite est unique. ☐

◇ Remarque. En particulier, cet unique prolongement est uniformément continu.

5.6 Espace de Banach

Définition 5.17. Un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace de Banach s'il est complet pour la distance naturelle.

Proposition 5.18. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Preuve La propriété est vraie pour les espaces vectoriels normés $\mathbb{K}^n$ puisque ce sont des produits finis d'espaces métriques complets. Par équivalence des normes, c'est vrai pour des espaces vectoriels normés de dimension finie. ☐

Proposition 5.19. Soient X un ensemble et E un espace de Banach. Alors $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(X, E)$ est un espace de Banach muni de la norme uniforme. Si X est un espace topologique, alors $\mathscr{C}^0_{\mathrm{b}}(X, E)$ est un espace de Banach.

▷ Exemple. Montrons de l'espace vectoriel normé $E := \mathscr{C}^0(]-1, 1[, \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_1$ n'est pas un espace de Banach. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n \colon x \in [-1, 1] \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 1 & \text{si } x > 1/n. \end{cases}$$

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E ne converge pas dans E. Cependant elle est de Cauchy puisque, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, on a

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant 2 \int_0^{1/n} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Proposition 5.20. Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach et $D \subset E$ un sous-espace vectoriel dense dans E. Alors toute application linéaire continue de D dans F se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de E dans F.

Preuve Une application linéaire continue est lipschitzienne, donc elle est *a fortiori* uniformément continue. On applique alors le théorème 5.16. La linéarité vient de l'unicité. ☐

Définition 5.21. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel normé E. On dit que la série $\sum x_n$ est absolument convergence si la série $\sum \|x_n\|$ converge.

Théorème 5.22. Un espace vectoriel normé est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge.

Preuve Soit E un espace de Banach. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. Montrons que cette suite est de Cauchy. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum x_n$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, on a

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = |\Sigma_n - \Sigma_m| \quad \text{avec} \quad \Sigma_n := \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|.$$

La suite $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant N, \quad |\Sigma_n - \Sigma_m| < \varepsilon.$$

On en déduit alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme E est complet, cette dernière converge, *i. e.* la série $\sum x_n$ converge.

Réciproquement, supposons que E est un espace vectoriel normé où toute série absolument convergente converge. Montrons qu'il est complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant N_k, \quad \|x_n - x_m\| < 1/k^2.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=1}^{k-1} \left\| x_{N_{k+1}} - x_{N_k} \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

On en déduit que la série $\sum (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$ converge absolument. Ainsi la suite $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Donc E est un espace de Banach. □

◇ Remarque. Si E est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E)$ est un espace de Banach.

Théorème 5.23. Soient E un espace de Banach et $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E)$ tel que $\|A\| < 1$. Alors $\mathrm{Id}_E - A$ est inversible d'inverse $\sum_{k \in \mathbb{N}} A^k$.

Preuve La série $\sum A^k$ converge absolument, donc elle converge. En composant par $\mathrm{Id}_E - A$, on obtient Id_E. □

Corollaire 5.24. L'ensemble $\mathscr{GL}_{\mathrm{c}}(E)$, *i. e.* l'ensemble des applications continues inversibles d'inverse continu, est un ouvert de $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E)$.

Proposition 5.25. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que la série entière $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$. Alors pour tout $A \in \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E)$ tel que $\|A\| < R$, la série $\sum a_n A^n$ converge.